AULA DO DIA 17 DE ABRIL - MAP-2313

Equação da onda não homogênea e outras condições de contorno

Vamos hoje começar com mais um exemplo de equação com termos não homogêneos. Desta vez, no entanto, estudaremos a equação da onda.

Na segunda parte dessa aula, vamos mostrar como podemos usar o método de separação de variáveis para o estudo de outras condições de contorno.

1. Exemplo 3 (Exemplo de equação da onda não homogênea)

Seja $F : [0, \infty] \times [0, L] \to \mathbb{R}$ uma função contínua e considere a equação da onda definida abaixo:

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(t,x) = v^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t,x) + F(t,x), \ \ t > 0, x \in [0,L] \\ u(t,0) = u(t,L) = 0, \ \ t > 0 \\ u(0,x) = f(x), \ \ x \in [0,L] \\ \frac{\partial u}{\partial t}(0,x) = g(x), \ \ x \in [0,L] \end{cases}.$$

Vimos nas aulas passadas que se $F = 0$, então

$$u(t,x) = \sum_{n=1}^{\infty} \left[\left(\frac{2}{n\pi v} \int_0^L g(y) \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi y}{L}\right) dy \right) \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi v t}{L}\right) + \left(\frac{2}{L} \int_0^L f(y) \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi y}{L}\right) dy \right) \cos\left(\frac{n\pi v t}{L}\right) \right] \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right).$$

Vamos, então, nos basear na expressão acima e procurar uma solução da forma

$$u(t,x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n(t) \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right), \tag{1.1}$$

em que b_n são funções que devemos determinar. Note que as condições de contorno $u(t,0) = u(t,L) = 0$ são automaticamente satisfeitas. De fato, como $\operatorname{sen}(n\pi) = 0$, para $n \in \mathbb{N}$, temos

$$u(t,0) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n(t) \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi 0}{L}\right) = 0,$$

$$u(t,L) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n(t) \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi L}{L}\right) = 0.$$

Substituindo a expressão (1.1) na equação da onda, obtemos

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(t,x) - v^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t,x) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{d^2 b_n}{dt^2}(t) + \left(\frac{n\pi v}{L}\right)^2 b_n(t) \right) \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right).$$

Por outro lado, expandindo a função F, para cada tempo t fixo, em séries de Fourier seno, obtemos

$$F(t,x) = \sum_{n=1}^{\infty} F_n(t) \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right), \ \ F_n(t) = \frac{2}{L} \int_0^L F(t,y) \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi y}{L}\right) dy.$$

Logo

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{d^2 b_n}{dt^2}(t) + \left(\frac{n\pi v}{L}\right)^2 b_n(t) \right) \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right) = \sum_{n=1}^{\infty} F_n(t) \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right).$$

Assim, concluímos que

$$\frac{d^2 b_n}{dt^2}(t) + \left(\frac{n\pi v}{L}\right)^2 b_n(t) = F_n(t). \tag{1.2}$$

Com um pouco de trabalho (nós iremos ver como podemos resolver esse tipo de equação quando formos estudar funções de Green no final do curso), podemos ver que a solução geral da equação (1.2) é dada por

$$b_n(t) = b_n(0)\cos\left(\frac{n\pi v}{L}t\right) + \frac{b_n'(0)\operatorname{sen}\left(\frac{n\pi v}{L}t\right)}{\left(\frac{n\pi v}{L}\right)} + \frac{L}{n\pi v}\int_0^t \operatorname{sen}\left(\frac{nv\pi(t-s)}{L}\right) F_n(s)\,ds. \tag{1.3}$$

(Mini exercício: Verifiquem diretamente que a Equação (1.3) é solução de (1.2)).

Para determinar $b_n(0)$ e $b_n'(0)$, vamos usar as condições iniciais: Note que

$$u(0,x) = f(x) \implies \sum_{n=1}^{\infty} b_n(0)\operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right) = f(x) \implies b_n(0) = \frac{2}{L}\int_0^L f(y)\operatorname{sen}\left(\frac{n\pi y}{L}\right)dy$$

e

$$\frac{\partial u}{\partial t}(0,x) = g(x) \implies \sum_{n=1}^{\infty} b_n'(0)\operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right) = g(x) \implies b_n'(0) = \frac{2}{L}\int_0^L g(y)\operatorname{sen}\left(\frac{n\pi y}{L}\right)dy.$$

Concluímos assim que

$$u(t,x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n(t)\operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right) =$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left[\left(\frac{2}{L}\int_0^L f(y)\operatorname{sen}\left(\frac{n\pi y}{L}\right)dy\right)\cos\left(\frac{n\pi v}{L}t\right) + \left(\frac{2}{L}\int_0^L g(y)\operatorname{sen}\left(\frac{n\pi y}{L}\right)dy\right)\frac{\operatorname{sen}\left(\frac{n\pi v}{L}t\right)}{\left(\frac{n\pi v}{L}\right)}\right.$$
$$\left. + \frac{L}{n\pi v}\int_0^t \operatorname{sen}\left(\frac{nv\pi(t-s)}{L}\right)F_n(s)\,ds\right]\operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right).$$

Note que se $F = 0$, então $F_n = 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$ e obtemos a solução da equação de onda que tínhamos calculado numa das aulas anteriores.

2. Outras condições de contorno

Os métodos vistos até agora permitem o tratamento de inúmeros outras condições de contorno, tais como: condições periódicas, condições mistas (Dirichlet em uma parte e Neumann em outra) e condições de Robin.

Vamos aqui nos ater aos dois primeiros tipos. A interessante condição de Robin pode ser encontrada em diversas referências para aqueles que se interessarem. Para melhor ilustrar, vamos resolver um caso com a equação do calor e outro com a equação da onda.

2.1. Equação do calor com condições periódicas.

Considere a seguinte equação:

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t}(t,x) = k\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t,x), \quad t>0, x\in[0,L] \\ u(t,0) = u(t,L) \text{ e } \frac{\partial u}{\partial x}(t,0) = \frac{\partial u}{\partial x}(t,L), \quad t>0 \\ u(0,x) = f(x), \quad x\in[0,L] \end{cases}.$$

Note que aqui não impomos valores de u nem de $\frac{\partial u}{\partial x}$ nos pontos extremos $x = 0$ e $x = L$. Apenas supomos que tanto u como $\frac{\partial u}{\partial x}$ coincidem nas extremidades. Essas são as condições periódicas. Fisicamente, esta equação pode descrever a equação do calor de uma barra circular de perímetro L. Assim, as condições são periódicas, pois os pontos $x = 0$ e $x = L$ representam um mesmo ponto da barra.

Vamos resolver usando os três passos, seguindo o método de separação de variáveis.

Primeiro Passo

Vamos procurar soluções de $\frac{\partial u}{\partial t}(t,x) = k\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t,x)$ da forma $u(t,x) = T(t)X(x)$. Substituindo esta forma na equação da onda, temos soluções da forma

$$u(t,x) = A + Bx$$

e, para $\lambda \neq 0$, temos

$$u(t,x) = e^{-\lambda^2 kt}\left(A\cos(\lambda x) + B\operatorname{sen}(\lambda x)\right)$$

Segundo Passo

Vamos agora usar as condições de contorno

$$u(t,0) = u(t,L) \text{ and } \frac{\partial u}{\partial x}(t,0) = \frac{\partial u}{\partial x}(t,L).$$

Para $u(t,x) = A + Bx$, temos

$$A = A + BL \text{ e } B = B.$$

Logo $B = 0$ e u é uma função constante.
Para $\lambda \neq 0$, $u(t,0) = u(t,L)$ implica que

$$A = (A\cos(\lambda L) + B\text{sen}(\lambda L))$$

Por outro lado, $\frac{\partial u}{\partial x}(t,0) = \frac{\partial u}{\partial x}(t,L)$ implica que

$$B = (-A\text{sen}(\lambda L) + B\cos(\lambda L)).$$

Assim, devemos ter

$$\begin{pmatrix} 1-\cos(\lambda L) & -\text{sen}(\lambda L) \\ \text{sen}(\lambda L) & 1-\cos(\lambda L) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Para termos soluções não nulas, o determinante da matriz deve ser igual a zero. Logo

$$(1-\cos(\lambda L))^2 + \text{sen}^2(\lambda L)$$

$$= 1 - 2\cos(\lambda L) + \cos^2(\lambda L) + \text{sen}^2(\lambda L) = 2(1-\cos(\lambda L)) = 0.$$

Assim, devemos ter $\cos(\lambda L) = 1$, ou seja $\lambda L = 2n\pi$. Concluímos que as soluções encontradas são

$$u_n(t,x) = e^{-\left(\frac{2n\pi}{L}\right)^2 kt}\left(A\cos\left(\frac{2n\pi x}{L}\right) + B\text{sen}\left(\frac{2n\pi x}{L}\right)\right),\ n \in \{0,1,2,3,...\}.$$

Note que podemos escrever seno e cosseno usando apenas exponenciais. Obtemos dessa forma, que

$$u_n(t,x) = c_n e^{-\left(\frac{2n\pi}{L}\right)^2 kt} e^{i\frac{2n\pi x}{L}},\ n \in \mathbb{Z},$$

em que c_n são números complexos.

Poderíamos, de forma equivalente, considerar soluções da forma:

$$u_0(t,x) = \frac{a_0}{2},\ u_n(t,x) = a_n e^{-\left(\frac{2n\pi}{L}\right)^2 kt}\cos\left(\frac{2n\pi x}{L}\right),\ u_n(t,x) = b_n e^{-\left(\frac{2n\pi}{L}\right)^2 kt}\text{sen}\left(\frac{2n\pi x}{L}\right),\ n \in \{1,2,3,...\},$$

Terceiro Passo

Somando as soluções particulares, obtemos a seguinte expressão para uma solução geral

$$u(t,x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{-\left(\frac{2n\pi}{L}\right)^2 kt} e^{i\frac{2n\pi x}{L}}.$$

Para determinar c_n vamos usar a condição inicial

$$u(0,x) = f(x),\ \ x \in [0,L]\ .$$

Fazendo mudança de coordenadas[1], sabemos que

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f_n e^{i\frac{2n\pi x}{L}},\ \ f_n = \frac{1}{L}\int_0^L f(y)\, e^{-i\frac{2n\pi y}{L}} dy.$$

Logo

$$c_n = \frac{1}{L}\int_0^L f(y)\, e^{-i\frac{2n\pi y}{L}} dy.$$

---

[1]Sabemos que para $h : [-L,L] \to \mathbb{R}$, temos $h(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{i\frac{n\pi x}{L}}$, em que $c_n = \frac{1}{2L}\int_{-L}^{L} h(y)\, e^{-i\frac{n\pi y}{L}} dy$. Consideremos então $h(x) = f\left(\frac{x+L}{2}\right)$. Logo $f(x) = h(2x-L)$. Portanto

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty}\left(\frac{1}{2L}\int_{-L}^{L} h(y)\, e^{-i\frac{n\pi y}{L}} dy\right) e^{i\frac{n\pi(2x-L)}{L}} = \sum_{n=-\infty}^{\infty}\left(\frac{1}{2L}\int_{-L}^{L} f\left(\frac{y+L}{2}\right) e^{-i\frac{n\pi y}{L}} dy\right) e^{i\frac{n\pi(2x-L)}{L}}$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{\infty}\left(\frac{1}{2L}\int_0^L f(y)\, e^{-i\frac{n\pi(2y-L)}{L}} 2dy\right) e^{i\frac{n\pi(2x-L)}{L}} = \sum_{n=-\infty}^{\infty}\left(\frac{1}{L}\int_0^L f(y)\, e^{-i\frac{2n\pi y}{L}} dy\right) e^{i\frac{2n\pi x}{L}}.$$

Juntando tudo, concluímos que

$$u(t,x)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\left(\frac{1}{L}\int_0^L f(y)\,e^{-i\frac{2n\pi y}{L}}dy\right)e^{-\left(\frac{2n\pi}{L}\right)^2 kt}e^{i\frac{2n\pi x}{L}}.$$

2.2. **Equação da onda com condições mistas de contorno.** Consideremos, por fim, a seguinte equação:

$$\begin{cases}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(t,x)=v^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t,x), & t>0, x\in[0,L]\\ u(t,0)=\frac{\partial u}{\partial x}(t,L)=0, & t>0\\ u(0,x)=f(x), & x\in[0,L]\\ \frac{\partial u}{\partial t}(0,x)=g(x), & x\in[0,L]\end{cases}.$$

Fisicamente, essa condição de contorno tem a seguinte interpretação: A corda está fixa em $x=0$, mas está solta em $x=L$.

Primeiro Passo

Vamos procurar soluções de $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(t,x)=v^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t,x)$ da forma $u(t,x)=T(t)X(x)$.

As soluções encontradas são

$$u(t,x)=(At+B)(Cx+D).$$

e

$$u(t,x)=(A\text{sen}(\lambda vt)+B\cos(\lambda vt))(C\text{sen}(\lambda x)+D\cos(\lambda x)).$$

Segundo Passo

Vamos agora usar as condições de contorno

$$u(t,0)=\frac{\partial u}{\partial x}(t,L)=0, \quad t>0.$$

Para $u(t,x)=(At+B)(Cx+D)$, temos

$$u(t,0)=(At+B)D=0.$$

Logo se quisermos evitar $u=0$, devemos ter $D=0$. Por outro lado,

$$\frac{\partial u}{\partial x}(t,L)=(At+B)C=0.$$

Novamente, devemos ter $C=0$. Assim, $u=0$ é a única solução possível.

Vamos considerar a partir de agora somente $\lambda\neq 0$ e

$$u(t,x)=(A\text{sen}(\lambda vt)+B\cos(\lambda vt))(C\text{sen}(\lambda x)+D\cos(\lambda x)).$$

Assim, temos

$$u(t,0)=(A\text{sen}(\lambda vt)+B\cos(\lambda vt))D=0.$$

Como isto deve valer para todo $t>0$, devemos ter $D=0$.

Por outro lado, temos

$$\frac{\partial u}{\partial x}(t,L)=(A\text{sen}(\lambda vt)+B\cos(\lambda vt))\lambda C\cos(\lambda L)=0.$$

Logo devemos ter $C\cos(\lambda L)=0$. Se $C=0$, então $u=0$. Assim, deveremos ter

$$\cos(\lambda L)=0 \implies \lambda L=(2n+1)\frac{\pi}{2},\ n\in\mathbb{N}.$$

As soluções obtidas, portanto, são

$$u_n(t,x)=\left(A_n\text{sen}\left(\frac{(2n+1)\pi vt}{2L}\right)+B_n\cos\left(\frac{(2n+1)\pi vt}{2L}\right)\right)\text{sen}\left(\frac{(2n+1)\pi}{2L}x\right).$$

Terceiro Passo

Somando as soluções particulares, obtemos a seguinte expressão para uma solução geral

$$u(t,x)=\sum_{n=1}^{\infty}\left(A_n\text{sen}\left(\frac{(2n+1)\pi vt}{2L}\right)+B_n\cos\left(\frac{(2n+1)\pi vt}{2L}\right)\right)\text{sen}\left(\frac{(2n+1)\pi x}{2L}\right).$$

Para determinar A_n e B_n vamos usar as condições iniciais

$$\begin{cases} u(0,x) = f(x), & x \in [0,L] \\ \frac{\partial u}{\partial t}(0,x) = g(x), & x \in [0,L] \end{cases}.$$

Caso nós possamos escrever f e g na forma abaixo:

$$f(x) = u(0,x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n \text{sen}\left(\frac{(2n+1)\pi x}{2L}\right)$$

e

$$g(x) = \frac{\partial u}{\partial t}(0,x) = \sum_{n=1}^{\infty} g_n \text{sen}\left(\frac{(2n+1)\pi x}{2L}\right).$$

Concluiríamos que

$$u(t,x) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(f_n \text{sen}\left(\frac{(2n+1)\pi v t}{2L}\right) - \frac{2L}{(2n+1)\pi v} g_n \cos\left(\frac{(2n+1)\pi v t}{2L}\right)\right) \text{sen}\left(\frac{(2n+1)\pi x}{2L}\right).$$

No entanto, como podemos determinar f_n e g_n? Vamos responder essa questão nas aulas seguintes, ao estudar o Problema de Sturm-Liouville.

Principais ideias e conceitos dessa seção:
1) Vimos um métodos para resolver a equação:

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(t,x) = v^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t,x) + F(t,x), & t > 0, x \in [0,L] \\ u(t,0) = 0,\ u(t,L) = 0, & t > 0 \\ u(0,x) = f(x), & x \in [0,L] \\ \frac{\partial u}{\partial t}(0,x) = f(x), & x \in [0,L] \end{cases}.$$

Para tanto, procuramos soluções do tipo $u(t,x) = \sum_{n=1} b_n(t) \text{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$.
2) Vimos que o método de separação funciona também para condições periódicas ($u(t,0) = u(t,L)$ e $\frac{\partial u}{\partial x}(t,0) = \frac{\partial u}{\partial x}(t,L)$) e mistas ($u(t,0) = \frac{\partial u}{\partial x}(t,L) = 0$).