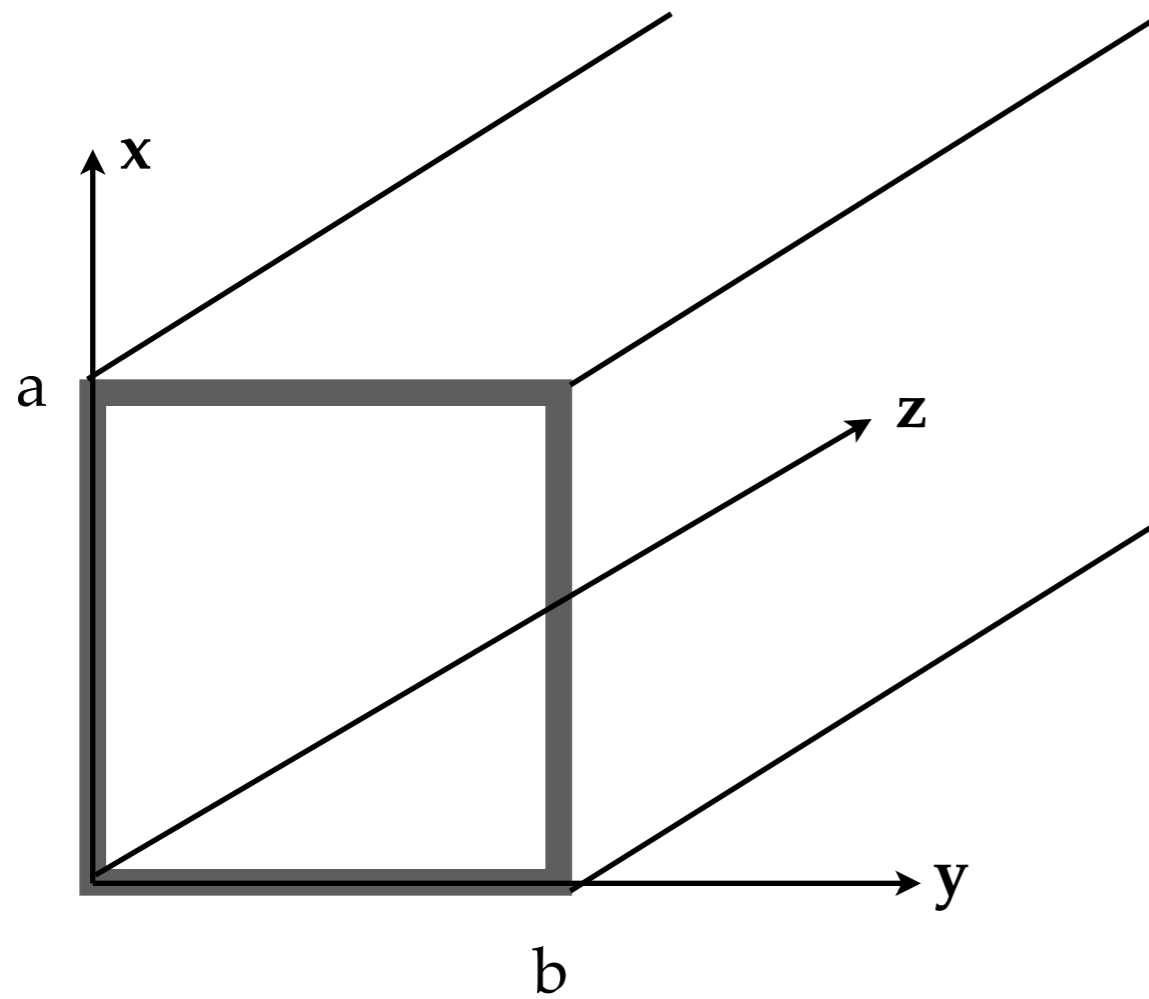


# Guias de onda

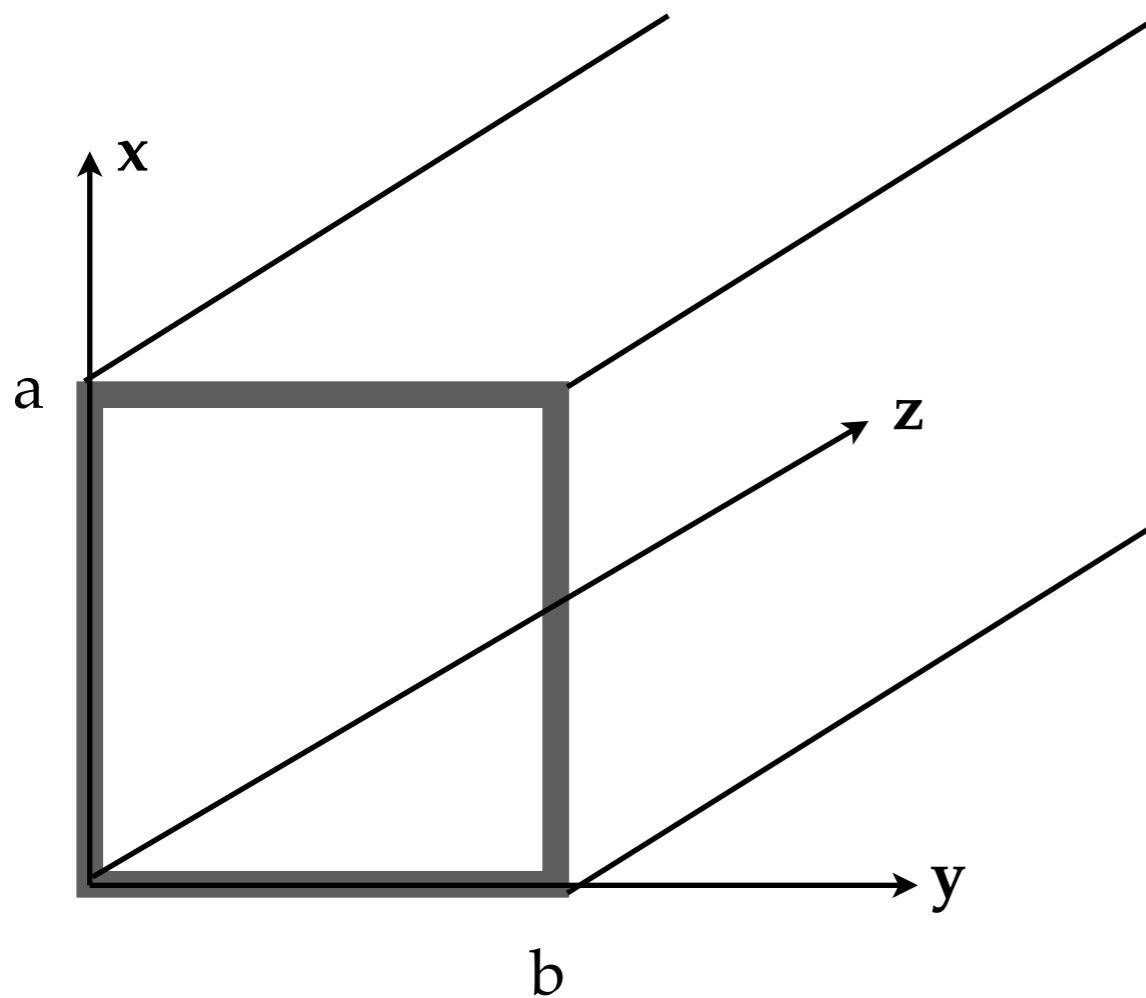
Prof. Edivaldo Moura Santos

# Revisão da última aula



Guia com seção transversal uniforme ao longo de  $z$

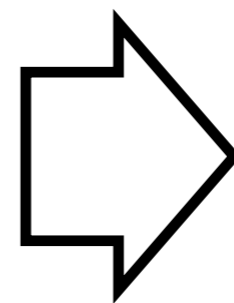
# Revisão da última aula



Guia com seção transversal uniforme ao longo de z

No interior do guia, os campos devem satisfazer as equações de Maxwell sem cargas e correntes. Assumimos que o meio material é o vácuo ou um meio tal que

$$\mu \simeq \mu_0 \quad \epsilon \simeq \epsilon_0$$



$$\nabla \cdot \mathbf{E} = 0$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$$

$$\nabla \times \mathbf{B} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}$$

Condições de contorno (1=interior, 2=parede):

$$\epsilon_1 E_1^\perp - \epsilon_2 E_2^\perp = \sigma_f$$

$$B_1^\perp = B_2^\perp$$

$$\mathbf{E}_1^{//} = \mathbf{E}_2^{//}$$

$$\frac{1}{\mu_1} \mathbf{B}_1^{//} - \frac{1}{\mu_2} \mathbf{B}_2^{//} = \mathbf{K}_f \times \hat{\mathbf{n}}$$

Condições de contorno (1=interior, 2=parede):

$$\begin{aligned}
 \epsilon_1 E_1^\perp - \epsilon_2 E_2^\perp &= \sigma_f \quad \mathbf{0} \\
 B_1^\perp &= B_2^\perp \\
 \mathbf{E}_1^\parallel &= \mathbf{E}_2^\parallel \\
 \frac{1}{\mu_1} \mathbf{B}_1^\parallel - \frac{1}{\mu_2} \mathbf{B}_2^\parallel &= \mathbf{K}_f \times \hat{\mathbf{n}}
 \end{aligned}$$

Para paredes feitas de material condutor perfeito!

Condições de contorno (1=interior, 2=parede):

$$\begin{aligned}
 \epsilon_1 E_1^\perp - \epsilon_2 E_2^\perp &= \sigma_f \\
 B_1^\perp &= B_2^\perp \\
 \mathbf{E}_1^\parallel &= \mathbf{E}_2^\parallel \\
 \frac{1}{\mu_1} \mathbf{B}_1^\parallel - \frac{1}{\mu_2} \mathbf{B}_2^\parallel &= \mathbf{K}_f \times \hat{\mathbf{n}}
 \end{aligned}$$

Para paredes feitas de material condutor perfeito!

Concluimos então que os campos no interior do guia devem satisfazer nas paredes:

$$\mathbf{E}^\parallel = \mathbf{0} \quad \text{e} \quad B^\perp = 0$$

Condições de contorno (1=interior, 2=parede):

$$\begin{aligned}
 \epsilon_1 E_1^\perp - \epsilon_2 E_2^\perp &= \sigma_f \\
 B_1^\perp &= B_2^\perp \\
 \mathbf{E}_1^\parallel &= \mathbf{E}_2^\parallel \\
 \frac{1}{\mu_1} \mathbf{B}_1^\parallel - \frac{1}{\mu_2} \mathbf{B}_2^\parallel &= \mathbf{K}_f \times \hat{\mathbf{n}}
 \end{aligned}$$

Para paredes feitas de material condutor perfeito!

Concluimos então que os campos no interior do guia devem satisfazer nas paredes:

$$\mathbf{E}^\parallel = \mathbf{0} \quad \text{e} \quad B^\perp = 0$$

Perceba que as densidades superficiais de carga e corrente responsáveis pelos campos eletromagnéticos no interior do guia são  $\sigma_f$  e  $\mathbf{K}_f$ .

Condições de contorno (1=interior, 2=parede):

$$\begin{aligned}
 \epsilon_1 E_1^\perp - \epsilon_2 E_2^\perp &= \sigma_f \\
 B_1^\perp &= B_2^\perp \\
 \mathbf{E}_1^\parallel &= \mathbf{E}_2^\parallel \\
 \frac{1}{\mu_1} \mathbf{B}_1^\parallel - \frac{1}{\mu_2} \mathbf{B}_2^\parallel &= \mathbf{K}_f \times \hat{\mathbf{n}}
 \end{aligned}$$

Para paredes feitas de material condutor perfeito!

Concluimos então que os campos no interior do guia devem satisfazer nas paredes:

$$\mathbf{E}^\parallel = \mathbf{0} \quad \text{e} \quad B^\perp = 0$$

Perceba que as densidades superficiais de carga e corrente responsáveis pelos campos eletromagnéticos no interior do guia são  $\sigma_f$  e  $\mathbf{K}_f$ .

Essas densidades podem ser obtidas a posteriori



**Mostramos também que para ondas harmônicas se propagando da direção z**

$$\begin{aligned}\tilde{\mathbf{E}}(\mathbf{r}, t) &= \tilde{\mathbf{E}}_0(x, y)e^{i(kz - \omega t)} \\ \tilde{\mathbf{B}}(\mathbf{r}, t) &= \tilde{\mathbf{B}}_0(x, y)e^{i(kz - \omega t)}\end{aligned}$$

**Mostramos também que para ondas harmônicas se propagando da direção z**

$$\begin{aligned}\tilde{\mathbf{E}}(\mathbf{r}, t) &= \tilde{\mathbf{E}}_0(x, y)e^{i(kz - \omega t)} \\ \tilde{\mathbf{B}}(\mathbf{r}, t) &= \tilde{\mathbf{B}}_0(x, y)e^{i(kz - \omega t)}\end{aligned}$$

**As componentes longitudinais (com respeito eixo do guia) dos campos satisfazem:**

$$\begin{aligned}(\nabla_{\perp}^2 - k_c^2) E_z &= 0 \\ (\nabla_{\perp}^2 - k_c^2) B_z &= 0\end{aligned}$$

**onde definiu-se**

$$\nabla_{\perp} \equiv \hat{\mathbf{x}} \frac{\partial}{\partial x} + \hat{\mathbf{y}} \frac{\partial}{\partial y} \quad \nabla_{\perp}^2 \equiv \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \quad k_c^2 \equiv k^2 - \left(\frac{\omega}{c}\right)^2$$

Mostramos também que para ondas harmônicas se propagando da direção z

$$\begin{aligned}\tilde{\mathbf{E}}(\mathbf{r}, t) &= \tilde{\mathbf{E}}_0(x, y)e^{i(kz - \omega t)} \\ \tilde{\mathbf{B}}(\mathbf{r}, t) &= \tilde{\mathbf{B}}_0(x, y)e^{i(kz - \omega t)}\end{aligned}$$

As componentes longitudinais (com respeito eixo do guia) dos campos satisfazem:

$$\begin{aligned}(\nabla_{\perp}^2 - k_c^2) E_z &= 0 \\ (\nabla_{\perp}^2 - k_c^2) B_z &= 0\end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \text{Equações de Helmholtz}$$

onde definiu-se

$$\nabla_{\perp} \equiv \hat{\mathbf{x}} \frac{\partial}{\partial x} + \hat{\mathbf{y}} \frac{\partial}{\partial y} \quad \nabla_{\perp}^2 \equiv \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \quad k_c^2 \equiv k^2 - \left(\frac{\omega}{c}\right)^2$$

Mostramos também que para ondas harmônicas se propagando da direção z

$$\begin{aligned}\tilde{\mathbf{E}}(\mathbf{r}, t) &= \tilde{\mathbf{E}}_0(x, y)e^{i(kz - \omega t)} \\ \tilde{\mathbf{B}}(\mathbf{r}, t) &= \tilde{\mathbf{B}}_0(x, y)e^{i(kz - \omega t)}\end{aligned}$$

As componentes longitudinais (com respeito eixo do guia) dos campos satisfazem:

$$\begin{aligned}(\nabla_{\perp}^2 - k_c^2) E_z &= 0 \\ (\nabla_{\perp}^2 - k_c^2) B_z &= 0\end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \text{Equações de Helmholtz}$$

onde definiu-se

$$\nabla_{\perp} \equiv \hat{\mathbf{x}} \frac{\partial}{\partial x} + \hat{\mathbf{y}} \frac{\partial}{\partial y} \quad \nabla_{\perp}^2 \equiv \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \quad k_c^2 \equiv k^2 - \left(\frac{\omega}{c}\right)^2$$

As componentes transversais, por sua vez, podem ser obtidas a partir das longitudinais:

$$\begin{aligned}\tilde{\mathbf{E}}_{\perp} &= -\frac{i}{k_c^2} \left( k \nabla_{\perp} \tilde{E}_z - \omega \hat{\mathbf{z}} \times \nabla_{\perp} \tilde{B}_z \right) \\ \tilde{\mathbf{B}}_{\perp} &= -\frac{i}{k_c^2} \left( k \nabla_{\perp} \tilde{B}_z + \frac{\omega}{c^2} \hat{\mathbf{z}} \times \nabla_{\perp} \tilde{E}_z \right)\end{aligned}$$

# Classificação de modos

$$E_z = 0$$

$$B_z = 0$$

**Modo TEM**

$$E_z = 0$$

$$B_z \neq 0$$

**Modo TE**

$$E_z \neq 0$$

$$B_z = 0$$

**Modo TM**

$$E_z \neq 0$$

$$B_z \neq 0$$

**Modo híbrido**

# Modos TE para guias de onda retangular

As equações de Helmholtz foram resolvidas por separação de variáveis

$$B_z(x, y) = X(x)Y(y)$$

# Modos TE para guias de onda retangular

As equações de Helmholtz foram resolvidas por separação de variáveis

$$B_z(x, y) = X(x)Y(y)$$

Aplicando as condições de contorno, temos:

$$B_z(x, y) = B_0 \cos\left(\frac{m\pi}{a}x\right) \cos\left(\frac{n\pi}{b}y\right), \quad m, n = 0, 1, 2, \dots$$

# Modos TE para guias de onda retangular

As equações de Helmholtz foram resolvidas por separação de variáveis

$$B_z(x, y) = X(x)Y(y)$$

Aplicando as condições de contorno, temos:

$$B_z(x, y) = B_0 \cos\left(\frac{m\pi}{a}x\right) \cos\left(\frac{n\pi}{b}y\right), \quad m, n = 0, 1, 2, \dots$$

Além disso, a **relação de dispersão do guia**, que sai naturalmente do método de separação de variáveis é:

$$k = \left[ \left(\frac{\omega}{c}\right)^2 - \left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 - \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2 \right]^{1/2} \quad (\text{TE}_{mn} - \text{guia retangular})$$



# Modos TE para guias de onda retangular

As equações de Helmholtz foram resolvidas por separação de variáveis

$$B_z(x, y) = X(x)Y(y)$$

Aplicando as condições de contorno, temos:

$$B_z(x, y) = B_0 \cos\left(\frac{m\pi}{a}x\right) \cos\left(\frac{n\pi}{b}y\right), \quad m, n = 0, 1, 2, \dots$$

Além disso, a **relação de dispersão do guia**, que sai naturalmente do método de separação de variáveis é:

$$k = \left[ \left(\frac{\omega}{c}\right)^2 - \left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 - \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2 \right]^{1/2} \quad (\text{TE}_{mn} - \text{guia retangular})$$

A relação de dispersão no interior de um guia de onda é diferente daquela do vácuo

$$k = \frac{\omega}{c} \quad (\text{vácuo})$$

**Perceba que para  $\omega < \omega_{mn}$ :**

$$\omega_{mn} \equiv c \left[ \left( \frac{m\pi}{a} \right)^2 + \left( \frac{n\pi}{b} \right)^2 \right]^{1/2} \quad \text{(frequência de corte do modo TE}_{mn}\text{)}$$

**de acordo com a relação de dispersão, o vetor de onda  $k$  adquire se torna imaginário e, portanto, os campos eletromagnéticos são exponencialmente atenuados ao longo do eixo do guia.**

**Perceba que para  $\omega < \omega_{mn}$ :**

$$\omega_{mn} \equiv c \left[ \left( \frac{m\pi}{a} \right)^2 + \left( \frac{n\pi}{b} \right)^2 \right]^{1/2} \quad \text{(frequência de corte do modo TE}_{mn}\text{)}$$

**de acordo com a relação de dispersão, o vetor de onda  $k$  adquire se torna imaginário e, portanto, os campos eletromagnéticos são exponencialmente atenuados ao longo do eixo do guia.**

- Pelo menos um dos índices do par  $(m, n)$  desse ser diferente de zero, ou seja, o modo TE<sub>00</sub> não se propaga no guia (Exercício 5 - lista 1b).**

**Perceba que para  $\omega < \omega_{mn}$ :**

$$\omega_{mn} \equiv c \left[ \left( \frac{m\pi}{a} \right)^2 + \left( \frac{n\pi}{b} \right)^2 \right]^{1/2} \quad \text{(frequência de corte do modo TE}_{mn}\text{)}$$

**de acordo com a relação de dispersão, o vetor de onda  $k$  adquire se torna imaginário e, portanto, os campos eletromagnéticos são exponencialmente atenuados ao longo do eixo do guia.**

- Pelo menos um dos índices do par  $(m, n)$  desse ser diferente de zero, ou seja, o modo TE<sub>00</sub> não se propaga no guia (Exercício 5 - lista 1b).**

- Menor frequência de corte de um modo TE do guia retangular:**

$$\omega_{10} = \frac{c\pi}{a}$$

# Velocidade de fase x Velocidade de grupo

$$\tilde{\mathbf{E}}(\mathbf{r}, t) = \tilde{\mathbf{E}}_0(x, y)e^{i(kz - \omega t)} = \tilde{\mathbf{E}}_0(x, y)e^{i\varphi(z, t)}$$

$$\tilde{\mathbf{B}}(\mathbf{r}, t) = \tilde{\mathbf{B}}_0(x, y)e^{i(kz - \omega t)} = \tilde{\mathbf{B}}_0(x, y)e^{i\varphi(z, t)}$$

# Velocidade de fase x Velocidade de grupo

$$\tilde{\mathbf{E}}(\mathbf{r}, t) = \tilde{\mathbf{E}}_0(x, y)e^{i(kz - \omega t)} = \tilde{\mathbf{E}}_0(x, y)e^{i\varphi(z, t)}$$

$$\tilde{\mathbf{B}}(\mathbf{r}, t) = \tilde{\mathbf{B}}_0(x, y)e^{i(kz - \omega t)} = \tilde{\mathbf{B}}_0(x, y)e^{i\varphi(z, t)}$$

A **velocidade de fase** corresponde àquela com que um ponto de fase constante se move ao longo do eixo  $z$ :

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} = 0 = k \frac{dz}{dt} - \omega$$

# Velocidade de fase x Velocidade de grupo

$$\tilde{\mathbf{E}}(\mathbf{r}, t) = \tilde{\mathbf{E}}_0(x, y)e^{i(kz - \omega t)} = \tilde{\mathbf{E}}_0(x, y)e^{i\varphi(z, t)}$$

$$\tilde{\mathbf{B}}(\mathbf{r}, t) = \tilde{\mathbf{B}}_0(x, y)e^{i(kz - \omega t)} = \tilde{\mathbf{B}}_0(x, y)e^{i\varphi(z, t)}$$

A **velocidade de fase** corresponde àquela com que um ponto de fase constante se move ao longo do eixo z:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} = 0 = k \frac{dz}{dt} - \omega \implies v_\varphi = \frac{\omega}{k} = \frac{c}{\sqrt{1 - \left(\frac{\omega_{mn}}{\omega}\right)^2}} > c$$

# Velocidade de fase x Velocidade de grupo

$$\tilde{\mathbf{E}}(\mathbf{r}, t) = \tilde{\mathbf{E}}_0(x, y)e^{i(kz - \omega t)} = \tilde{\mathbf{E}}_0(x, y)e^{i\varphi(z, t)}$$

$$\tilde{\mathbf{B}}(\mathbf{r}, t) = \tilde{\mathbf{B}}_0(x, y)e^{i(kz - \omega t)} = \tilde{\mathbf{B}}_0(x, y)e^{i\varphi(z, t)}$$

A **velocidade de fase** corresponde àquela com que um ponto de fase constante se move ao longo do eixo z:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} = 0 = k \frac{dz}{dt} - \omega \implies v_\varphi = \frac{\omega}{k} = \frac{c}{\sqrt{1 - \left(\frac{\omega_{mn}}{\omega}\right)^2}} > c$$

Já a **velocidade de grupo**:

$$v_g = \frac{d\omega}{dk}$$



# Velocidade de fase x Velocidade de grupo

$$\tilde{\mathbf{E}}(\mathbf{r}, t) = \tilde{\mathbf{E}}_0(x, y)e^{i(kz - \omega t)} = \tilde{\mathbf{E}}_0(x, y)e^{i\varphi(z, t)}$$

$$\tilde{\mathbf{B}}(\mathbf{r}, t) = \tilde{\mathbf{B}}_0(x, y)e^{i(kz - \omega t)} = \tilde{\mathbf{B}}_0(x, y)e^{i\varphi(z, t)}$$

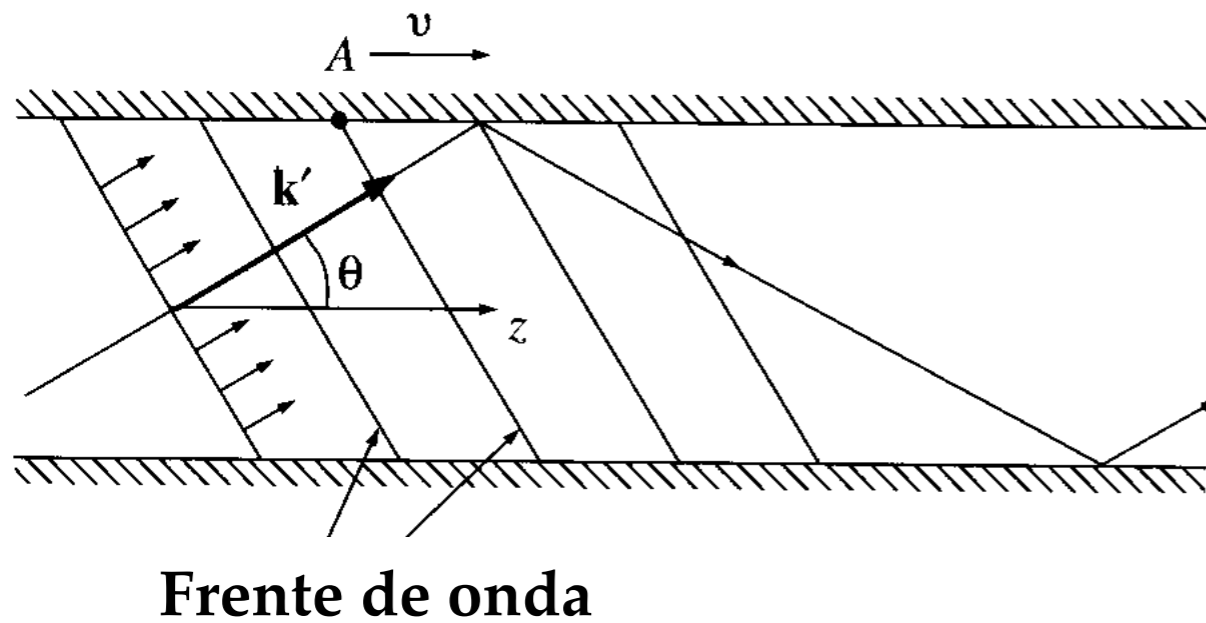
A **velocidade de fase** corresponde àquela com que um ponto de fase constante se move ao longo do eixo z:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} = 0 = k \frac{dz}{dt} - \omega \implies v_\varphi = \frac{\omega}{k} = \frac{c}{\sqrt{1 - \left(\frac{\omega_{mn}}{\omega}\right)^2}} > c$$

Já a **velocidade de grupo**:

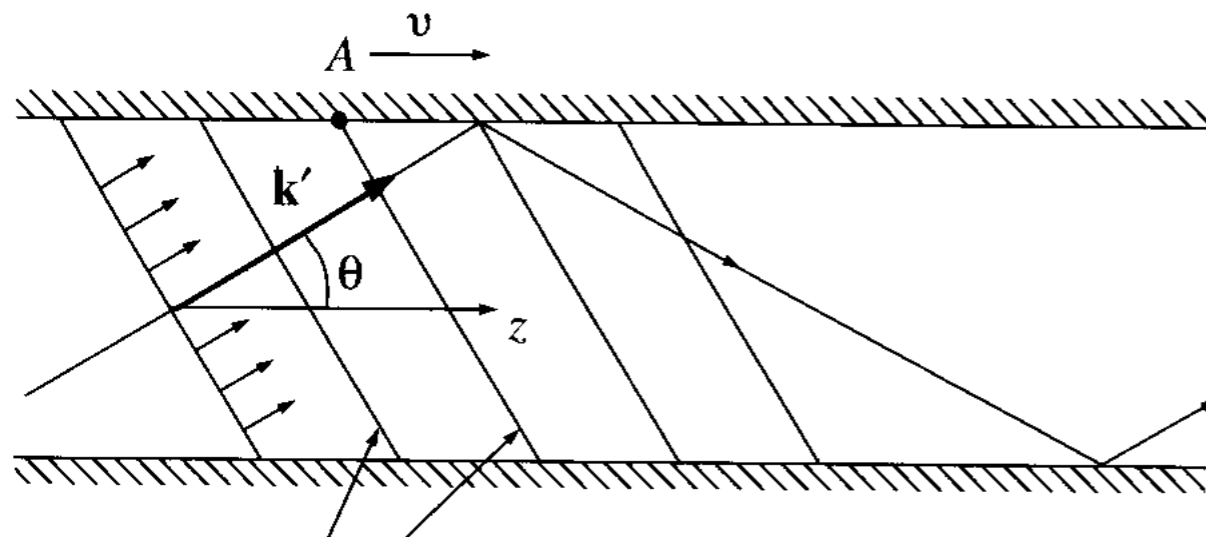
$$v_g = \frac{d\omega}{dk} = \frac{1}{dk/d\omega} = c \sqrt{1 - \left(\frac{\omega_{mn}}{\omega}\right)^2} < c$$

# Interpretação geométrica



Onda plana se propagando ao longo de uma direção que faz um ângulo  $\theta$  com o eixo  $z$

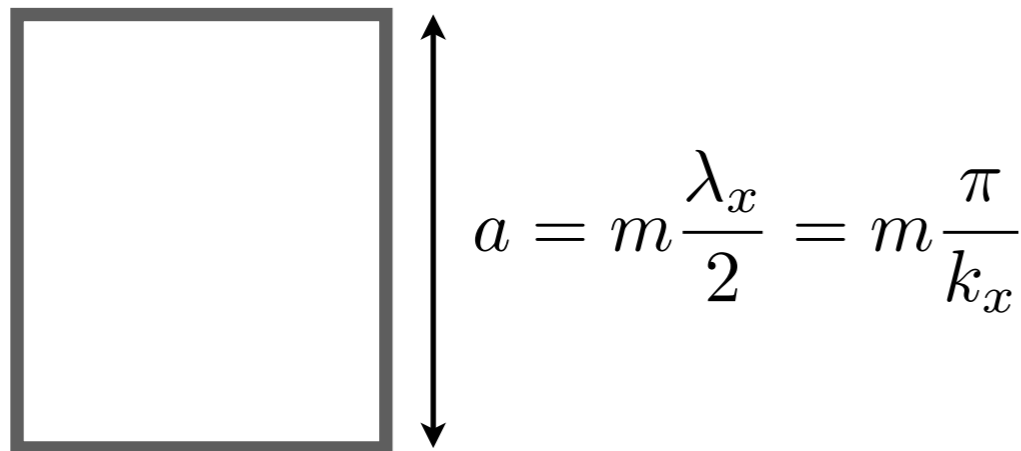
# Interpretação geométrica



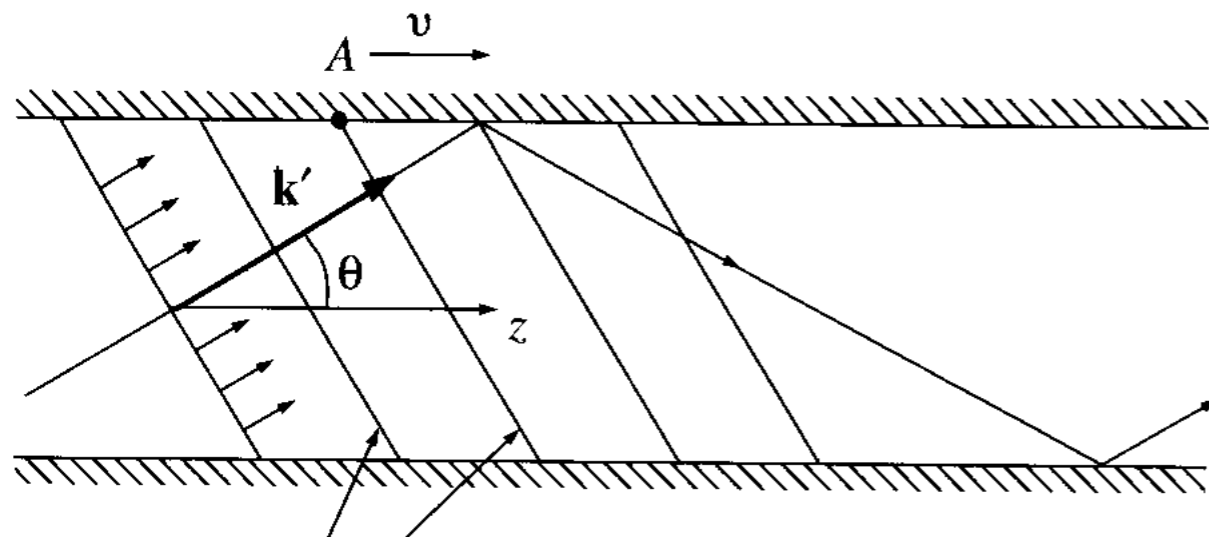
Frente de onda

Onda plana se propagando ao longo de uma direção que faz um ângulo  $\theta$  com o eixo  $z$

As reflexões nas paredes perfeitamente condutoras devem dar origem a ondas estacionárias no plano transversal ao eixo do guia



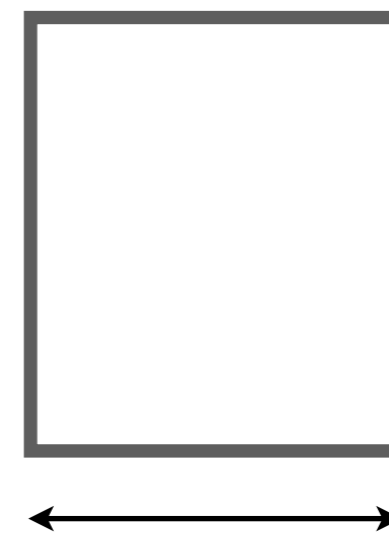
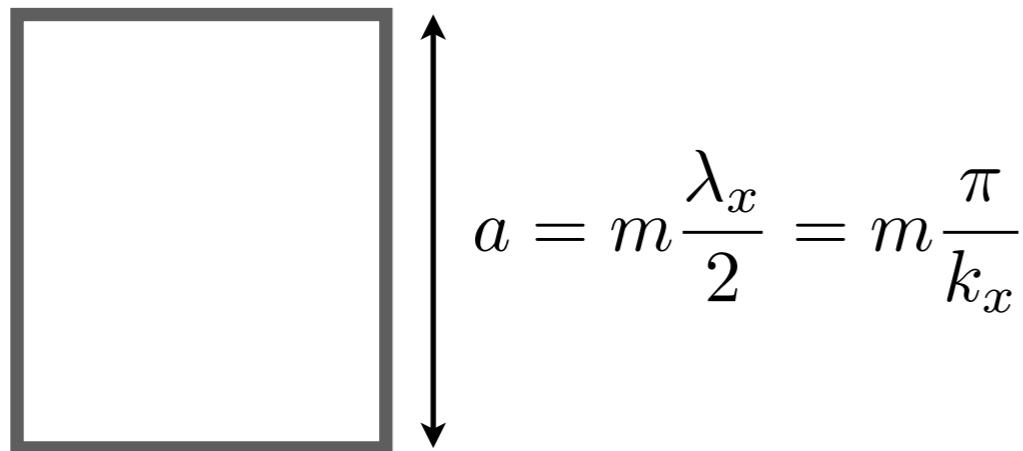
# Interpretação geométrica



Frente de onda

Onda plana se propagando ao longo de uma direção que faz um ângulo  $\theta$  com o eixo z

As reflexões nas paredes perfeitamente condutoras devem dar origem a ondas estacionárias no plano transversal ao eixo do guia



$$b = n \frac{\lambda_y}{2} = n \frac{\pi}{k_y}$$

Nessas condições, o vetor de onda é dado por

$$\mathbf{k}' = \frac{m\pi}{a} \hat{\mathbf{x}} + \frac{n\pi}{b} \hat{\mathbf{y}} + k \hat{\mathbf{z}}$$

Nessas condições, o vetor de onda é dado por

$$\mathbf{k}' = \frac{m\pi}{a} \hat{\mathbf{x}} + \frac{n\pi}{b} \hat{\mathbf{y}} + k \hat{\mathbf{z}}$$

Somente algumas inclinações  $\theta$  permitem que tais números de onda apareçam. Esses ângulos são precisamente dados por

$$\cos \theta = \frac{k}{|\mathbf{k}'|}$$

Nessas condições, o vetor de onda é dado por

$$\mathbf{k}' = \frac{m\pi}{a} \hat{\mathbf{x}} + \frac{n\pi}{b} \hat{\mathbf{y}} + k \hat{\mathbf{z}}$$

Somente algumas inclinações  $\theta$  permitem que tais números de onda apareçam. Esses ângulos são precisamente dados por

$$\begin{aligned} \cos \theta &= \frac{k}{|\mathbf{k}'|} \\ &= \frac{k}{\frac{1}{c} \sqrt{\omega_{mn}^2 + (kc)^2}} \end{aligned}$$

Nessas condições, o vetor de onda é dado por

$$\mathbf{k}' = \frac{m\pi}{a} \hat{\mathbf{x}} + \frac{n\pi}{b} \hat{\mathbf{y}} + k \hat{\mathbf{z}}$$

Somente algumas inclinações  $\theta$  permitem que tais números de onda apareçam. Esses ângulos são precisamente dados por

$$\begin{aligned} \cos \theta &= \frac{k}{|\mathbf{k}'|} \\ &= \frac{k}{\frac{1}{c} \sqrt{\omega_{mn}^2 + (kc)^2}} \\ &= \frac{kc}{\omega} = \frac{c}{\omega/k} = \frac{c}{v_\varphi} \end{aligned}$$



Nessas condições, o vetor de onda é dado por

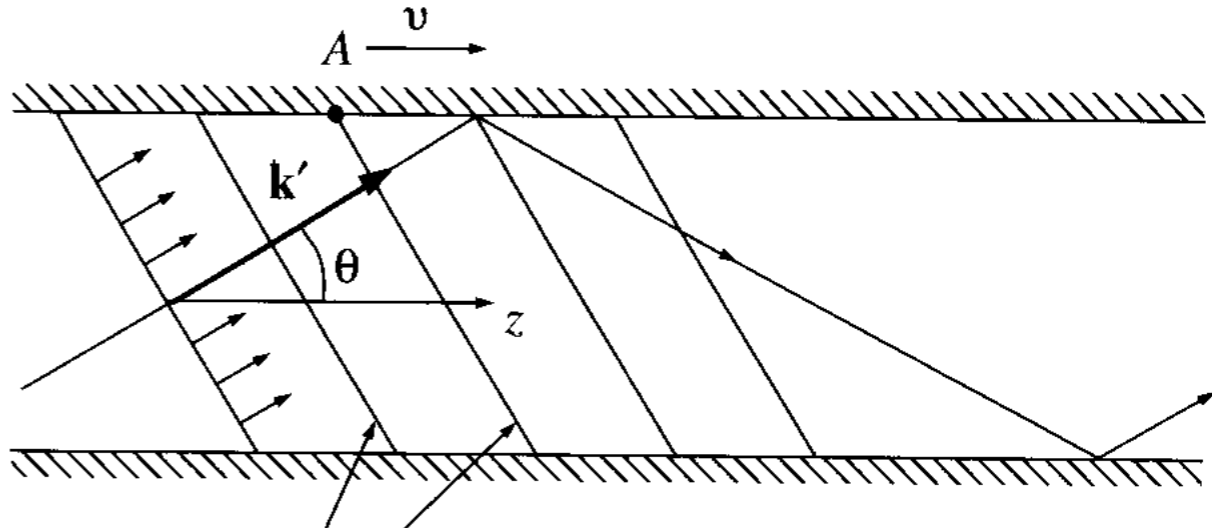
$$\mathbf{k}' = \frac{m\pi}{a} \hat{\mathbf{x}} + \frac{n\pi}{b} \hat{\mathbf{y}} + k \hat{\mathbf{z}}$$

Somente algumas inclinações  $\theta$  permitem que tais números de onda apareçam. Esses ângulos são precisamente dados por

$$\begin{aligned} \cos \theta &= \frac{k}{|\mathbf{k}'|} \\ &= \frac{k}{\frac{1}{c} \sqrt{\omega_{mn}^2 + (kc)^2}} \\ &= \frac{kc}{\omega} = \frac{c}{\omega/k} = \frac{c}{v_\varphi} \\ &= \sqrt{1 - \left(\frac{\omega_{mn}}{\omega}\right)^2} \end{aligned}$$

A velocidade de grupo por então ser vista como aquela de propagação ao longo do eixo z:

$$v_g = c \cos \theta$$



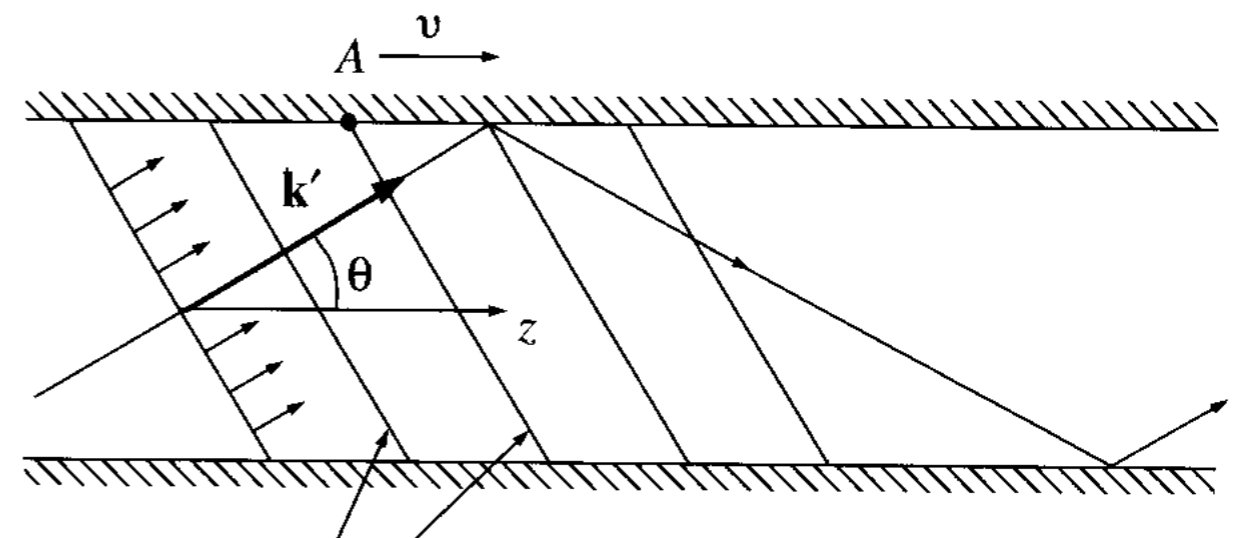
Frente de onda

A velocidade de grupo por então ser vista como aquela de propagação ao longo do eixo z:

$$v_g = c \cos \theta$$

Enquanto a velocidade de fase pode ser vista como aquela de um ponto na interseção entre uma frente de onda e as paredes do guia

$$v_\varphi = \frac{c}{\cos \theta}$$



Frente de onda

# Campo elétrico transversal (modo TE)

$$\tilde{\mathbf{E}}_{\perp} = -\frac{i}{k_c^2} \left( k \nabla_{\perp} \tilde{E}_z - \omega \hat{\mathbf{z}} \times \nabla_{\perp} \tilde{B}_z \right)$$

# Campo elétrico transversal (modo TE)

$$\tilde{\mathbf{E}}_{\perp} = -\frac{i}{k_c^2} \left( k \nabla_{\perp} \tilde{E}_z - \omega \hat{\mathbf{z}} \times \nabla_{\perp} \tilde{B}_z \right)$$

# Campo elétrico transversal (modo TE)

$$\begin{aligned}\tilde{\mathbf{E}}_{\perp} &= -\frac{i}{k_c^2} \left( k \nabla_{\perp} \tilde{E}_z - \omega \hat{\mathbf{z}} \times \nabla_{\perp} \tilde{B}_z \right) \\ &= \frac{i\omega}{k_c^2} \hat{\mathbf{z}} \times \left( \frac{\partial \tilde{B}_z}{\partial x} \hat{\mathbf{x}} + \frac{\partial \tilde{B}_z}{\partial y} \hat{\mathbf{y}} \right)\end{aligned}$$

# Campo elétrico transversal (modo TE)

$$\begin{aligned}\tilde{\mathbf{E}}_{\perp} &= -\frac{i}{k_c^2} \left( k \nabla_{\perp} \tilde{E}_z - \omega \hat{\mathbf{z}} \times \nabla_{\perp} \tilde{B}_z \right) \\ &= \frac{i\omega}{k_c^2} \hat{\mathbf{z}} \times \left( \frac{\partial \tilde{B}_z}{\partial x} \hat{\mathbf{x}} + \frac{\partial \tilde{B}_z}{\partial y} \hat{\mathbf{y}} \right) = \tilde{E}_x \hat{\mathbf{x}} + \tilde{E}_y \hat{\mathbf{y}}\end{aligned}$$

# Campo elétrico transversal (modo TE)

$$\begin{aligned}\tilde{\mathbf{E}}_{\perp} &= -\frac{i}{k_c^2} \left( k \nabla_{\perp} \tilde{E}_z - \omega \hat{\mathbf{z}} \times \nabla_{\perp} \tilde{B}_z \right) \\ &= \frac{i\omega}{k_c^2} \hat{\mathbf{z}} \times \left( \frac{\partial \tilde{B}_z}{\partial x} \hat{\mathbf{x}} + \frac{\partial \tilde{B}_z}{\partial y} \hat{\mathbf{y}} \right) = \tilde{E}_x \hat{\mathbf{x}} + \tilde{E}_y \hat{\mathbf{y}}\end{aligned}$$

$$\tilde{\mathbf{B}}_z(x, y, t) = B_0 \cos\left(\frac{m\pi}{a}x\right) \cos\left(\frac{n\pi}{b}y\right) e^{i(kz - \omega t + \delta)}$$



# Campo elétrico transversal (modo TE)

$$\begin{aligned}\tilde{\mathbf{E}}_{\perp} &= -\frac{i}{k_c^2} \left( k \nabla_{\perp} \tilde{E}_z - \omega \hat{\mathbf{z}} \times \nabla_{\perp} \tilde{B}_z \right) \\ &= \frac{i\omega}{k_c^2} \hat{\mathbf{z}} \times \left( \frac{\partial \tilde{B}_z}{\partial x} \hat{\mathbf{x}} + \frac{\partial \tilde{B}_z}{\partial y} \hat{\mathbf{y}} \right) = \tilde{E}_x \hat{\mathbf{x}} + \tilde{E}_y \hat{\mathbf{y}}\end{aligned}$$

$$\tilde{\mathbf{B}}_z(x, y, t) = B_0 \cos\left(\frac{m\pi}{a}x\right) \cos\left(\frac{n\pi}{b}y\right) e^{i(kz - \omega t + \delta)}$$

$$E_x = \text{Re}(\tilde{E}_x)$$

# Campo elétrico transversal (modo TE)

$$\begin{aligned}\tilde{\mathbf{E}}_{\perp} &= -\frac{i}{k_c^2} \left( k \nabla_{\perp} \tilde{E}_z - \omega \hat{\mathbf{z}} \times \nabla_{\perp} \tilde{B}_z \right) \\ &= \frac{i\omega}{k_c^2} \hat{\mathbf{z}} \times \left( \frac{\partial \tilde{B}_z}{\partial x} \hat{\mathbf{x}} + \frac{\partial \tilde{B}_z}{\partial y} \hat{\mathbf{y}} \right) = \tilde{E}_x \hat{\mathbf{x}} + \tilde{E}_y \hat{\mathbf{y}}\end{aligned}$$

$$\tilde{\mathbf{B}}_z(x, y, t) = B_0 \cos\left(\frac{m\pi}{a}x\right) \cos\left(\frac{n\pi}{b}y\right) e^{i(kz - \omega t + \delta)}$$

$$E_x = \text{Re}(\tilde{E}_x) = \text{Re}\left(-i \frac{\omega}{k_c^2} \frac{\partial \tilde{B}_z}{\partial y}\right)$$

# Campo elétrico transversal (modo TE)

$$\begin{aligned}\tilde{\mathbf{E}}_{\perp} &= -\frac{i}{k_c^2} \left( k \nabla_{\perp} \tilde{E}_z - \omega \hat{\mathbf{z}} \times \nabla_{\perp} \tilde{B}_z \right) \\ &= \frac{i\omega}{k_c^2} \hat{\mathbf{z}} \times \left( \frac{\partial \tilde{B}_z}{\partial x} \hat{\mathbf{x}} + \frac{\partial \tilde{B}_z}{\partial y} \hat{\mathbf{y}} \right) = \tilde{E}_x \hat{\mathbf{x}} + \tilde{E}_y \hat{\mathbf{y}}\end{aligned}$$

$$\tilde{\mathbf{B}}_z(x, y, t) = B_0 \cos\left(\frac{m\pi}{a}x\right) \cos\left(\frac{n\pi}{b}y\right) e^{i(kz - \omega t + \delta)}$$

$$E_x = \operatorname{Re}(\tilde{E}_x) = \operatorname{Re}\left(-i \frac{\omega}{k_c^2} \frac{\partial \tilde{B}_z}{\partial y}\right) = \frac{\omega}{k_c^2} \operatorname{Im}\left(\frac{\partial \tilde{B}_z}{\partial y}\right)$$

# Campo elétrico transversal (modo TE)

$$\begin{aligned}\tilde{\mathbf{E}}_{\perp} &= -\frac{i}{k_c^2} \left( k \nabla_{\perp} \tilde{E}_z - \omega \hat{\mathbf{z}} \times \nabla_{\perp} \tilde{B}_z \right) \\ &= \frac{i\omega}{k_c^2} \hat{\mathbf{z}} \times \left( \frac{\partial \tilde{B}_z}{\partial x} \hat{\mathbf{x}} + \frac{\partial \tilde{B}_z}{\partial y} \hat{\mathbf{y}} \right) = \tilde{E}_x \hat{\mathbf{x}} + \tilde{E}_y \hat{\mathbf{y}}\end{aligned}$$

$$\tilde{\mathbf{B}}_z(x, y, t) = B_0 \cos\left(\frac{m\pi}{a}x\right) \cos\left(\frac{n\pi}{b}y\right) e^{i(kz - \omega t + \delta)}$$

$$\begin{aligned}E_x &= \text{Re}(\tilde{E}_x) = \text{Re}\left(-i \frac{\omega}{k_c^2} \frac{\partial \tilde{B}_z}{\partial y}\right) = \frac{\omega}{k_c^2} \text{Im}\left(\frac{\partial \tilde{B}_z}{\partial y}\right) \\ &= -\frac{\omega}{k_c^2} \frac{n\pi}{b} B_0 \cos\left(\frac{m\pi}{a}x\right) \sin\left(\frac{n\pi}{b}y\right) \sin(kz - \omega t + \delta)\end{aligned}$$

# Campo elétrico transversal (modo TE)

$$\begin{aligned}\tilde{\mathbf{E}}_{\perp} &= -\frac{i}{k_c^2} \left( k \nabla_{\perp} \tilde{E}_z - \omega \hat{\mathbf{z}} \times \nabla_{\perp} \tilde{B}_z \right) \\ &= \frac{i\omega}{k_c^2} \hat{\mathbf{z}} \times \left( \frac{\partial \tilde{B}_z}{\partial x} \hat{\mathbf{x}} + \frac{\partial \tilde{B}_z}{\partial y} \hat{\mathbf{y}} \right) = \tilde{E}_x \hat{\mathbf{x}} + \tilde{E}_y \hat{\mathbf{y}}\end{aligned}$$

$$\tilde{\mathbf{B}}_z(x, y, t) = B_0 \cos\left(\frac{m\pi}{a}x\right) \cos\left(\frac{n\pi}{b}y\right) e^{i(kz - \omega t + \delta)}$$

$$\begin{aligned}E_x &= \text{Re}(\tilde{E}_x) = \text{Re}\left(-i \frac{\omega}{k_c^2} \frac{\partial \tilde{B}_z}{\partial y}\right) = \frac{\omega}{k_c^2} \text{Im}\left(\frac{\partial \tilde{B}_z}{\partial y}\right) \\ &= -\frac{\omega}{k_c^2} \frac{n\pi}{b} B_0 \cos\left(\frac{m\pi}{a}x\right) \sin\left(\frac{n\pi}{b}y\right) \sin(kz - \omega t + \delta)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}E_y &= \text{Re}(\tilde{E}_y) = \text{Re}\left(i \frac{\omega}{k_c^2} \frac{\partial \tilde{B}_z}{\partial x}\right) = -\frac{\omega}{k_c^2} \text{Im}\left(\frac{\partial \tilde{B}_z}{\partial x}\right) \\ &= \frac{\omega}{k_c^2} \frac{m\pi}{a} B_0 \sin\left(\frac{m\pi}{a}x\right) \cos\left(\frac{n\pi}{b}y\right) \sin(kz - \omega t + \delta)\end{aligned}$$

# Campo elétrico e carga induzida

Para o modo TE<sub>10</sub>, temos então apenas campo elétrico na direção y:

$$E_x = 0 \quad E_y = \frac{\omega}{k_c^2} \frac{\pi}{a} B_0 \sin\left(\frac{\pi x}{a}\right) \sin(kz - \omega t + \delta) = \frac{\sigma f}{\epsilon_0}$$

# Campo elétrico e carga induzida

Para o modo TE<sub>10</sub>, temos então apenas campo elétrico na direção y:

$$E_x = 0 \quad E_y = \frac{\omega}{k_c^2} \frac{\pi}{a} B_0 \sin\left(\frac{\pi x}{a}\right) \sin(kz - \omega t + \delta) = \frac{\sigma_f}{\epsilon_0}$$

Na última passagem, usamos as condições de contorno:

$$\begin{aligned} \epsilon_1 E_1^\perp - \epsilon_2 E_2^\perp &= \sigma_f \\ B_1^\perp &= B_2^\perp \\ \mathbf{E}_1^\parallel &= \mathbf{E}_2^\parallel \\ \frac{1}{\mu_1} \mathbf{B}_1^\parallel - \frac{1}{\mu_2} \mathbf{B}_2^\parallel &= \mathbf{K}_f \times \hat{\mathbf{n}} \end{aligned}$$

# Campo elétrico e carga induzida

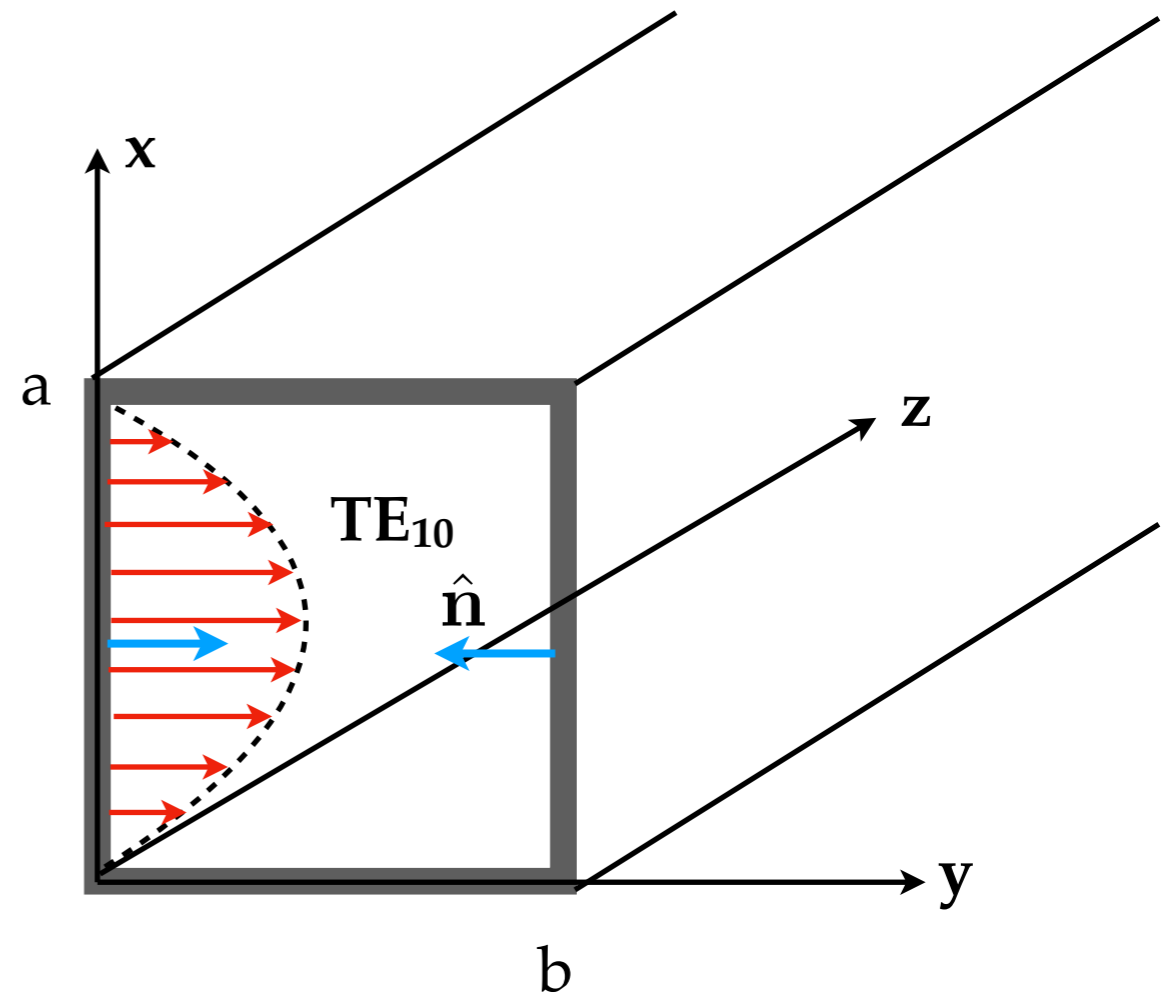
Para o modo  $TE_{10}$ , temos então apenas campo elétrico na direção  $y$ :

$$E_x = 0 \quad E_y = \frac{\omega}{k_c^2} \frac{\pi}{a} B_0 \sin\left(\frac{\pi x}{a}\right) \sin(kz - \omega t + \delta) = \frac{\sigma_f}{\epsilon_0}$$

Na última passagem, usamos as condições de contorno:

$$\begin{aligned} \epsilon_1 E_1^\perp - \epsilon_2 E_2^\perp &= \sigma_f \\ B_1^\perp &= B_2^\perp \\ \mathbf{E}_1^\parallel &= \mathbf{E}_2^\parallel \\ \frac{1}{\mu_1} \mathbf{B}_1^\parallel - \frac{1}{\mu_2} \mathbf{B}_2^\parallel &= \mathbf{K}_f \times \hat{\mathbf{n}} \end{aligned}$$

**Campo elétrico**





# Campo elétrico e carga induzida

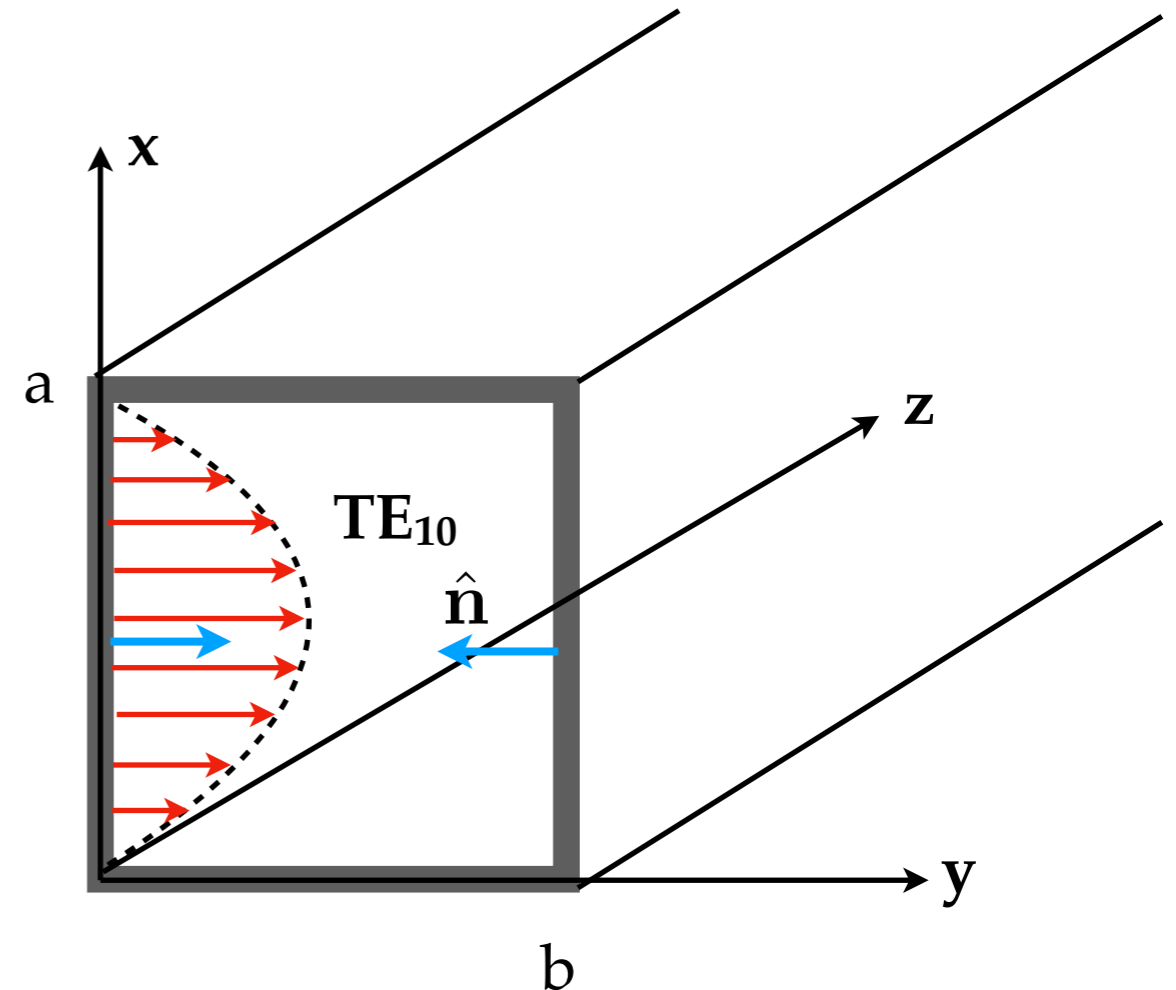
Para o modo  $TE_{10}$ , temos então apenas campo elétrico na direção  $y$ :

$$E_x = 0 \quad E_y = \frac{\omega}{k_c^2} \frac{\pi}{a} B_0 \sin\left(\frac{\pi x}{a}\right) \sin(kz - \omega t + \delta) = \frac{\sigma_f}{\epsilon_0}$$

Na última passagem, usamos as condições de contorno:

$$\begin{aligned} \epsilon_1 E_1^\perp - \epsilon_2 E_2^\perp &= \sigma_f \\ B_1^\perp &= B_2^\perp \\ \mathbf{E}_1^\parallel &= \mathbf{E}_2^\parallel \\ \frac{1}{\mu_1} \mathbf{B}_1^\parallel - \frac{1}{\mu_2} \mathbf{B}_2^\parallel &= \mathbf{K}_f \times \hat{\mathbf{n}} \end{aligned}$$

Campo elétrico



Atenção à convenção para a normal: ela vai do meio 2 (parede) para o meio 1 (interior). O sinal da densidade de carga depende dessa convenção.

# Campo magnético e corrente superficial

$$\tilde{\mathbf{B}}_{\perp} = -\frac{ik}{k_c^2} \left( \frac{\partial \tilde{B}_z}{\partial x} \hat{\mathbf{x}} + \frac{\partial \tilde{B}_z}{\partial y} \hat{\mathbf{y}} \right) = \tilde{B}_x \hat{\mathbf{x}} + \tilde{B}_y \hat{\mathbf{y}}$$

# Campo magnético e corrente superficial

$$\tilde{\mathbf{B}}_{\perp} = -\frac{ik}{k_c^2} \left( \frac{\partial \tilde{B}_z}{\partial x} \hat{\mathbf{x}} + \frac{\partial \tilde{B}_z}{\partial y} \hat{\mathbf{y}} \right) = \tilde{B}_x \hat{\mathbf{x}} + \tilde{B}_y \hat{\mathbf{y}}$$

$$B_x = \text{Re}(\tilde{B}_x) = \frac{k}{k_c^2} \text{Im} \left( \frac{\partial \tilde{B}_z}{\partial x} \right)$$

# Campo magnético e corrente superficial

$$\tilde{\mathbf{B}}_{\perp} = -\frac{ik}{k_c^2} \left( \frac{\partial \tilde{B}_z}{\partial x} \hat{\mathbf{x}} + \frac{\partial \tilde{B}_z}{\partial y} \hat{\mathbf{y}} \right) = \tilde{B}_x \hat{\mathbf{x}} + \tilde{B}_y \hat{\mathbf{y}}$$

$$B_x = \text{Re}(\tilde{B}_x) = \frac{k}{k_c^2} \text{Im} \left( \frac{\partial \tilde{B}_z}{\partial x} \right) = -\frac{k}{k_c^2} \frac{m\pi}{a} \sin \left( \frac{m\pi}{a} x \right) \cos \left( \frac{n\pi}{b} y \right) \sin(kz - \omega t + \delta)$$

# Campo magnético e corrente superficial

$$\tilde{\mathbf{B}}_{\perp} = -\frac{ik}{k_c^2} \left( \frac{\partial \tilde{B}_z}{\partial x} \hat{\mathbf{x}} + \frac{\partial \tilde{B}_z}{\partial y} \hat{\mathbf{y}} \right) = \tilde{B}_x \hat{\mathbf{x}} + \tilde{B}_y \hat{\mathbf{y}}$$

$$B_x = \text{Re}(\tilde{B}_x) = \frac{k}{k_c^2} \text{Im} \left( \frac{\partial \tilde{B}_z}{\partial x} \right) = -\frac{k}{k_c^2} \frac{m\pi}{a} \sin \left( \frac{m\pi}{a} x \right) \cos \left( \frac{n\pi}{b} y \right) \sin(kz - \omega t + \delta)$$

$$B_y = \text{Re}(\tilde{B}_y) = \frac{k}{k_c^2} \text{Im} \left( \frac{\partial \tilde{B}_z}{\partial y} \right)$$

# Campo magnético e corrente superficial

$$\tilde{\mathbf{B}}_{\perp} = -\frac{ik}{k_c^2} \left( \frac{\partial \tilde{B}_z}{\partial x} \hat{\mathbf{x}} + \frac{\partial \tilde{B}_z}{\partial y} \hat{\mathbf{y}} \right) = \tilde{B}_x \hat{\mathbf{x}} + \tilde{B}_y \hat{\mathbf{y}}$$

$$B_x = \text{Re}(\tilde{B}_x) = \frac{k}{k_c^2} \text{Im} \left( \frac{\partial \tilde{B}_z}{\partial x} \right) = -\frac{k}{k_c^2} \frac{m\pi}{a} \sin \left( \frac{m\pi}{a} x \right) \cos \left( \frac{n\pi}{b} y \right) \sin(kz - \omega t + \delta)$$

$$B_y = \text{Re}(\tilde{B}_y) = \frac{k}{k_c^2} \text{Im} \left( \frac{\partial \tilde{B}_z}{\partial y} \right) = -\frac{k}{k_c^2} \frac{n\pi}{b} \cos \left( \frac{m\pi}{a} x \right) \sin \left( \frac{n\pi}{b} y \right) \sin(kz - \omega t + \delta)$$

# Campo magnético e corrente superficial

$$\tilde{\mathbf{B}}_{\perp} = -\frac{ik}{k_c^2} \left( \frac{\partial \tilde{B}_z}{\partial x} \hat{\mathbf{x}} + \frac{\partial \tilde{B}_z}{\partial y} \hat{\mathbf{y}} \right) = \tilde{B}_x \hat{\mathbf{x}} + \tilde{B}_y \hat{\mathbf{y}}$$

$$B_x = \text{Re}(\tilde{B}_x) = \frac{k}{k_c^2} \text{Im} \left( \frac{\partial \tilde{B}_z}{\partial x} \right) = -\frac{k}{k_c^2} \frac{m\pi}{a} \sin \left( \frac{m\pi}{a} x \right) \cos \left( \frac{n\pi}{b} y \right) \sin(kz - \omega t + \delta)$$

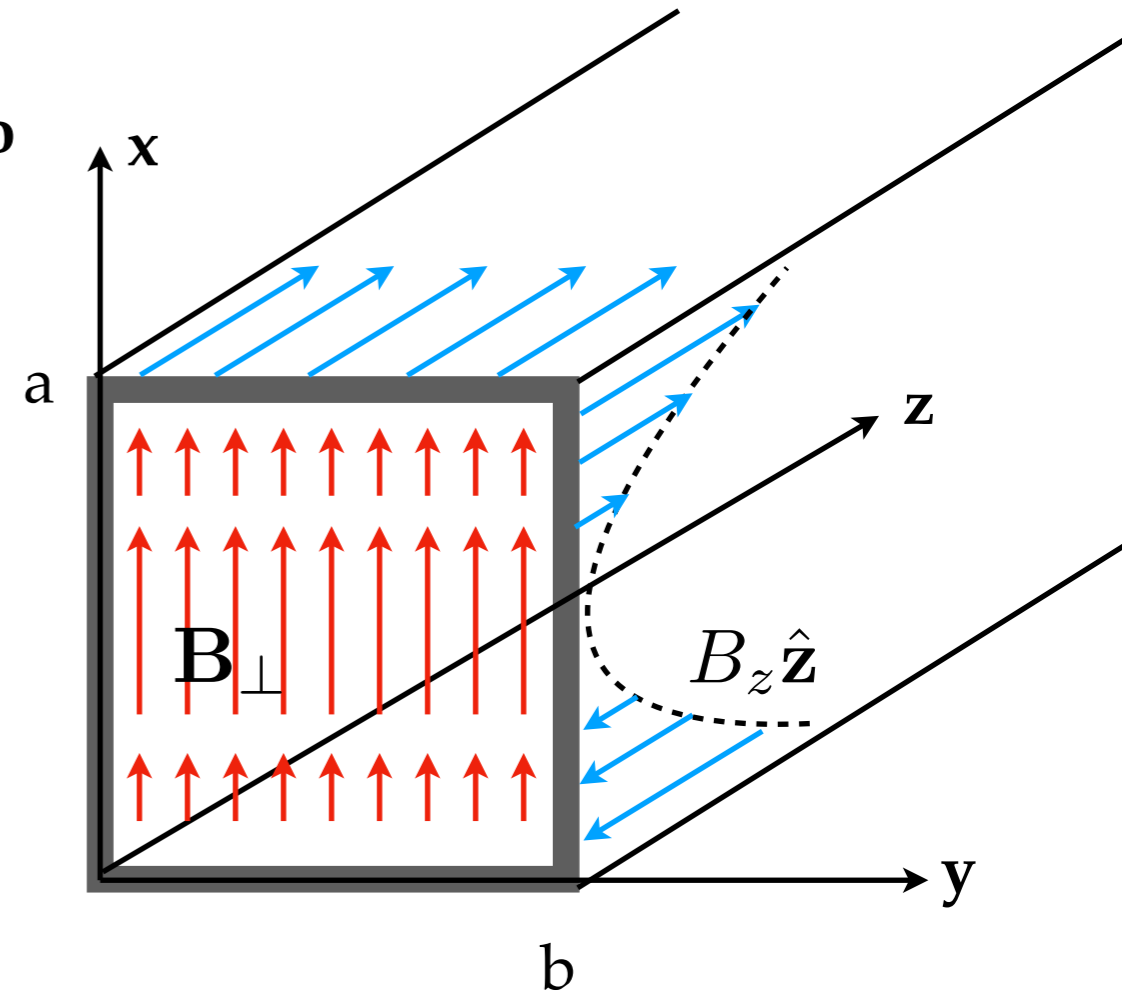
$$B_y = \text{Re}(\tilde{B}_y) = \frac{k}{k_c^2} \text{Im} \left( \frac{\partial \tilde{B}_z}{\partial y} \right) = -\frac{k}{k_c^2} \frac{n\pi}{b} \cos \left( \frac{m\pi}{a} x \right) \sin \left( \frac{n\pi}{b} y \right) \sin(kz - \omega t + \delta)$$

Para o modo TE<sub>10</sub>, temos então apenas campo magnético nas direções x e z:

$$B_x = -\frac{k}{k_c^2} \frac{\pi}{a} B_0 \sin \left( \frac{\pi x}{a} \right) \sin(kz - \omega t + \delta)$$

$$B_y = 0$$

$$B_z = B_0 \cos \left( \frac{\pi x}{a} \right) \cos(kz - \omega t + \delta)$$



# Campo magnético e corrente superficial

A condição de contorno:

$$\frac{1}{\mu_0} \mathbf{B}_{//} = \mathbf{K}_f \times \hat{\mathbf{n}}$$



# Campo magnético e corrente superficial

A condição de contorno:

$$\frac{1}{\mu_0} \mathbf{B}_{//} = \mathbf{K}_f \times \hat{\mathbf{n}}$$

aplicada à parede da direita ( $y=b$ ), por exemplo, implica:

$$\hat{\mathbf{n}} \times (\mathbf{K}_f \times \hat{\mathbf{n}}) = \frac{1}{\mu_0} \hat{\mathbf{n}} \times \mathbf{B}_{//}$$

# Campo magnético e corrente superficial

A condição de contorno:

$$\frac{1}{\mu_0} \mathbf{B}_{//} = \mathbf{K}_f \times \hat{\mathbf{n}}$$

aplicada à parede da direita ( $y=b$ ), por exemplo, implica:

$$\overbrace{\hat{\mathbf{n}} \times (\mathbf{K}_f \times \hat{\mathbf{n}})}^{=\mathbf{K}_f} = \frac{1}{\mu_0} \hat{\mathbf{n}} \times \mathbf{B}_{//}$$

# Campo magnético e corrente superficial

A condição de contorno:

$$\frac{1}{\mu_0} \mathbf{B}_{//} = \mathbf{K}_f \times \hat{\mathbf{n}}$$

aplicada à parede da direita ( $y=b$ ), por exemplo, implica:

$$\overbrace{\hat{\mathbf{n}} \times (\mathbf{K}_f \times \hat{\mathbf{n}})}^{=\mathbf{K}_f} = \frac{1}{\mu_0} \hat{\mathbf{n}} \times \mathbf{B}_{//}$$
$$\mathbf{K}_f = \frac{1}{\mu_0} (-\hat{\mathbf{y}}) \times (B_x \hat{\mathbf{x}} + B_z \hat{\mathbf{z}})$$

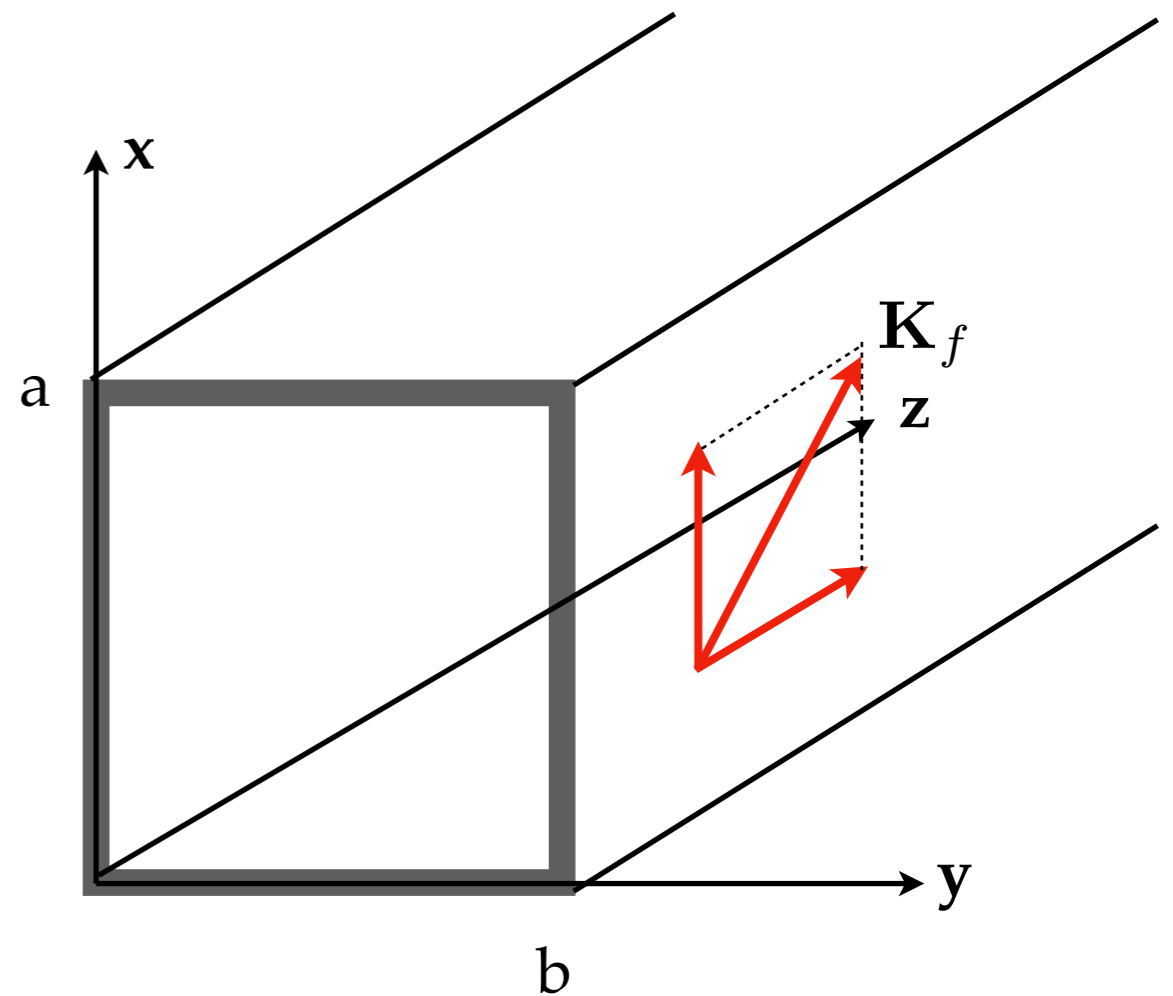
# Campo magnético e corrente superficial

A condição de contorno:

$$\frac{1}{\mu_0} \mathbf{B}_{//} = \mathbf{K}_f \times \hat{\mathbf{n}}$$

aplicada à parede da direita ( $y=b$ ), por exemplo, implica:

$$\begin{aligned} \overbrace{\hat{\mathbf{n}} \times (\mathbf{K}_f \times \hat{\mathbf{n}})}^{=\mathbf{K}_f} &= \frac{1}{\mu_0} \hat{\mathbf{n}} \times \mathbf{B}_{//} \\ \mathbf{K}_f &= \frac{1}{\mu_0} (-\hat{\mathbf{y}}) \times (B_x \hat{\mathbf{x}} + B_z \hat{\mathbf{z}}) \\ &= K_{fx} \hat{\mathbf{x}} + K_{fz} \hat{\mathbf{z}} \end{aligned}$$



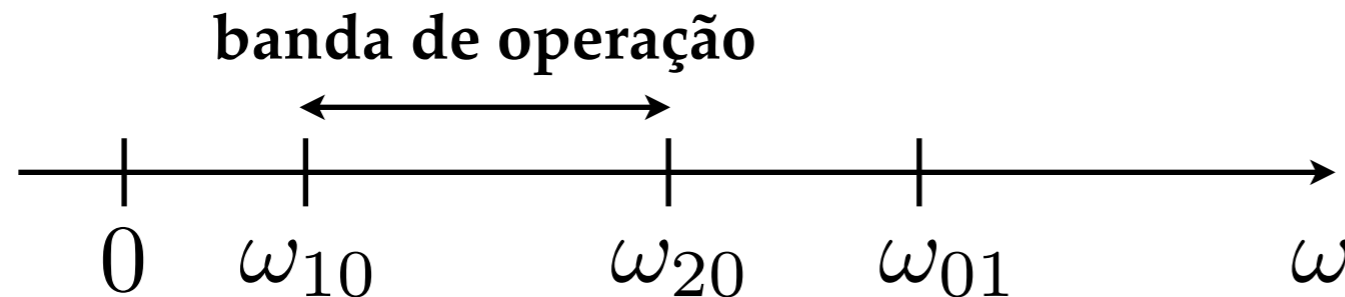
# Banda de operação

Se arranjarmos as frequências de corte dos modos de um guia de onda em ordem crescente  $\omega_1 < \omega_2 < \omega_3 < \dots$ , então para assegurar que apenas um modo normal do guia se propague, a frequência deve estar restrita ao intervalo  $\omega_1 < \omega < \omega_2$ , de modo que apenas o modo de menor frequência se propague. Este intervalo define a largura de banda de operação do guia.

# Banda de operação

Se arranjarmos as frequências de corte dos modos de um guia de onda em ordem crescente  $\omega_1 < \omega_2 < \omega_3 < \dots$ , então para assegurar que apenas um modo normal do guia se propague, a frequência deve estar restrita ao intervalo  $\omega_1 < \omega < \omega_2$ , de modo que apenas o modo de menor frequência se propague. Este intervalo define a largura de banda de operação do guia.

Exemplo para guia retangular:



$$(b < a/2)$$

$$\omega_{10} = \frac{c\pi}{a} \quad \omega_{20} = 2\frac{c\pi}{a} \quad \omega_{01} = \frac{c\pi}{b}$$

# Potência transportada

Tomemos novamente o caso do modo TE<sub>10</sub>

$$E_x = 0$$

$$E_y = \frac{\omega}{k_c^2} \frac{\pi}{a} B_0 \sin\left(\frac{\pi x}{a}\right) \sin(kz - \omega t + \delta)$$

$$E_z = 0$$

$$B_x = -\frac{k}{k_c^2} \frac{\pi}{a} B_0 \sin\left(\frac{\pi x}{a}\right) \sin(kz - \omega t + \delta)$$

$$B_y = 0$$

$$B_z = B_0 \cos\left(\frac{\pi x}{a}\right) \cos(kz - \omega t + \delta)$$

# Potência transportada

Tomemos novamente o caso do modo TE<sub>10</sub>

$$\begin{aligned} E_x &= 0 & B_x &= -\frac{k}{k_c^2} \frac{\pi}{a} B_0 \sin\left(\frac{\pi x}{a}\right) \sin(kz - \omega t + \delta) \\ E_y &= \frac{\omega}{k_c^2} \frac{\pi}{a} B_0 \sin\left(\frac{\pi x}{a}\right) \sin(kz - \omega t + \delta) & B_y &= 0 \\ E_z &= 0 & B_z &= B_0 \cos\left(\frac{\pi x}{a}\right) \cos(kz - \omega t + \delta) \end{aligned}$$

O vetor de Poynting é então:

$$\mathbf{S} = \frac{1}{\mu_0} \mathbf{E} \times \mathbf{B}$$



# Potência transportada

Tomemos novamente o caso do modo TE<sub>10</sub>

$$\begin{aligned} E_x &= 0 & B_x &= -\frac{k}{k_c^2} \frac{\pi}{a} B_0 \sin\left(\frac{\pi x}{a}\right) \sin(kz - \omega t + \delta) \\ E_y &= \frac{\omega}{k_c^2} \frac{\pi}{a} B_0 \sin\left(\frac{\pi x}{a}\right) \sin(kz - \omega t + \delta) & B_y &= 0 \\ E_z &= 0 & B_z &= B_0 \cos\left(\frac{\pi x}{a}\right) \cos(kz - \omega t + \delta) \end{aligned}$$

O vetor de Poynting é então:

$$\mathbf{S} = \frac{1}{\mu_0} \mathbf{E} \times \mathbf{B} = \frac{1}{\mu_0} (-E_y B_x \hat{\mathbf{z}} + E_y B_z \hat{\mathbf{x}})$$



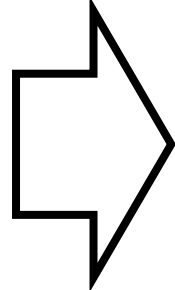
Energia fluindo nas  
direções x e z

# Potência transportada

Tomemos novamente o caso do modo TE<sub>10</sub>

$$\begin{aligned} E_x &= 0 & B_x &= -\frac{k}{k_c^2} \frac{\pi}{a} B_0 \sin\left(\frac{\pi x}{a}\right) \sin(kz - \omega t + \delta) \\ E_y &= \frac{\omega}{k_c^2} \frac{\pi}{a} B_0 \sin\left(\frac{\pi x}{a}\right) \sin(kz - \omega t + \delta) & B_y &= 0 \\ E_z &= 0 & B_z &= B_0 \cos\left(\frac{\pi x}{a}\right) \cos(kz - \omega t + \delta) \end{aligned}$$

O vetor de Poynting é então:

$$\mathbf{S} = \frac{1}{\mu_0} \mathbf{E} \times \mathbf{B} = \frac{1}{\mu_0} (-E_y B_x \hat{\mathbf{z}} + E_y B_z \hat{\mathbf{x}})$$


Energia fluindo nas direções x e z

Para efeitos práticos, o que interessa é a média no tempo do vetor de Poynting:

$$\langle \mathbf{S} \rangle = -\frac{1}{\mu_0} \langle E_y B_x \rangle \hat{\mathbf{z}} + \frac{1}{\mu_0} \langle E_y B_z \rangle \hat{\mathbf{x}}$$

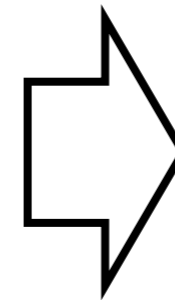
# Potência transportada

Tomemos novamente o caso do modo TE<sub>10</sub>

$$\begin{aligned} E_x &= 0 & B_x &= -\frac{k}{k_c^2} \frac{\pi}{a} B_0 \sin\left(\frac{\pi x}{a}\right) \sin(kz - \omega t + \delta) \\ E_y &= \frac{\omega}{k_c^2} \frac{\pi}{a} B_0 \sin\left(\frac{\pi x}{a}\right) \sin(kz - \omega t + \delta) & B_y &= 0 \\ E_z &= 0 & B_z &= B_0 \cos\left(\frac{\pi x}{a}\right) \cos(kz - \omega t + \delta) \end{aligned}$$

O vetor de Poynting é então:

$$\mathbf{S} = \frac{1}{\mu_0} \mathbf{E} \times \mathbf{B} = \frac{1}{\mu_0} (-E_y B_x \hat{\mathbf{z}} + E_y B_z \hat{\mathbf{x}})$$



Energia fluindo nas direções x e z

Para efeitos práticos, o que interessa é a média no tempo do vetor de Poynting:

$$\langle \mathbf{S} \rangle = -\frac{1}{\mu_0} \langle E_y B_x \rangle \hat{\mathbf{z}} + \frac{1}{\mu_0} \langle E_y B_z \rangle \hat{\mathbf{x}}$$

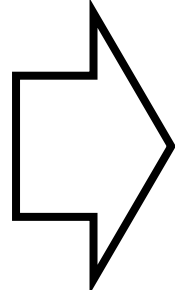
*(Note: In the original image, a red arrow points from the zero above the second term to the term itself, indicating it is zero.)*

# Potência transportada

Tomemos novamente o caso do modo TE<sub>10</sub>

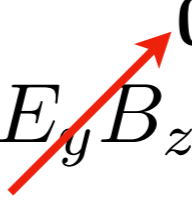
$$\begin{aligned} E_x &= 0 & B_x &= -\frac{k}{k_c^2} \frac{\pi}{a} B_0 \sin\left(\frac{\pi x}{a}\right) \sin(kz - \omega t + \delta) \\ E_y &= \frac{\omega}{k_c^2} \frac{\pi}{a} B_0 \sin\left(\frac{\pi x}{a}\right) \sin(kz - \omega t + \delta) & B_y &= 0 \\ E_z &= 0 & B_z &= B_0 \cos\left(\frac{\pi x}{a}\right) \cos(kz - \omega t + \delta) \end{aligned}$$

O vetor de Poynting é então:

$$\mathbf{S} = \frac{1}{\mu_0} \mathbf{E} \times \mathbf{B} = \frac{1}{\mu_0} (-E_y B_x \hat{\mathbf{z}} + E_y B_z \hat{\mathbf{x}})$$


Energia fluindo nas direções x e z

Para efeitos práticos, o que interessa é a média no tempo do vetor de Poynting:

$$\langle \mathbf{S} \rangle = -\frac{1}{\mu_0} \langle E_y B_x \rangle \hat{\mathbf{z}} + \frac{1}{\mu_0} \langle E_y B_z \rangle \hat{\mathbf{x}}$$


Em média, após um ciclo completo de oscilação dos campos, só há transferência de energia ao longo do eixo do guia.

A potência transportada ao longo do guia é então:

$$P_T = \int \langle \mathbf{S} \rangle \cdot d\mathbf{a}$$

A potência transportada ao longo do guia é então:

$$P_T = \int \langle \mathbf{S} \rangle \cdot d\mathbf{a}$$

Elemento de área perpendicular ao eixo do guia

A potência transportada ao longo do guia é então:

$$P_T = \int \langle \mathbf{S} \rangle \cdot d\mathbf{a} = \int \langle \mathbf{S} \rangle \cdot \hat{\mathbf{z}} dx dy$$

Elemento de área perpendicular ao eixo do guia

A potência transportada ao longo do guia é então:

$$P_T = \int \langle \mathbf{S} \rangle \cdot d\mathbf{a} = \int \langle \mathbf{S} \rangle \cdot \hat{\mathbf{z}} dx dy$$

Elemento de área perpendicular ao eixo do guia

Você deve mostrar que essa potência é dada por (Ex. 10 - lista 1b):

$$P_T = \frac{1}{4} \sqrt{\frac{\epsilon_0}{\mu_0}} |E_0|^2 ab \sqrt{1 - \frac{\omega_c^2}{\omega^2}} \quad (\text{TE}_{10})$$



A potência transportada ao longo do guia é então:

$$P_T = \int \langle \mathbf{S} \rangle \cdot d\mathbf{a} = \int \langle \mathbf{S} \rangle \cdot \hat{\mathbf{z}} dx dy$$

Elemento de área perpendicular ao eixo do guia

Você deve mostrar que essa potência é dada por (Ex. 10 - lista 1b):

$$P_T = \frac{1}{4} \sqrt{\frac{\epsilon_0}{\mu_0}} |E_0|^2 ab \sqrt{1 - \frac{\omega_c^2}{\omega^2}} \quad (\text{TE}_{10})$$

Frequência de corte do modo