MAP 3122 - Métodos Numéricos e Aplicações (POLI)

Lista de Exercícios sobre splines e EDOs

Dizemos que uma função s é um *spline cúbico* num intervalo $[a,b]$ se $s \in C^2([a,b])$. Dizemos que um spline cúbico é *natural* se $s''(a) = s''(b) = 0$.

Exercício 1. *Consideramos a função*

$$f(x) = \begin{cases} x^3 & \text{se } x \in [0,1] \\ \frac{1}{2}(x-1)^3 + a(x-1)^2 + b(x-1) + c, & \text{se } x \in [1,3] \end{cases}$$

1. *Determine os valores de a, b, c de modo que a função f seja um spline cúbico.*
2. *Com esses valores de a, b, c, o spline cúbico f é natural?*

Exercício 2. *Seja $s(x)$ um spline cúbico natural que passa pelos pontos $(-1,1), (0,0)$ e $(1,1)$ da função $f(x) = x^2$. Nos intervalos $[-1,0]$ e $[0,1]$, esse spline tem a forma*

$$s(x) = \begin{cases} s_1(x) = a_1 + b_1(x+1) + c_1(x+1)^2 + d_1(x+1)^3 & \text{se } x \in [-1,0] \\ s_2(x) = a_2 + b_2 x + c_2 x^2 + d_2 x^3, & \text{se } x \in [0,1] \end{cases}$$

1. *Determine o valor de a_2.*
2. *Duas pessoas calcularam os valores dos parametros. A primeira pessoa calculou*

$$s(x) = \begin{cases} s_1(x) = 1 - \frac{3}{2}(x+1) + \frac{1}{2}(x+1)s & \text{se } x \in [-1,0], \\ s_2(x) = \frac{3}{2}x^2 - \frac{1}{2}x^3, & \text{se } x \in [0,1] \end{cases}$$

enquanto a outra pessoa calculou

$$s(x) = \begin{cases} s_1(x) = -x & \text{se } x \in [-1,0], \\ s_2(x) = x, & \text{se } x \in [0,1]. \end{cases}$$

Apenas uma pessoa calculou os valores certos dos parametros. Quem é? Justifique sua resposta (não calcule o spline $s(x)$.)

Exercício 3. *Seja*

$$s(x) = \begin{cases} 28 + 25x + 9x^2 + x^3 & \text{se } x \in [-3,-1] \\ 10x + 21, & \text{se } x \in [-1,0] \end{cases}$$

uma função que passa pelos pontos $(-3,7), (-1,11)$ e $(0,21)$. Mostre que $s(x)$ não é um spline cúbico.

Exercício 4. *Consideramos a função*

$$s(x) = \begin{cases} \alpha x^3 + \beta x & \text{if } x \in [-1,0]; \\ a(x-1)^3 + 3(x-1)^2 + c(x-1) + d & \text{if } x \in [0,1]. \end{cases}$$

Determine os valores de α, β, a, c, d de modo que $s(x)$ seja um spline cúbico, e satisfaz também $s'(-1) = 0$, $s'(1) = 0$. O spline obtido é um spline natural (justifique)?

Exercício 5. *Transforme as equações diferenciais de ordem superior seguinte em sistemas de equações diferenciais de ordem 1. Escreve a forma matricial desses sistemas.*

1. $y^{(3)}(t) = y^{(2)}(t) + y^{(1)}(t) - y(t) + 1$
   $y(0) = 2$, $y^{(0)}(0) = 2$, $y^{(2)}(0) = 1$.

2. $y^{(4)}(t) = y^{(2)}(t)e^t + y^{(3)}(t)$
   $y(0) = 2$, $y^{(1)}(0) = 1$, $y^{(2)}(0) = 1$, $y^{(3)}(0) = 4$.

Exercício 6. *Use o método de Euler com passo $h = 0.5$ para calcular uma aproximação de $y(1)$, onde $y(t)$ é solução da EDO*

$$y''(t) + ty'(t) + 2y(t) = 0, \qquad y(0) = 4, \qquad y'(0) = 2.$$

Depois, use o método de Euler modificado com passo $h = 0.5$ para calcular uma aproximação de $y(1)$. Observação: o método de Euler modificado é dado por

$$w_{i+1} = w_i + hf\left(t_i + \frac{h}{2}, w_i + \frac{h}{2}f(t_i, w_i)\right).$$

Exercício 7. *Considere a equação $x'(t) = x^2(t), x(0) = 1$, cuja solução é dada por $x(t) = 1/(1-t)$. Calcule a aproximação para $x(0.5)$ pelos métodos de Euler e Euler modificado com $h = 0.25$ e compare os erros obtidos em $t = 0.5$ com os dois métodos.*