Exercícios sobre Filtros de Kalman - PMR3502

Thiago Martins

2019

Formulário

Um sistema dinâmico linear gaussiano de tempo discreto é descrito pelas equações:

$$x_t = \mathbf{A}_t x_{t-1} + \mathbf{B}_t u_t + \epsilon_t \tag{1}$$
$$z_t = \mathbf{C}_t x_t + \delta_t \tag{2}$$

Os símbolos são:

t: Variável tempo, que assume valores discretos.

x_t: Vetor de estado do sistema no instante t.

u_t: Vetor de entrada do sistema.

ϵ_t: Ruído de processo do sistema, variável aleatória gaussiana com média *nula* e matriz de covariância $\mathbf{R}$.

$\mathbf{A}_t$: A matriz de dinâmica do sistema.

$\mathbf{B}_t$: A matriz de atuação do sistema.

z_t: O vetor de medidas (ou saídas) do sistema.

$\mathbf{C}_t$: A matriz de observação do sistema.

δ_t: Ruído de observação do sistema, variável aleatória gaussiana de média *nula* e matriz de covariância $\mathbf{Q}_t$.

O conhecimento estimado pelo filtro de Kalman sobre o estado do sistema no instante t é descrito por uma distribuição gaussiana de média μ_t e covariância Σ_t. Para tanto, além das matrizes das equações (1.1) e (1.2), são necessárias as matrizes $\mathbf{Q}_t$ e $\mathbf{R}_t$, e o conhecimento sobre o estado inicial do sistema x_0, representado por uma distribuição gaussiana de média μ_0 e covariância Σ_0.

O estado é estimado pelo sistema de equações recorrentes:

$$\overline{\mu}_t = \mathbf{A}_t \mu_{t-1} + \mathbf{B}_t u_t \tag{3}$$
$$\overline{\Sigma}_t = \mathbf{A}_t \Sigma_{t-1} \mathbf{A}_t^T + \mathbf{R}_t \tag{4}$$
$$\mathbf{K}_t = \overline{\Sigma}_t C_t^T \left(C_t \overline{\Sigma}_t C_t^T + Q \right)^{-1} \tag{5}$$
$$\mu_t = \overline{\mu}_t + \mathbf{K}_t \left(z_t - C_t \overline{\mu}_t \right) \tag{6}$$
$$\Sigma_t = \left(\mathbf{I} - \mathbf{K}_t \mathbf{C}_t \right) \overline{\Sigma}_t \tag{7}$$

A distribuição $\mathcal{N}\left(\overline{\mu}_t, \overline{\Sigma}_t\right)$ expressa o conhecimento sober o estado *previsto* no instante t *antes* de incorporar a medida z_t. A matriz $\mathbf{K}_t$ é chamada de *ganho de Kalman*.

Exercícios

1. Considere uma grandeza física x de valor desconhecido e presumido *constante* ao longo do tempo. Esta grandeza é submetida a diversas medidas z_i. Cada medida z_t é igual ao valor de x somado a uma variável aleatória *independente* que segue uma distribuição normal de média *nula* e covariância σ_t^2.

   a) Explique por que neste caso o passo de previsão do filtro de Kalman reduz-se a $\overline{\mu}_t = \mu_{t-1}$ e $\overline{\Sigma}_t = \Sigma_{t-1}$.

   b) Mostre que a covariância estimade de x no instante t, Σ_t, é o inverso da soma dos inversos das covariâncias σ_t^2.

   c) Mostre que o valor estimado de x no instante t, μ_t, é a *média ponderada* de z_t com os correspondentes pesos $1/\sigma_t{}^2$.

   Sugestões:

   - O filtro de Kalman trabalha exclusivamente com distribuições Gaussianas. Modele o conhecimento inicial sobre a variável x como uma variável aleatória que segue uma distribuição Gaussiana de média V e covariância U. Trate o primeiro passo de correção do filtro de Kalman da seguinte maneira:

     $$\mu_1 = \lim_{U \to +\infty} V + K_1(z_1 - V)$$
     $$\Sigma_1 = \lim_{U \to +\infty} (1 - K_1)U$$

     Observe que o valor de μ_1 neste caso não depende de V.

   - Use prova por *indução finita*. Mostre que existe algum valor de t para o qual as propriedades valem. Mostre que se as propriedades são válidas para $t - 1$, também são válidas para t.

2. Seja um sistema linear gaussiano de tempo discreto unidimensional descrito pelas equações:

   $$x_t = a x_{t-1} + \epsilon_t$$
   $$z_t = x_t + \delta_t$$

   onde ϵ_t e δ são variáveis aleatórias gaussianas de média nula e covariâncias $r > 0$ e $q > 0$ respectivamente. Para este sistema vale $0 < |a| < 1$.

   (a) Mostre que existe uma única covariância inicial Σ^* para a estimativa de estado de x_t que torna a covariância Σ_t do filtro de Kalman *constante* (ou seja, $\Sigma_{t-1} = \Sigma^* \Rightarrow \Sigma_t = \Sigma_{t-1}$).

   (b) Mostre que a covariância da estimativa *converge* para Σ^*, ou seja, $|\Sigma_t - \Sigma^*| < |\Sigma_{t-1} - \Sigma^*|$.

3. Uma massa unitária desloca-se livremente sobre uma guia. O estado do sistema é considerado em instantes *discretos*, com $\Delta t = 1$, ou seja, $t = 0, 1, \ldots$. Sobre esta massa atua uma força F, composta pela sobreposição de um valor controlado u_t e um ruído aleatório ϵ_t gaussiano de média nula e covariância $0,25$. Um sensor lê a posição do sistema com ruído. A varíavel obtida z_t é igual à posição x_t somada a um ruído aleatório z_t, gaussiano de média nula e covariância $0,125$.

   (a) Mostre que o vetor de estado do sistema $X_t = [x_t, v_t]^T$, onde x_t é a posição da massa e v_t a velocidade criam uma representação *Markoviana* do sistema, ou seja, a distribuição de z_k depende somente de X_{t-1}, u_t e da distribuição de ϵ_t e δ_t. Escreva a equação de evolução do sistema que expressa X_k em função de X_{t-1}, u_t e a equação de medida do estado que expressa z_t em função de X_t e δ_t. Calcule a matriz de covariância do *ruído de processo*, ou seja, a matriz covariância da variável aleatória X_t dados X_{t-1} e u_t.

   (b) Suponha que tenta-se manter a posição da massa ao redor da origem com um controlador por *feedback de estado*. A lei de controle é:

   $$u_t = -\begin{bmatrix} 1 & 3/2 \end{bmatrix} X_t$$

   Mostre que para $t \geq 2$, a velocidade e posição da massa são variáveis aleatórias de média nula, independentes e de covariâncias $0,5$ e $0,125$ respectivamente.

(c) Suponha que em $t = 0$ o conhecimento sobre o estado do sistema é o descrito no item anterior. Calcule para o filtro de Kalman as matrizes K_1 e Σ_1, respectivamente o ganho de Kalman e a covariância da estimativa de estado em $t = 1$.

(d) Sejam as codições iniciais as mesmas do item acima. Se $z_1 = 0.5$ e $z_2 = 0$, qual a velocidade estimada em $t = 2$? Qual a sua covariância?

(e) Suponha agora que o controlador não tem acesso diretamente à variável de estado e usa a estimativa μ_t do filtro de Kalman como estado. Calcule para $t = 2$ a matriz de covariância da variável de estado, supondo que este parte da origem em $t = 0$.

Sugestão: Note que neste caso, X_2 depende de ϵ_2, X_1 e μ_1. Estas duas últimas *não* são independentes! Escreva X_2 como uma transformação linear de ϵ_2 e do vetor $[X_1\ \mu_1]$. Calcule a matriz de covariância deste último.

Soluções

Exercício 1

a) A variável é suposta *constante*. Isso significa que o valor da variável em um instante t é o *mesmo* do instante anterior $t-1$. Deste modo a covariância do erro de processo R_t é nula, a matriz de dinâmica A_t é identidade e não há entrada, ou seja, $B_t u_t = 0$. Aplicando-se estes resultados à expressão do passo de previsão do filtro de Kalman, chega-se a $\overline{\mu}_t = \mu_{t-1}$ e $\overline{\Sigma}_t = \Sigma_{t-1}$. Nota-se também que a matriz de medição C_t é identidade.

b) Para $t = 1$, o ganho de Kalman é dado por:

$$\begin{aligned} K_1 &= \Sigma_0/(\Sigma_0 + \sigma_1^2) \\ &= \frac{U}{U + \sigma_1^2} \end{aligned} \tag{1.1}$$

Assim,

$$\begin{aligned} \mu_1 &= \lim_{U\to+\infty} V + K_1(z_1 - V) \\ &= \lim_{U\to+\infty} V + \frac{U(z_1 - V)}{U + \sigma_1^2} \\ &= \lim_{U\to+\infty} \frac{\sigma_1^2 V}{U + \sigma_1^2} + \frac{U z_1}{U + \sigma_1^2} = z_1 \end{aligned} \tag{1.2}$$

e

$$\begin{aligned} \Sigma_1 &= \lim_{U\to+\infty} (1 - K_1)U \\ &= \lim_{U\to+\infty} \left(1 - \frac{U}{U + \sigma_1^2}\right) U \\ &= \lim_{U\to+\infty} \frac{U\sigma_1^2}{U + \sigma_1^2} = \sigma_1^2 \end{aligned} \tag{1.3}$$

A propriedade a ser demonstrada é (note o uso de sigma maiúsculo tanto para o símbolo de soma $\sum_a^b$ quanto para o valor de covariância Σ_t):

$$\Sigma_t = \frac{1}{\sum_{i=1}^{t} 1/\sigma_i^2} \tag{1.4}$$

Esta propriedade é verdadeira para $t = 1$ como visto acima.

Ora, mas se ela é verdadeira para $t-1$, então o ganho de Kalman em t é:

$$\begin{aligned} K_t &= \Sigma_{t-1}/(\Sigma_{t-1} + \sigma_t^2) \\ &= \frac{1}{\sum_{i=1}^{t-1} 1/\sigma_i^2} \frac{1}{\frac{1}{\sum_{i=1}^{t-1} 1/\sigma_i^2} + \sigma_t^2} \\ &= \frac{1}{1 + \sigma_t^2 \sum_{i=1}^{t-1} 1/\sigma_i^2} \\ &= \frac{1/\sigma_t^2}{1/\sigma_t^2 + \sum_{i=1}^{t-1} 1/\sigma_i^2} \\ &= \frac{1/\sigma_t^2}{\sum_{i=1}^{t} 1/\sigma_i^2} \end{aligned} \tag{1.5}$$

Neste caso, a covariância estimada é:

$$
\begin{aligned}
\Sigma_t &= (1-K_t)\Sigma_{t-1} \\
&= \left(1 - \frac{1/\sigma_t^2}{\sum_{i=1}^{t} 1/\sigma_i^2}\right) \frac{1}{\sum_{i=1}^{t-1} 1/\sigma_i^2} \\
&= \left(\frac{\sum_{i=1}^{t} 1/\sigma_i^2 - 1/\sigma_t^2}{\sum_{i=1}^{t} 1/\sigma_i^2}\right) \frac{1}{\sum_{i=1}^{t-1} 1/\sigma_i^2} \\
&= \frac{\sum_{i=1}^{t-1} 1/\sigma_i^2}{\sum_{i=1}^{t} 1/\sigma_i^2} \frac{1}{\sum_{i=1}^{t-1} 1/\sigma_i^2} \\
&= \frac{1}{\sum_{i=1}^{t} 1/\sigma_i^2}
\end{aligned}
\tag{1.6}
$$

c) A propriedade que deseja-se demonstrar é:

$$
\mu_t = \frac{\sum_{i=1}^{t} z_i/\sigma_i^2}{\sum_{i=1}^{t} 1/\sigma_i^2}
\tag{1.7}
$$

Como visto no item anterior, esta propriedade é trivialmente verdadeira para $t = 1$.

Ora, mas se existe valor $t-1$ para a qual ela é válida, então,

$$
\begin{aligned}
\mu_t &= \mu_{t-1} + K_t\left(z_t - \mu_{t-1}\right) \\
&= \frac{\sum_{i=1}^{t-1} z_i/\sigma_i^2}{\sum_{i=1}^{t-1} 1/\sigma_i^2} + \frac{1/\sigma_t^2}{\sum_{i=1}^{t} 1/\sigma_i^2}\left(z_t - \frac{\sum_{i=1}^{t-1} z_i/\sigma_i^2}{\sum_{i=1}^{t-1} 1/\sigma_i^2}\right) \\
&= \frac{\sum_{i=1}^{t-1} z_i/\sigma_i^2}{\sum_{i=1}^{t-1} 1/\sigma_i^2} + \frac{1/\sigma_t^2}{\sum_{i=1}^{t} 1/\sigma_i^2}\left(\frac{z_t\sum_{i=1}^{t-1} 1/\sigma_i^2 - \sum_{i=1}^{t-1} z_i/\sigma_i^2}{\sum_{i=1}^{t-1} 1/\sigma_i^2}\right) \\
&= \frac{\sum_{i=1}^{t-1} z_i/\sigma_i^2}{\sum_{i=1}^{t-1} 1/\sigma_i^2} + \frac{z_t/\sigma_t^2\sum_{i=1}^{t-1} 1/\sigma_i^2 - 1/\sigma_t^2\sum_{i=1}^{t-1} z_i/\sigma_i^2}{\left(\sum_{i=1}^{t} 1/\sigma_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^{t-1} 1/\sigma_i^2\right)} \\
&= \frac{\left(\sum_{i=1}^{t-1} z_i/\sigma_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^{t} 1/\sigma_i^2\right) + z_t/\sigma_t^2\sum_{i=1}^{t-1} 1/\sigma_i^2 - 1/\sigma_t^2\sum_{i=1}^{t-1} z_i/\sigma_i^2}{\left(\sum_{i=1}^{t} 1/\sigma_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^{t-1} 1/\sigma_i^2\right)} \\
&= \frac{\left(\sum_{i=1}^{t-1} z_i/\sigma_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^{t} 1/\sigma_i^2 - 1/\sigma_t^2\right) + z_t/\sigma_t^2\sum_{i=1}^{t-1} 1/\sigma_i^2}{\left(\sum_{i=1}^{t} 1/\sigma_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^{t-1} 1/\sigma_i^2\right)} \\
&= \frac{\left(\sum_{i=1}^{t-1} z_i/\sigma_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^{t-1} 1/\sigma_i^2\right) + z_t/\sigma_t^2\sum_{i=1}^{t-1} 1/\sigma_i^2}{\left(\sum_{i=1}^{t} 1/\sigma_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^{t-1} 1/\sigma_i^2\right)} \\
&= \frac{\sum_{i=1}^{t-1} z_i/\sigma_i^2 + z_t/\sigma_t^2}{\sum_{i=1}^{t} 1/\sigma_i^2} \\
&= \frac{\sum_{i=1}^{t} z_i/\sigma_i^2}{\sum_{i=1}^{t} 1/\sigma_i^2}
\end{aligned}
\tag{1.8}
$$

Exercício 2

a) Pela definição do filtro de Kalman,

$$\overline{\Sigma}_t = a^2\Sigma_{t-1} + r \tag{2.1}$$

$$K_t = \frac{\overline{\Sigma}_t}{\overline{\Sigma}_t + q} \tag{2.2}$$

$$\Sigma_t = (1 - K_t)\overline{\Sigma}_t \tag{2.3}$$

Substituindo-se (2.2) em (2.3) chega-se a:

$$\Sigma_t = \left(1 - \frac{\overline{\Sigma}_t}{\overline{\Sigma}_t + q}\right)\overline{\Sigma}_t = \frac{q\overline{\Sigma}_t}{q + \overline{\Sigma}_t} \tag{2.4}$$

Substituindo-se (2.1) em (2.4) chega-se a:

$$\Sigma_t = \frac{qa^2\Sigma_{t-1} + qr}{a^2\Sigma_{t-1} + q + r} \tag{2.5}$$

Pela condição no exercício,

$$\Sigma^* = \frac{qa^2\Sigma^* + qr}{a^2\Sigma^* + q + r}$$
$$a^2\Sigma^{*2} + \left(r + \left(1 - a^2\right)q\right)\Sigma^* - qr = 0$$

Cujas soluções são:

$$\Sigma^* = \frac{\left(1 - a^2\right)q + r + \sqrt{\left(r + \left(1 - a^2\right)q\right)^2 + 4a^2qr}}{2a^2} \tag{2.6}$$

$$\Sigma^* = \frac{\left(1 - a^2\right)q + r - \sqrt{\left(r + \left(1 - a^2\right)q\right)^2 + 4a^2qr}}{2a^2} \tag{2.7}$$

Para $0 < |a| < 1$, a solução (2.6) é positiva e a solução (2.7) é negativa. Assim, a única covariância possível é a dada por (2.6).

b) Seja $d_t = \Sigma_t - \Sigma^*$. Aplicando-se (2.5),

$$\begin{aligned}
d_t &= \frac{qa^2\Sigma_{t-1} + qr}{a^2\Sigma_{t-1} + q + r} - \Sigma^* \\
&= \frac{qa^2\Sigma_{t-1} + qr}{a^2\Sigma_{t-1} + q + r} - \frac{qa^2\Sigma^* + qr}{a^2\Sigma^* + q + r} \\
&= \frac{qa^2\left(\Sigma^* + d_{t-1}\right) + qr}{a^2\left(\Sigma^* + d_{t-1}\right) + q + r} - \frac{qa^2\Sigma^* + qr}{a^2\Sigma^* + q + r} \\
&= d_{t-1}\frac{a^2q\left(a^2\Sigma^* + r\right)}{\left(q + r + a^2\left(\Sigma^* + d_{t-1}\right)\right)\left(q + r + a^2\Sigma^*\right)} \\
&= d_{t-1}\frac{a^2q\left(a^2\Sigma^* + r\right)}{\left(q + r + a^2\Sigma_{t-1}\right)\left(q + r + a^2\Sigma^*\right)} \\
&= d_{t-1}\frac{a^2q}{\left(q + r + a^2\Sigma_{t-1}\right)}\frac{r + a^2\Sigma^*}{q + r + a^2\Sigma^*}
\end{aligned} \tag{2.8}$$

Como vale $r > 0$, $q > 0$, $|a| < 1$ e $\Sigma_{t-1} > 0$, então $|d_t| < |d_{t_1}|$ ou $|\Sigma_t - \Sigma^*| < |\Sigma_{t-1} - \Sigma^*|$.

Exercício 3

a) Seja $a(x)$ a aceleração da massa em função do tempo. A velocidade em um determinado instante t é dada por:

$$v_t = v_{t-1} + a(t)\Delta t$$

Como a massa e Δt são unitários, $v_t = v_{t-1} + u_t + \epsilon_t$.

Do mesmo modo, a *posição* em um determinado instante t é dada por $x_t = x_{t-1} + \Delta t v_{t-1} + \Delta t^2 a_t/2$. Assim, $x_t = x_{t-1} + v_{t-1} + (u_t + \epsilon_t)/2$. Percebe-se que esta variável depende *unicamente* de x_{t-1}, v_{t-1}, u_t e ϵ_t. Finalmente, a medida é obtida por $z_t = x_t + \delta_t$. Assim a distribuição da medida depende unicamente do valor do estado proposto para o sistema, da entrada no instante t e da distribuição dos ruídos ϵ_t e δ_t.

As equações de estado e medida do sistema são:

$$\begin{bmatrix} x_t \\ v_t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{t-1} \\ v_{t-1} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1/2 \\ 1 \end{bmatrix} (u_t + \epsilon_t) \tag{3.1}$$

$$z_t = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_t \\ v_t \end{bmatrix} + \delta_t \tag{3.2}$$

Sabe-se que se $X \sim N(\mu, \Sigma)$ e $Y = AX + B$, então $Y \sim \mathcal{N}(A\mu + B, A\Sigma A^T)$. Assim, a matriz de covariância R do ruído de processo é dada por:

$$R = \begin{bmatrix} 1/2 \\ 1 \end{bmatrix} \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 1/2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/16 & 1/8 \\ 1/8 & 1/4 \end{bmatrix} \tag{3.3}$$

b) Aplicando-se a lei de controle ao estado do sistema, tem-se:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} x_t \\ v_t \end{bmatrix} &= \left(\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1/2 \\ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 3/2 \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} x_{t-1} \\ v_{t-1} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1/2 \\ 1 \end{bmatrix} \epsilon_t \\ &= \begin{bmatrix} 1/2 & 1/4 \\ -1 & -1/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{t-1} \\ v_{t-1} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1/2 \\ 1 \end{bmatrix} \epsilon_t \end{aligned}$$

Seja a matriz de dinâmica do sistema controlado $\mathbf{A}$ dada por:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1/2 & 1/4 \\ -1 & -1/2 \end{bmatrix}$$

Observa-se que $\mathbf{AA} = 0$.

Como a média da distribuição de ϵ_t é nula, o valor esperado de X_2 é dado por:

$$(\mathbf{AA}) \begin{bmatrix} x_0 \\ v_0 \end{bmatrix} = 0$$

Note que o valor esperado independe do valor inicial do sistema. Naturalmente, para instantes > 2 este valor esperado permanece nulo. *Observação:* Nota-se aqui que os parâmetros do controlador foram calculados de modo a zerar o estado do sistema em duas unidades de tempo.

Seja Λ_t a matriz de covariância da variável de estado X_t no instante t. O seu valor no instante $t = 1$ é dado por:

$$\Lambda_1 = \mathbf{A}\Lambda_0\mathbf{A}^T + R$$

E no instante $t = 2$ é dado por:

$$\begin{aligned} \Lambda_2 &= \mathbf{A}\Lambda_1\mathbf{A}^T + R \\ &= \mathbf{AA}\Lambda_0 (\mathbf{AA})^T + \mathbf{A}R\mathbf{A}^T + R \end{aligned}$$

O primeiro termo, como visto, é nulo. Substituindo-se os valores de $\mathbf{A}$ e R, chega-se a:

$$\Lambda_2 = \begin{bmatrix} 1/8 & 0 \\ 0 & 1/2 \end{bmatrix}$$

Finalmente, observa-se que $\Lambda_3 = \mathbf{A}\Lambda_2\mathbf{A}^T + R = \Lambda_2$. Assim, para $t > 2$ a covariância permanece constante. Observa-se com esta matriz de covariância que a velocidade e posição são *independentes*.

c) Neste caso tem-se

$$\Sigma_0 = \begin{bmatrix} 1/8 & 0 \\ 0 & 1/2 \end{bmatrix}$$

Observa-se também que $\overline{\Sigma}_1 = \Sigma_0$ (vide item anterior).

Assim,

$$\begin{aligned} K_1 &= \begin{bmatrix} 1/8 & 0 \\ 0 & 1/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \left(\begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1/8 & 0 \\ 0 & 1/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + 1/8 \right)^{-1} \\ &= \begin{bmatrix} 1/2 \\ 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

E

$$\begin{aligned} \Sigma_1 &= \left(\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1/2 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} 1/8 & 0 \\ 0 & 1/2 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1/16 & 0 \\ 0 & 1/2 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

d) Em $t = 1$, $\mu_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \end{bmatrix}^T + \begin{bmatrix} 1/2 & 0 \end{bmatrix}^T (1/2 - 0) = \begin{bmatrix} 1/4 & 0 \end{bmatrix}^T$. Assim,

$$\overline{\mu}_2 = \begin{bmatrix} 1/2 & 1/4 \\ -1 & 1/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1/4 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/8 \\ -1/4 \end{bmatrix}$$

Para prosseguir é necessário calcular $\overline{\Sigma}_2$ e K_2:

$$\begin{aligned} \overline{\Sigma}_2 &= \begin{bmatrix} 1/2 & 1/4 \\ -1 & 1/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1/16 & 0 \\ 0 & 1/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1/2 & -1 \\ 1/4 & 1/2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1/4 & 1/2 \\ 1/2 & 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 7/64 & 1/32 \\ 1/32 & 7/64 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} K_2 &= \begin{bmatrix} 7/64 & 1/32 \\ 1/32 & 7/64 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \left(\begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 7/64 & 1/32 \\ 1/32 & 7/64 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + 1/8 \right)^{-1} \\ &= \begin{bmatrix} 7/15 \\ 2/15 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Finalmente, chega-se a $\mu_2 = \begin{bmatrix} 1/8 & -1/4 \end{bmatrix}^T + \begin{bmatrix} 7/15 & 2/15 \end{bmatrix}^T \left(0 - \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1/8 & -1/4 \end{bmatrix}^T \right) = \begin{bmatrix} 1/15 & -4/15 \end{bmatrix}^T$. Assim, a velocidade estimada em $t = 2$ é $-4/15$. Segue-se o cálculo de Σ_2:

$$\begin{aligned} \Sigma_1 &= \left(\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 7/15 \\ 2/15 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} 7/64 & 1/32 \\ 1/32 & 7/64 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 7/120 & 1/60 \\ 1/60 & 13/30 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

A covariância da velocidade em $t = 2$ é $13/30$.

e) Substituindo-se X_t por μ_t no controlador do sistema, chega-se à seguinte dinâmica do sistema (atualização de μ_t omitida):

$$X_t = \left[\begin{bmatrix}1 & 1\\0 & 1\end{bmatrix}\left(-\begin{bmatrix}1/2\\1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 3/2\end{bmatrix}\right)\right]\begin{bmatrix}X_{t-1}\\\mu_{t-1}\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}1/2\\1\end{bmatrix}\epsilon_t \tag{3.4}$$

Tem-se também $X_0 = 0$ e $\mu_0 = 0$, de modo que:

$$X_1 = \begin{bmatrix}1/2\\1\end{bmatrix}\epsilon_t$$

A matriz de covariância do estado Λ_1 é então a própria matriz de covariância de ruído de processo R:

Pela lei de previsão do filtro de Kalman, também segue-se que $\overline{\mu}_1 = 0$, ou seja, não é variável aleatória.

A covariância da *previsão* do estado em $t = 1$ é do mesmo modo o próprio ruído de processo R.

Assim o ganho de Kalman em $T = 1$ é:

$$\begin{aligned}K_1 &= \begin{bmatrix}1/16 & 1/8\\1/8 & 1/4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}\left(\begin{bmatrix}1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1/16 & 1/8\\1/8 & 1/4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix} + 1/8\right)^{-1}\\ &= \begin{bmatrix}1/3\\2/3\end{bmatrix}\end{aligned}$$

A variável μ_1 é dada por:

$$\mu_1 = K_1 z_1$$

O valor exato de μ_1 não é relevante, mas a covariância do vetor composto $[X_1\ \mu_1]^T$. Nota-se que $z_1 = [1\ 0]^T X_1 + \delta_1$.

Assim,

$$\begin{bmatrix}X_1\\\mu_1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}I\\K_1\,[1\ 0]^T\end{bmatrix}X_1 + \begin{bmatrix}0_{2\times1}\\K_1\end{bmatrix}\delta_1$$

Seja Γ_1 a covariância do vetor $[X_1\ \mu_1]^T$, com Υ_1 a matriz de covariância de μ_1 e Ω_1 a matriz de covariância entre X_1 e μ_1.

Então

$$\Gamma_1 = \begin{bmatrix}\Lambda_1 & \Omega_1\\\Omega_1^T & \Upsilon_1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}I\\K_1\,[1\ 0]^T\end{bmatrix}\Lambda_1\begin{bmatrix}I & [1\ 0]\,K_1^T\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}0_{2\times1}\\K_1\end{bmatrix}1/8\begin{bmatrix}0_{1\times2} & K_1^T\end{bmatrix}$$

De modo que

$$\Omega_1 = \begin{bmatrix}1/48 & 1/24\\1/24 & 1/12\end{bmatrix}$$

$$\Upsilon_1 = \begin{bmatrix}1/48 & 1/24\\1/24 & 1/12\end{bmatrix}$$

Como antecipado, as variáveis μ_1 e X_1 *não* são independentes.

Finalmente, é possível calcular a covariância de X_2:

$$\begin{aligned}\Lambda_2 &= \begin{bmatrix}1 & 1 & -1/2 & -3/4\\0 & 1 & -1 & -3/2\end{bmatrix}\Gamma_1\begin{bmatrix}1 & 0\\1 & 1\\-1/2 & -1\\-3/4 & -3/2\end{bmatrix} + R\\ &= \begin{bmatrix}11/24 & 35/96\\35/95 & 27/64\end{bmatrix}\end{aligned}$$