Segundo método de Lyapunov

SEL0364 - Controle Não Linear Aplicado

Prof^{a}. Vilma Alves de Oliveira
Colaboradores: Diego e Lucas

Universidade de São Paulo
Escola de Engenharia de São Carlos

8 de abril de 2020

Overview

Motivação

A idéia básica do 2o. Método de Lyapunov relaciona-se à energia total do sistema. Se um sistema possui um estado de equilíbrio estável x_e, então a energia total armazenada no sistema decresce com o tempo até a energia total atingir o seu valor mínimo no estado de equilíbrio x_e. A estabilidade é analisada via uma função escalar especial chamada função de Lyapunov.

A função de Lyapunov

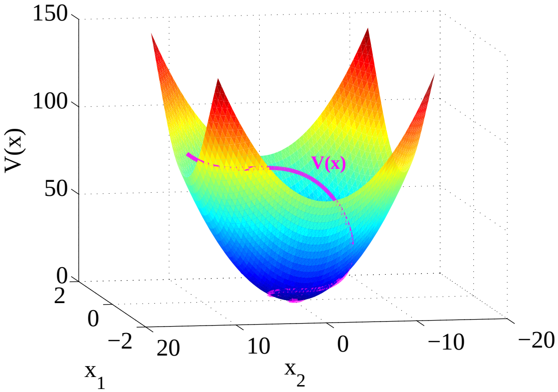
Definição

A função de Lyapunov $V(x)$ satisfaz as seguintes condições para todo $t_1 > t_0$ e para todo x na vizinhança de $x = 0$, com $x = 0$ um ponto de equilíbrio do sistema $\dot{x} = f(x)$:

1. $V(x)$ e suas derivadas parciais são definidas e são contínuas.
2. $V(0) = 0$
3. $V(x) > 0$ para todo $x \neq 0$ e $\dot{V}(x) \leq 0$, onde $\dot{V}(x)$ é a derivada de $V(x)$ em relação às trajetórias de $\dot{x} = f(x)$, i.e.

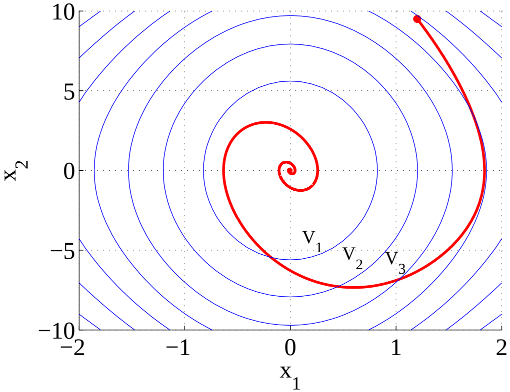
$$\begin{aligned} \dot{V}(x) &= \frac{dV(x)}{dt} = [grad_x V]^T \dot{x} \\ &= \frac{\partial V}{\partial x} f(x) \end{aligned}$$

Ilustração da função de Lyapunov



Representação geométrica de uma função de Lyapunov. Representação 3D da função de Lyapunov ilustrando $V(x)$ ao longo de uma solução iniciando em x_0.

Curva de nível



Representação geométrica de uma função de Lyapunov. Curvas de nível: $V_1 < V_2 < V3$ e solução $x(t)$ inciando em x_0.

Trajetória indo para a origem

Na figura da curva de nível faz-se uma representação geométrica de uma função de Lyapunov. Nota-se que a condição $\dot{V}(x) \leq 0$ implica que a trajetória do sistema deve se aproximar da origem passando por curvas de nível com valores referentes a função de Lyapunov V cada vez menores. E se $\dot{V}(x) < 0$, então $x(t) \to 0$ quando $t \to \infty$.

Resultado fundamental

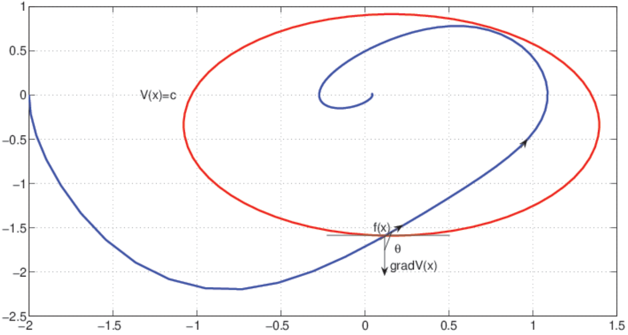
Teorema

Considere o sistema

$$\dot{x} = f(x), \;\; f(0) = 0.$$

Suponha que uma $V(x)$ possa ser determinada para o sistema. Então, o estado de equilíbrio $x = 0$ é assintoticamente estável se $\dot{V}(x)$ for negativa definida e estável no sentido de Lyapunov se $\dot{V}(x)$ for negativa semi-definida.

Ilustração ponto de equilíbrio estável



Sistema estável: $cos\theta = \frac{\langle Grad_x V f(x) \rangle}{||Grad_x|| ||f(x)||} < 0.$

Interpretação geométrica

Nota-se que a derivada de $V(x)$ é o produto escalar de dois vetores. A função $f(x)$ é um vetor que aponta no sentido da tangente da trajetória $x(t)$ do sistema naquele ponto, e $grad_x V(x)$ é um vetor normal, no sentido de crescimento de $V(x)$ em relação à uma curva de nível $V(x) = c, c > 0$. A figura ilustra o caso em que a derivada de $V(x)$ é negativa.
O teorema seguinte pode garantir a estabilidade assintótica do sistema mesmo que a derivada da função de Lyapunov V seja semidefinida negativa. A definição de conjuntos invariantes é necessária para entender o teorema.

Conjuntos invariantes

Um conjunto invariante com respeito a $\dot{x} = f(x)$ indica que se a solução pertence a $\mathcal{M}$ em um instante t, então a solução pertence a $\mathcal{M}$ para todo tempo futuro e passado.

Definição

O conjunto $\mathcal{M}$ é dito invariante com respeito às soluções do sistema dinâmico $\dot{x} = f(x)$ se toda trajetória iniciando em $x_0 = x(0)$ com $x_0 \in \mathcal{M}$ permanece em $\mathcal{M}$ para todo $t \geq 0$.

Teorema conjuntos invariantes local

Teorema

Considere $\dot{x} = f(x), f$ contínua, e seja $V(x)$ uma função escalar com primeira derivada parcial continua. Suponha

a) para algum $\ell > 0$, a região Ω_ℓ definida por $V(x) < \ell$ é limitada

b) $\dot{V}(x) \leq 0, \forall x \in \Omega_\ell$

Seja E o conjunto de todos os pontos dentro Ω_ℓ onde $\dot{V} = 0$, e $\mathcal{M}$ o maior conjunto invariante em E[a]. Então, todo solução originada em Ω_ℓ tende para $\mathcal{M}$ quando $t \to 0$.

[a] Entende-se por maior conjunto invariante a união de todos os conjuntos invariantes.

Observe que $V(x)$ não precisa ser definida positiva e é mesmo assim chamada de função de Lyapunov.

Princípio de invariância de La Salle

Teorema

Suponha $V(x) : \mathcal{R}^n \rightarrow \mathcal{R}$ *tal que em* $\omega_\ell = \{x \in \mathcal{R}^n : V(x) < \ell\}$ *tem-se* $\dot{V}(x) \leq 0$. *Defina* $E = \{x \in \omega_\ell : \dot{V}(x) = 0\}$. *Então, toda solução do sistema iniciando em* ω_ℓ *é atraída para o maior conjunto invariante em* E. *Se* E *não conter outra trajetória a não ser* $x = 0$ *para* $t \in [t_0\ \infty]$, *a origem* $x = 0$ *é assintoticamente estável.*

Tarefa de Simulação

Seja o pêndulo simples com amortecimento viscoso

$$\ddot{\theta} + \dot{\theta} + sen\theta = 0$$

fazendo $x_1 = \theta$, $x_2 = \dot{\theta}$ tem-se

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= -x_2 - sen(x_1). \end{aligned}$$

Considere

$$V(x) = (1 - \cos x_1) + \frac{x_2^2}{2}$$

Pêndulo simples

Na verdade, esta $V(x)$ representa a energia total do pêndulo, composta pela soma da energia potencial com a energia cinética. Observe que $V(x) > 0$, no conjunto $D = \{x \in R : 0 \leq x_1 < \pi\}$ $(V(x) = 0$ para $x \neq 0$, por exemplo $x = (\pi, 0)$ não atende o item 3 da função de Lyapunov)

$$\begin{aligned}\dot{V}(x) &= sen(x_1)\dot{x}_1 + x_2\dot{x}_2 \\ &= sen(x_1)x_2 + x_2(-x_2 - sen(x_1)) = -x_2^2 \leq 0\end{aligned}$$

tem-se então que $x = 0$ é estável localmente. Uma outra alternativa para tentar provar a estabilidade assintótica da origem seria usar o princípio de invariância de La Salle, o qual não exige que a derivada da função V seja definida negativa.

Ex. 3.13 Slotine: Ciclo limite atrativo

Considere o sistema

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2 - x_1^7(x_1^4 + 2x_2^2 - 10) \\ \dot{x}_2 &= -x_1^3 - 3x_2^5(x_1^4 + 2x_2^2 - 10)\end{aligned} \tag{1}$$

Note que o conjunto definido por $x_1^4 + 2x_2^2 - 10$ é invariante pois

$$\frac{d}{dt}(x_1^4 + 2x_2^2 - 10) = -(4x_1^{10} + 12x_2^6)(x_1^4 + 2x_2^2 - 10)$$

é igual a zero no conjunto $x_1^4 + 2x_2^2 - 10$. O conjunto invariante representa um ciclo limite. Escolha a função de Lyapunov candidata $V(x) = ((x_1^4 + 2x_2^2 - 10))^2$.

Cont.

Pede-se

1. Obter a derivada $\dot{V}$ e calcular o conjunto $E = \{x|\dot{V} = 0)\}$
2. Verificar que o conjunto invariante da solução em E é a união da origem e o ciclo limite dado por $x_1^4 + 2x_2^2 - 10$. Observar que o maior conjunto invariante dentro de E é o próprio conjunto E.
3. Defina o conjunto ω_ℓ em torno do ciclo limite e mostrar que o ciclo limite é atrativo. Dica: usar o Teorema de conjuntos invariantes local.
4. Plotar $V(x)$, curvas de nível e $\dot{V}(x)$ e verificar o comportamento decrescente de $V(x)$ ao longo das trajetórias na vizinhança do ciclo limite.

Referências

Slotine, Jean-Jacques E., and Weiping Li. Applied nonlinear control. Englewood Cliffs, NJ: prentice-Hall, 1991.