Aula (17.03.2020)

Def. Sejam $a, b \in \mathbb{Z}$ não-nulos. Um inteiro $c \in \mathbb{Z}$ é <u>múltiplo comum</u> de a e b se: $a | c$ e $a | b$.

Dados $a, b \in \mathbb{Z}$ não-nulos, definimos

$$M(a,b) = \left\{ c \in \mathbb{Z} \;\middle|\; \begin{array}{l} c \text{ é positivo} \\ a|c \text{ e } b|c \end{array} \right\}$$

Conjunto dos <u>múltiplos</u> <u>comuns</u> positivos de "a" e "b"

Exemplo:

$M(4,6) = \{12, 24, 36, 48, \dots\}$

Observe que $M(a,b)$ não é vazio, por exemplo $|a| \cdot |b|$ está em $M(a,b)$. Assim, aplicando (PBO), existe elemento minimal em $M(a,b)$. Vamos chamar esse elemento <u>mínimo</u> <u>múltiplo</u> <u>comum</u> e ~~esse~~ denotar por $mmc(a,b)$.

Exemplo: $a = -6$, $b = 15$.

$\Rightarrow M(-6,15) = \{30, 60, 90, 120, \dots\}$

$\Rightarrow mmc(-6,15) = 30.$

<u>Obs.</u> Claro que $mmc(a,b)$ existe para ~~.....~~ a, b não-nulos e

$$mmc(a,b) \leq |a|\cdot|b|.$$

<u>Teorema 1</u> Sejam $a, b \in \mathbb{Z}$ não-nulos. Então um inteiro $m \in \mathbb{Z}$ positivo é $mmc(a,b)$ se e somente se:

1) $a \mid m$ e $b \mid m$.

2) Se $a \mid m'$ e $b \mid m'$, assim $m \mid m'$.

<u>Obs.</u> O Teorema acima characteriza <u>mmc</u> na maneira "dual" para caracterizaçao de <u>mdc</u>.

<u>Prova</u>: [Teorema 1]

[$\Rightarrow$] Se $m = mmc(a,b)$ vamos provar que m cumpre as condições 1), 2).

$m \in M(a,b) \Rightarrow a \mid m$, $b \mid m$, logo 1) vale

Seja $m' \in \mathbb{Z}$ tal que $a \mid m'$ e $b \mid m'$

Vamos mostrar que $m \mid m'$.

Aplicando o algoritmo da divisão

$$m' = m \cdot q + r, \text{ com } 0 \leq r < m$$

Suponha que $\boxed{r > 0}$. Escreva $r = m' - m \cdot q$.

Temos:

$$\begin{matrix} a \mid m & e & a \mid m' \\ b \mid m & e & b \mid m' \end{matrix} \Rightarrow a \mid m' - mq \;\; e \;\; b \mid m' - mq$$

$$\Rightarrow a \mid r \;\; e \;\; b \mid r$$

Portanto $r \in M(a,b)$, mas $r < m$ e m é elemento minimal em $M(a,b)$ (pelo definisão). Contradisão!!

Assim $\boxed{r = 0}$, ou seja $m' = q \cdot m$

$$\Rightarrow m \mid m'$$

Assim m cumpre 2).

$[\Leftarrow]$ Seja $m \in \mathbb{Z}$ positivo que cumpre 1) e 2). Vamos mostrar que

$$m = \text{mmc}(a,b) = \min M(a,b).$$

Aplicando 1), temos que $m \in M(a,b)$.

Logo $\boxed{m \geq mmc(a,b).}$ 1

Alem disso como $\begin{bmatrix} a \mid mmc(a,b) \\ b \mid mmc(a,b) \end{bmatrix}$,

assim aplicando 2) segue que

$m \mid mmc(a,b)$, portanto $|m| \leq |mmc(a,b)|$

ou seja $\boxed{m \leq mmc(a,b)}$ 2

1, 2 $\Rightarrow$ $\boxed{m = mmc(a,b)}$

$\square$

<u>Exercicio</u> Mostre que $mdc(a,b) \mid mmc(a,b)$

<u>Solução</u>: Temos que $mdc(a,b) \mid a$, $mdc(a,b) \mid b$

Por outro lado $a \mid mmc(a,b)$

$\Leftarrow$

$mdc(a,b) \mid mmc(a,b)$.

<u>Teorema 2</u> Sejam $a, b \in \mathbb{Z}$ positivos. Assim:

$$\boxed{mdc(a,b) \cdot mmc(a,b) = a \cdot b}$$

<u>Prova.</u> Seja $d = mdc(a,b)$, e

$a = d \cdot r$, $b = d \cdot s$, com r, s inteiros.

Se $m = \frac{ab}{d}$, assim

$$m = \frac{a \cdot b}{d} = \frac{\cancel{d} \cdot r \cdot b}{\cancel{d}} = r \cdot b$$

$$m = \frac{a \cdot b}{d} = \frac{a \cdot \cancel{d} \cdot s}{\cancel{d}} = a \cdot s$$

Assim m é multiplo commum de a, b.

Seja c é multiplo commum de a e b

Assim $c = a \cdot u = b \cdot v$

Pelo T. de Bezout existem $x, y \in \mathbb{Z}$ tais qu

$$d = a \cdot x + b \cdot y, \text{ assim}$$

$$\frac{c}{m} = \frac{c \cdot d}{a \cdot b} = \frac{c \cdot (ax + by)}{ab} = \frac{cax}{ab} + \frac{cby}{ab} =$$

$$= \frac{cx}{b} + \frac{cy}{a} = v \cdot x + u \cdot y \text{ - inteiro}$$

$\Rightarrow m \mid c$. Assim $m = mmc(a, b)$

$$\Rightarrow mmc(a,b) = \frac{ab}{d} = \frac{ab}{mdc(a,b)}$$

$$\Rightarrow \boxed{mmc(a,b) \cdot mdc(a,b) = ab}$$

$\square$

Exemplo 1

Encontre mmc (30,36)

Solução Temos que mdc(30,36) = 6

$\Rightarrow$ $mmc(30,36) = \dfrac{30 \cdot 36}{mdc(30,36)} = \dfrac{30 \cdot \cancel{36}^{6}}{\cancel{6}} = 180$ //

Exemplo 2 (p/ casa)

Encontre mmc(143, 227).

Solução [32.461]

Exercício 2 Sejam $a, b \in \mathbb{Z}$ positivos.

Mostre:

$$mdc(a,b) = mmc(a,b) \iff a = b.$$

Solução:

Se $a = b \Rightarrow mdc(a,b) = a, \quad mmc(a,b) = \dfrac{a^2}{a} = a$

$\Rightarrow mdc(a,b) = mmc(a,b)$

Se $mdc(a,b) = mmc(a,b) \Rightarrow a = b$, pois

$$mdc(a,b) \leq \underbrace{a, b}_{\text{positivos}} \leq mmc(a,b)$$