PSI.3213 – CIRCUITOS ELÉTRICOS II

1ª Prova Semestral– 11/09/19

1ª Questão: **(4,0 pontos)** **GABARITO**

Circuitos oscilatórios a cristal, utilizam um cristal sinteticamente produzido. A figura 1 mostra o símbolo usado para esses cristais e o respectivo modelo elétrico.

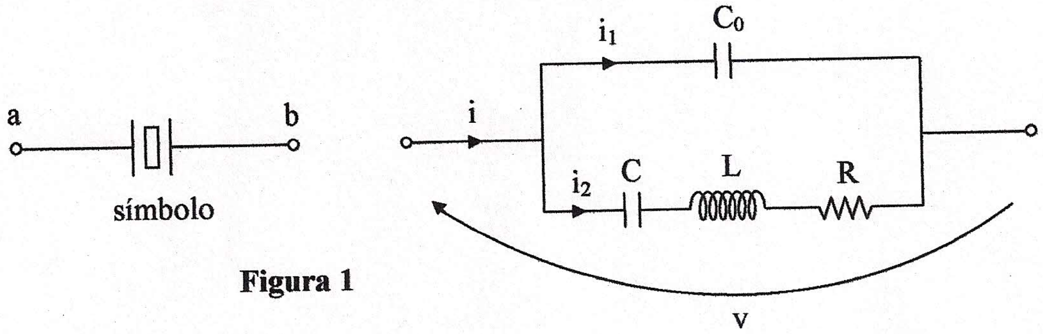

Figura 1

a) Usando as leis de Kirchhoff é possível escrever uma equação diferencial relacionando v(t) e i(t) na forma $K_1\left[\dfrac{d^3v}{dt^3} + \dfrac{R}{L}\dfrac{d^2v}{dt^2} + K_2\dfrac{dv}{dt}\right] = \dfrac{d^2i}{dt^2} + K_3\dfrac{di}{dt} + K_4 i$

Os valores de K_1, K_2, K_3 e K_4 em função de R, L, C e C_0 são:

$K_1 =$ C_0 $K_2 =$ $\frac{1}{L}\left(\frac{C+C_0}{CC_0}\right)$ $K_3 =$ R/L $K_4 =$ $1/LC$

Vamos escrever a 2ª lei de Kirchhoff nos dois ramos do circuito

$$i_1 = C_0\frac{dv}{dt} \quad (1) \qquad R i_2 + L\frac{di_2}{dt} + \frac{1}{C}\int_{-\infty}^{t} i_2(\lambda)\,d\lambda = v(t) \quad (2)$$

Além disso, temos $i = i_1 + i_2$

Derivando (2) e substituindo (3) vem:

$$R\frac{di}{dt} - R\frac{di_1}{dt} + L\frac{d^2i}{dt^2} - L\frac{d^2i_1}{dt^2} + \frac{1}{C}i - \frac{1}{C}i_1 = \frac{dv}{dt}$$

E substituindo i_1 pela expressão 1:

$$L\frac{d^2i}{dt^2} + R\frac{di}{dt} + \frac{1}{C}i = LC_0\frac{d^3v}{dt^3} + RC_0\frac{d^2v}{dt^2} + \left(\frac{C_0}{C}+1\right)\frac{dv}{dt}$$

Reorganizando vem:

$$C_0\left[\frac{d^3v}{dt^3} + \frac{R}{L}\frac{d^2v}{dt^2} + \frac{1}{L}\left(\frac{C+C_0}{CC_0}\right)\frac{dv}{dt}\right] = \frac{d^2i}{dt^2} + \frac{R}{L}\frac{di}{dt} + \frac{1}{LC}i$$

b) Transformando por Laplace a equação do item (a), chega-se à função de rede racional da forma $F(s) = \left.\dfrac{V(s)}{I(s)}\right|_{c.i.n.} = \dfrac{s^2 + \alpha_1 s + \alpha_2}{\beta_1 s^3 + \beta_2 s^2 + \beta_3 s}$.

Utilizando a equação diferencial do item a, obtenha os valores de α_1, α_2, β_1, β_2 e β_3 em função de K_1, K_2, K_3 e K_4. Preencha os espaços com suas respostas.

$\alpha_1 =$ K_3 $\qquad \alpha_2 =$ K_4

$\beta_1 =$ K_1 $\qquad \beta_2 =$ $K_1 \frac{R}{L}$ $\qquad \beta_3 =$ $K_1 K_2$

Parte-se da equação dada no item a

$$K_1\left[s^3 + \frac{R}{L}s^2 + K_2\right]V(s) = \left[s^2 + K_3 s + K_4\right]I(s)$$

$$\left.\frac{V(s)}{I(s)}\right|_{c.i.n} = \frac{s^2 + K_3 s + K_4}{K_1 s^3 + K_1\frac{R}{L}s^2 + K_1K_2}$$

c) Dada a função de rede $F(s) = \dfrac{s^2 + 2as + \omega_s^2}{s(s+a-j\omega_p)(s+a+j\omega_p)}$. O resíduo da expansão em frações parciais correspondente ao pólo $s = 0$, é A_0. Calcule o valor de A_0 em função de a, ω_s e ω_p.

$A_0 =$ $\dfrac{\omega_s^2}{a^2+\omega_p^2}$

$$F(s) = \frac{A_0}{s} + \frac{A_1}{s+a-j\omega_p} + \frac{A_1^*}{s+a+j\omega_p}$$

$$A_0 = \frac{\omega_s^2}{(a-j\omega_p)(a+j\omega_p)} = \frac{\omega_s^2}{a^2+\omega_p^2}$$

d) A resposta impulsiva de um circuito cuja função de rede é $F(s) = \dfrac{(0,1)\ s+1}{\cancel{0,1}\,s(s^2+5s+6)}$ pode ser escrita na forma $f(t) = \left\{ \dfrac{0,1}{K_1} + \dfrac{0,1}{K_2} e^{-2t} + \dfrac{0,2}{K_3} e^{-3t} \right\} H(t)$.

Calcule os valores de K_1, K_2 e K_3 e preencha os espaços correspondentes.

$K_1 =$ 6 $K_2 =$ 2 $K_3 =$ -3

$$F(s) = 0,1 \cdot \frac{s+1}{s(s+2)(s+3)} = 0,1 \left[\frac{A_1}{s} + \frac{A_2}{s+2} + \frac{A_3}{s+3} \right]$$

$$A_1 = 0,1 \cdot \frac{1}{6} \qquad A_2 = 0,1 \cdot \frac{-1}{(-2).1} = 0,1 \cdot \frac{1}{2}$$

$$A_3 = 0,1 \cdot \frac{-2}{(-3)(-1)} = 0,1 \cdot \frac{-2}{3}$$

Atenção: Preencher a folha ótica com seu nome, nº USP e opções escolhidas para cada teste.

1 – A transformada de Laplace da função periódica da Figura 2 é dada por

a) $\dfrac{1-e^{-2s}(2s+1)}{s^2\left(1-e^{-4s}\right)}$

b) $\dfrac{1+e^{-2s}(4s+1)}{1-e^{-4s}}$

c) $\dfrac{1-e^{-4s}(4s+1)}{s^2}$

d) $\dfrac{1-e^{-4s}(2s+1)}{1-e^{-4s}}$

e) $\dfrac{1+e^{-2s}(2s+1)}{s^2\left(1-e^{-4s}\right)}$

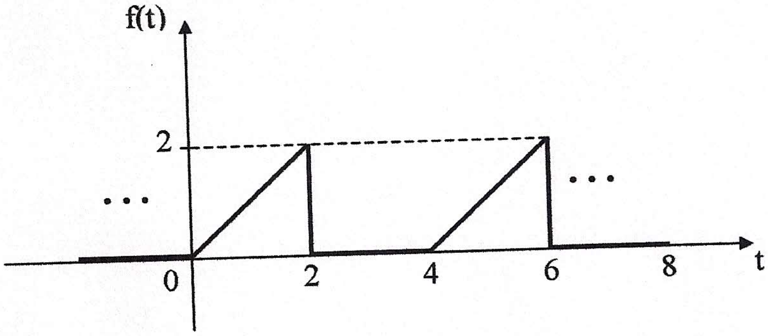

Figura 2

2 – A solução da equação $x(t)=e^{-t}+\int_0^t x(\lambda)\,d\lambda$, $t\geq 0$ é dada por:

a) $2\,e^{-2}\,H(t)$

b) $\frac{1}{2}\left[e^{t}+e^{-t}\right]H(t)$

c) $\frac{1}{2}\left[e^{-t}-e^{t}\right]H(t)$

d) $\left[e^{t}-e^{-t}\right]H(t)$

e) 0

3 – A resposta livre de um circuito de 2ª ordem é dada por $V(s)=\dfrac{2s+5}{s^2+10s+25}$ **(unidades SI)**

As condições iniciais $v(0_-)$ e $\dot{v}(0_-)$ em V e V/s são respectivamente iguais a

Dica: Trabalhe com a equação diferencial original.

a) 2 e 15

b) 5 e 20

c) -2 e 20

d) -5 e 2

e) 2 e -15

4 – A antitransformada de Laplace de $F(s) = \dfrac{1}{e^{s+3}} \dfrac{s^2}{(s+1)(s+2)}$ é:

a) $\delta(t-1) + e^{-(t-1)}H(t-1) + 4e^{-2(t-1)}H(t-1)$

b) $\delta(t-3) + e^{-(t-3)}H(t-3) - 4e^{-2(t-3)}H(t-3)$

c) $e^{-3}\,\delta(t-1) + [e^{-t-2} - 4e^{-2t-1}]H(t-1)$

d) $e^{-3}[\delta(t) - e^{-t}H(t) - 4e^{-2t}H(t)]$

d) $e^{-3}\,\delta(t-1) + [e^{-t-2} + 4e^{-2t-5}]H(t-1)$

PSI3213 – Gabarito dos Testes de 1 a 4 da P1 – 2019

1) A transformada de Laplace de uma função $f(t)$ periódica com período T é dada por

$$F(s) = \frac{1}{1-e^{-sT}} \int_{0_-}^{T} e^{-st} f(t) dt.$$

Para a função dada, temos

$$F(s) = \frac{1}{1-e^{-4s}} \left[\int_{0_-}^{2} te^{-st}dt + \int_{2}^{4} 0e^{-st}dt \right].$$

Note que a segunda integral é zero. Basta então resolver a primeira integral. Para isso, podemos usar integração por partes ou perceber que essa integral corresponde à transformada de Laplace de $g(t) = t[H(t) - H(t-2)]$ e calcular $G(s)$ usando propriedades. Sabe-se que $\mathcal{L}[tH(t)] = 1/(s^2)$. Usando a propriedade do deslocamento no tempo e da derivada em relação a s, chega-se a

$$\mathcal{L}[H(t-2)] = \frac{e^{-2s}}{s},$$

$$\mathcal{L}[tH(t-2)] = -\frac{de^{-2s}/s}{ds} = \frac{2se^{-2s} + e^{-2s}}{s^2},$$

e

$$G(s) = \frac{1 - 2se^{-2s} - e^{-2s}}{s^2}.$$

Finalmente, obtém-se

$$\boxed{F(s) = \frac{1 - e^{-2s}(2s+1)}{s^2(1-e^{-4s})}}$$

2) Aplicando a transformada de Laplace a ambos os lados da equação, obtém-se

$$X(s) = \frac{1}{s+1} + \frac{X(s)}{s}$$

ou seja

$$X(s) = \frac{s}{(s-1)(s+1)} = \frac{0,5}{s-1} + \frac{0,5}{s+1}.$$

Antitransformando, chega-se a

$$\boxed{x(t) = \frac{1}{2}[e^t + e^{-t}]H(t)}$$

3) Da expressão de $V(s)$ obtemos

$$s^2V(s) + 10sV(s) + 25V(s) = 2s + 5.$$

Como se trata da resposta livre, o termo do lado direito depende apenas das condições iniciais e a equação diferencial homogênea correspondente é dada por

$$\ddot{v}(t) + 10\dot{v}(t) + 25v(t) = 0.$$

Calculando a transformada de Laplace dessa equação diferencial, obtemos

$$s^2V(s) + 10sV(s) + 25V(s) = v(0_-)s + \dot{v}(0_-) + 10v(0_-).$$

Portanto,

$$v(0_-)s + \dot{v}(0_-) + 10v(0_-) = 2s + 5$$

e

$$\boxed{v(0_-) = 2\ \text{V}, \quad \text{e} \quad \dot{v}(0_-) = -15\ \text{V/s}}$$

4) Podemos reescrever $F(s)$ como

$$F(s) = e^{-3}\ e^{-s} \underbrace{\frac{s^2}{s^2 + 3s + 2}}_{G(s)} = e^{-3}\ e^{-s}G(s).$$

Da propriedade de deslocamento no tempo, temos que

$$\mathcal{L}[g(t-1)] = e^{-s}G(s).$$

Dessa forma, basta calcular $g(t)$ e deslocar de 1. Como o grau do numerador é igual ao grau do denominador de $G(s)$, deve-se fazer uma divisão de polinômios, seguida pela expansão em frações parciais, o que leva a

$$G(s) = 1 + \frac{1}{s+1} + \frac{-4}{s+2},$$

cuja antitransformada é

$$g(t) = \delta(t) + e^{-t}H(t) - 4e^{-2t}H(t).$$

Assim

$$f(t) = e^{-3}\left[\delta(t-1) + e^{-(t-1)}H(t-1) - 4e^{-2(t-1)}H(t-1)\right],$$

ou ainda

$$\boxed{f(t) = e^{-3}\delta(t-1) + [e^{-t-2} - 4e^{-2t-1}]H(t-1)}$$

5 – Um sistema apresenta uma função de rede $G(s) = \dfrac{s}{s^2+2s+1}$ entre a saída $Y(s)$ e a entrada $E(s)$. A resposta impulsiva deste sistema para $t \geq 0$ é:

a) $e^{t} + t\,e^{t}$

b) $e^{-t} - t\,e^{-t}$

c) $-e^{-t} - 2t\,e^{-t}$

d) 0

e) Não é possível determinar pois não foram dadas as condições iniciais.

6 – Considere a equação diferencial $v''(t) + v'(t) + v(t) = 0$ com $v(0_-) = 0$ e $v'(0_-) = 4$.
A resposta $v(t)$ para $t \geq 0$ é dada por:

a) $e^{-t}\cos\left(\dfrac{t}{2} + 45^{o}\right)$

b) $\dfrac{8}{3}\,e^{-t}\left[\sin\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\,t\right)^2 + \cos\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\,t\right)\right]$

c) $\sqrt{3}\,e^{-t/4}\cos\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\,t\right)$

d) $\dfrac{8\sqrt{3}}{3}\,e^{-t/2}\sin\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\,t\right)$

e) $e^{-t}.\cos\left(\dfrac{t}{2}\right)$

7 – A antitransformada de $F(s) = \dfrac{\left(1-e^{-s}\right)}{s\left(1-e^{-3s}\right)}$ é uma função periódica com um período descrito por:

Dica: $(1-x)^{-1} = 1 + x + x^2 + x^3 + \ldots$

a) $f(t) = -1$ para $0 < t < 1$ e $f(t) = 1$ para $1 < t < 3$

b) $f(t) = t$ para $0 < t < 1$ e $f(t) = 0$ para $1 < t < 3$

c) $f(t) = 1/2$ para $0 < t < 1$ e $f(t) = -1/2$ para $1 < t < 3$

d) $f(t) = 1$ para $0 < t < 1$ e $f(t) = 0$ para $1 < t < 2$

e) $f(t) = 1$ para $0 < t < 1$ e $f(t) = 0$ para $1 < t < 3$

8 – Considere a função de rede $G(s) = \left.\dfrac{Y(s)}{E_s(s)}\right|_{c.i.n.} = \dfrac{1}{(s+1)(s^2+s+2)}$.

Em condições iniciais nulas aplicou-se a esta rede a entrada $e_s(t) = 10\cos(t + 90^{\circ})$.
Pode-se afirmar, quanto à saída $y(t)$:

a) a saída entra em RPS e $y(t) = 5\cos t$

b) a saída não entra em RPS de forma que não há componente senoidal na resposta.

c) a saída entra em RPS e $y(t) = 5\cos(t + 90^{\circ})$

d) a saída não entra em RPS mas há uma componente senoidal descrito por

$$y(t) = 5\cos(t - 90^{\circ})$$

e) a saída não entra em RPS mas há uma componente senoidal descrito por

$$y(t) = 10\cos(t + 45^{\circ})$$

Gab:

5) $$\frac{s}{(s+1)^2} = \frac{A}{s+1} + \frac{B}{(s+1)^2}$$

$$B = s\Big|_{s=-1} = -1; \quad s=0 \rightarrow 0 = A + (-1) \rightarrow A = 1$$

$$g(t) = e^{-t} - te^{-t}$$

6) $$s^2V - s\,v(0_-) - v'(0_-) + sV - v(0_-) + V = 0$$

$$(s^2+s+1)V = v'(0_-) + v(0_-) + s\,v(0_-)$$

$$V = \frac{4}{s^2+s+1} = \frac{4 \cdot \frac{2}{\sqrt{3}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}}{(s+1/2)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}$$

$$v(t) = \frac{8\sqrt{3}}{3} \cdot e^{-t/2}\, \mathrm{sen}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right)$$

7) $$\frac{1}{s}(1-e^{-s})(1+e^{-3s}+e^{-6s}+\ldots) =$$

$$\frac{1}{s}(1-e^{-s}+e^{-3s}-e^{-4s}+e^{-6s}-e^{-7s}+\ldots) =$$

$$\frac{1}{s} - \frac{e^{-s}}{s} + \frac{e^{-3s}}{s} - \frac{e^{-4s}}{s} + \ldots$$

$$f(t) = H(t) - H(t-1) + H(t-3) - H(t-4) + \ldots$$

ou $f(t) = 1 \quad 0<t<1; \quad 0 \quad 1<t<3$ periódica.

8) Como os polos estão todos no SPE aberto, pode-se aplicar o Teorema do RPS. Após o transitório, restará a seguinte componente senoidal:

$$\hat{Y} = G(j\omega)\cdot\hat{E} = \frac{1}{-1+j+2}\,\frac{1}{j+1}\cdot 10\angle 90^\circ = \frac{10\angle 90^\circ}{j^2+2j+1} = 5\angle 0^\circ$$

originando $y(t) = 5\cos(t)$.

Para os **testes 9 e 10** considere a função $F(s) = \dfrac{s^3+5s^2+3s+1}{s(2s+1)\left(s^2+2s+2\right)}$ cuja antitransformada de Laplace é f(t).

9 – O valor de $f(0_+)$ é:

a) 3/2

b) 1

c) 1/2

d) 2

e) 5/2

10 – O valor de $\lim\limits_{t\to\infty} f(t)$ é:

a) não existe

b) 1/2

c) $+\infty$

d) 1

e) 3/2

11 – A função de rede entre o acesso em que é aplicada a excitação $x(t) = \cos(t + 45^o)$ (V,s) e o acesso em que se mede a resposta $y(t)$ é $F(s) = \dfrac{s+1}{s^2+2s+3}$ **(unidades SI)**.

A expressão de $y(t)$ em (V,s) em regime permanente senoidal é:

a) $\sqrt{2}\cos(t)$

b) $\sqrt{2}\cos\left(t-120^o\right)$

c) $2\cos(t-90^o)$

d) $\frac{1}{2}\cos\left(t+45^o\right)$

e) $2\cos(t-135^o)$

12 – A expressão da transformada de Laplace de $f(t) = 2\delta(5t-2)$ é:

a) $10\,e^{-2s}$

b) $2\,e^{-\frac{2}{5}s}$

c) $10\,e^{-10s}$

d) $\frac{2}{5}\,e^{-2s}$

e) $\frac{2}{5}\,e^{-\frac{2}{5}s}$

T9) Notamos que para $F(s) = \frac{N(s)}{D(s)}$ temos $gr\{N(s)\} = 3$ e $gr\{D(s)\} = 4$. Portanto, como $gr\{N(s)\} < gr\{D(s)\}$, não impulsos em $f(t)$. Assim, podemos aplicar diretamente o Teorema do Valor Inicial:

$$f(0_+) = \lim_{s \to \infty} [sF(s)]$$
$$= \lim_{s \to \infty} \frac{s^4 + \dots + s}{2s^4 + \dots + 2s} = \lim_{s \to \infty} \frac{s^4}{2s^4}$$

$$\boxed{f(0_+) = \frac{1}{2}}$$

T10) Determinamos os polos de $F(s)$:

$$p_1 = 0, \quad p_2 = -\frac{1}{2}, \quad p_3 = -1 + j, \quad p_4 = -1 - j$$

Assim, a região de convergência de $f(t)$ é $Re\{s\} > 0$. Mas, como o polo $p_1 = 0$ está associado ao degrau $\frac{A}{s}$, devemos conseguir o limite

$$\lim_{t \to \infty} f(t) = A$$

pelo Teorema do Valor Final como

$$\lim_{t \to \infty} f(t) = \lim_{s \to 0} [sF(s)]$$
$$= \lim_{s \to 0} \frac{s^4 + \dots + s}{2s^4 + \dots + 2s} = \lim_{s \to 0} \frac{s}{2s} = \lim_{s \to 0} \frac{\frac{ds}{ds}}{\frac{d(2s)}{ds}}$$
$$= \lim_{s \to 0} \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

Podemos verificar esse resultado calculando o resíduo

$$A_{11} = [sF(s)]\Big|_{s=0}$$
$$= \frac{s^3 + 5s^2 + 3s + 1}{(s+1)(s^2 + 2s + 2)}\Bigg|_{s=0} = \frac{1}{2}.$$

T11) Notamos que as frequências complexas próprias são

$$s_1 = -1 + \sqrt{2}\,j$$
$$s_2 = -1 - \sqrt{2}\,j$$

Portanto, $Re\{s_1\} = Re\{s_2\} < 0$ e podemos usar o teorema, ou, teorema do regime permanente senoidal

$$\hat{Y} = F(j\omega) \cdot \hat{X}$$

com $\omega = 1$ rad/s.

Isto é, temos

$$F(j\omega) = F(j)$$
$$= \frac{1+j}{-1+2j+3} = \frac{1+j}{2+2j} \rightarrow F(j\omega) = \frac{1}{2}$$

Assim $\hat{Y} = \frac{1}{2}\hat{X}$

ou $\boxed{y(t) = \frac{1}{2}\cos(t+45^0)}$

T12) temos $f(t) = 2\,\delta(5t-2) \overset{\mathcal{L}}{\longleftrightarrow} F(s)$

consideremos

$$g(t) = 2\,\delta(t-2) \longleftrightarrow G(s) = 2e^{-2s}$$

Pela propriedade da mudança da escala dos tempos, temos

$$F(s) = \frac{1}{5}G\left(\frac{s}{5}\right)$$

$$\boxed{F(s) = \frac{2}{5}e^{-\frac{2}{5}s}}.$$