AULA DO DIA 13 DE MAIO - MAP-2313

Mais um exemplo de equação de Laplace em coordenadas polares

Nesta aula, estudaremos a equação de Laplace em mais uma região, onde as coordenadas polares são úteis. Descrevemos o espaço $\mathbb{R}^2$ usando as coordenadas r e θ definidas como $x = r\cos(\theta)$ e $y = r\mathrm{sen}(\theta)$. A região considerada será descrita, por coordenadas polares, da seguinte maneira:

$$\Omega = \{(r,\theta) \in \,]r_0, r_1[\, \times \,]0,\beta[\},$$

em que $r_1 > r_0 > 0$ e $\beta \in \,]0, 2\pi[$. Nosso objetivo é resolver a equação de Laplace nesta região:

$$\begin{cases} \Delta u(x) &= 0, & x \in \Omega \\ u(x) &= g(x) & x \in \partial\Omega \end{cases}. \tag{0.1}$$

No caso em que $r_0 = 1$, $r_1 = 2$ e $\beta = \frac{\pi}{4}$, a região pode ser vista abaixo. Ela corresponde a região entre as linhas cheias. A linha pontilhada só mostra que o ângulo é $\frac{\pi}{4}$:

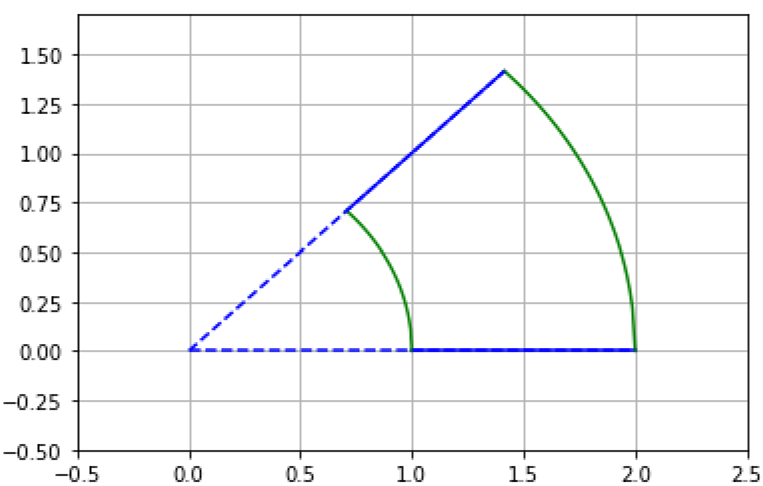

Figura 0.1

Nas coordenadas r e θ, a Equação (0.1) pode ser escrita como:

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial r^2}(r,\theta) + \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r}(r,\theta) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2}(r,\theta) &= 0, & (r,\theta) \in \Omega \\ u(r_0,\theta) &= g(\theta), & \theta \in \,]0,\beta[\\ u(r_1,\theta) &= f(\theta), & \theta \in \,]0,\beta[\\ u(r,0) &= h(r), & r \in \,]r_0,r_1[\\ u(r,\beta) &= k(r), & r \in \,]r_0,r_1[\end{cases}. \tag{0.2}$$

O problema acima pode ser dividido em dois problemas mais simples, assim como fizemos com a equação de Laplace num retângulo. Vamos considerar os seguintes problemas:

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 v}{\partial r^2}(r,\theta) + \frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial r}(r,\theta) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 v}{\partial \theta^2}(r,\theta) &= 0, & (r,\theta) \in \Omega \\ v(r_0,\theta) &= g(\theta), & \theta \in \,]0,\beta[\\ v(r_1,\theta) &= f(\theta), & \theta \in \,]0,\beta[\\ v(r,0) &= 0, & r \in \,]r_0,r_1[\\ v(r,\beta) &= 0, & r \in \,]r_0,r_1[\end{cases}, \tag{0.3}$$

$$(0.4)\qquad \begin{cases} \frac{\partial^2 w}{\partial r^2}(r,\theta)+\frac{1}{r}\frac{\partial w}{\partial r}(r,\theta)+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2}(r,\theta) & = & 0, & (r,\theta)\in\Omega \\ w(r_0,\theta) & = & 0, & \theta\in\left]0,\beta\right[\\ w(r_1,\theta) & = & 0, & \theta\in\left]0,\beta\right[\\ w(r,0) & = & h(r), & r\in\left]r_0,r_1\right[\\ w(r,\beta) & = & k(r), & r\in\left]r_0,r_1\right[\end{cases}.$$

Logo, se v e w são soluções das equações acima, é simples (faça como exercício! É fácil.) verificar que

$$u=v+w$$

é solução da Equação (0.2). Aqui, no entanto, vemos que as equações de contorno para v e w levam realmente a situações diferentes. Não basta trocar r por θ, já que o laplaciano depende de r e de θ de maneiras diferentes. Vamos, então, precisar resolver as duas equações acima.

0.1. **Resolvendo a equação para v.** Nesta subseção vamos resolver a Equação (0.3). Nosso método é o de sempre: separação de variáveis. Vamos usar três passos. No primeiro procuramos soluções da forma $R(r)\Theta(\theta)$. No segundo usamos as condições de contorno iguais a zero. Por fim, no último, somamos todas as soluções particulares obtidas e usamos as condições de contorno diferentes de zero.

Primeiro Passo

Vamos procurar soluções da forma $v(r,\theta)=R(r)\Theta(\theta)$. Substituindo na equação de Laplace, temos

$$\frac{d^2R}{dr^2}(r)\Theta(\theta)+\frac{1}{r}\frac{dR}{dr}(r)\Theta(\theta)+\frac{1}{r^2}R(r)\frac{d^2\Theta}{d\theta^2}(\theta)=0.$$

Dividindo tudo por $R(r)\Theta(\theta)$, obtemos

$$\frac{r^2\frac{d^2R}{dr^2}(r)+r\frac{dR}{dr}(r)}{R(r)}=-\frac{\frac{d^2\Theta}{d\theta^2}(\theta)}{\Theta(\theta)}=\lambda.$$

Assim,

$$\frac{d^2\Theta}{d\theta^2}(\theta)=-\lambda\Theta(\theta)\ \text{ e }\ r^2\frac{d^2R}{dr^2}(r)+r\frac{dR}{dr}(r)=\lambda R(r).$$

Logo

$$\begin{array}{llll} \Theta(\theta)=A\theta+B, & \text{se } \lambda=0 \text{ ou } & \Theta(\theta)=A\cos\left(\sqrt{\lambda}\theta\right)+B\mathrm{sen}\left(\sqrt{\lambda}\theta\right), & \text{se } \lambda\neq 0, \\ R(r)=A+B\ln(r), & \text{se } \lambda=0 \text{ ou } & R(r)=Ar^{\sqrt{\lambda}}+Br^{-\sqrt{\lambda}}, & \text{se } \lambda\neq 0. \end{array}$$

Segundo Passo

Vamos impor as condições de contorno que são iguais a zero:

$$\begin{cases} v(r,0) & = & 0, & r\in\left]r_0,r_1\right[\\ v(r,\beta) & = & 0, & r\in\left]r_0,r_1\right[\end{cases}.$$

Logo, devemos ter

$$R(r)\Theta(0)=R(r)\Theta(\beta)=0,\ \forall r\in\left]r_0,r_1\right[,$$

ou seja,

$$\Theta(0)=\Theta(\beta)=0.$$

Assim, se $\Theta(\theta)=A\theta+B$, temos

$$\begin{array}{ccccc} \Theta(0)=0 & \Longrightarrow & A0+B=0 & \Longrightarrow & B=0 \\ \Theta(\beta)=0 & \Longrightarrow & A\beta=0 & \Longrightarrow & A=0 \end{array}.$$

Portanto, não existe solução Θ não nula. Portanto, basta considerar $\Theta(\theta)=A\cos\left(\sqrt{\lambda}\theta\right)+B\mathrm{sen}\left(\sqrt{\lambda}\theta\right)$. Neste caso, temos

$$\begin{array}{lllll} \Theta(0)=0 & \Longrightarrow & A=0 & & \\ \Theta(\beta)=0 & \Longrightarrow & B\mathrm{sen}\left(\sqrt{\lambda}\beta\right)=0 & \Longrightarrow & \lambda=\left(\frac{n\pi}{\beta}\right)^2,\ n\in\{1,2,...\} \end{array}.$$

As soluções particulares obtidas são:

$$v_n(r,\theta)=\left(a_nr^{\left(\frac{n\pi}{\beta}\right)}+b_nr^{-\left(\frac{n\pi}{\beta}\right)}\right)\mathrm{sen}\left(\frac{n\pi\theta}{\beta}\right).$$

Terceiro Passo

Vamos agora somar todas as soluções obtidas

$$v(r,\theta)=\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n r^{\left(\frac{n\pi}{\beta}\right)}+b_n r^{-\left(\frac{n\pi}{\beta}\right)}\right)\operatorname{sen}\left(\frac{n\pi\theta}{\beta}\right).$$

Usaremos as as condições de contorno que são diferentes de zero para determinar as constantes a_n e b_n:

$$\begin{cases} v(r_0,\theta) &= g(\theta), \quad \theta\in\left]0,\beta\right[\\ v(r_1,\theta) &= f(\theta), \quad \theta\in\left]0,\beta\right[\end{cases}.$$

Aplicando as condições acima, concluímos que

$$\begin{array}{l} \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n r_0^{\left(\frac{n\pi}{\beta}\right)}+b_n r_0^{-\left(\frac{n\pi}{\beta}\right)}\right)\operatorname{sen}\left(\frac{n\pi\theta}{\beta}\right)=g(\theta) \\ \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n r_1^{\left(\frac{n\pi}{\beta}\right)}+b_n r_1^{-\left(\frac{n\pi}{\beta}\right)}\right)\operatorname{sen}\left(\frac{n\pi\theta}{\beta}\right)=f(\theta) \end{array}.$$

Usando nosso conhecimento de séries de Fourier seno sobre o intervalo $\left]0,\beta\right[$, concluímos que

$$\begin{array}{lll} a_n r_0^{\left(\frac{n\pi}{\beta}\right)}+b_n r_0^{-\left(\frac{n\pi}{\beta}\right)} &=& \frac{2}{\beta}\int_0^{\beta} g(\theta)\operatorname{sen}\left(\frac{n\pi\theta}{\beta}\right)d\theta \\ a_n r_1^{\left(\frac{n\pi}{\beta}\right)}+b_n r_1^{-\left(\frac{n\pi}{\beta}\right)} &=& \frac{2}{\beta}\int_0^{\beta} f(\theta)\operatorname{sen}\left(\frac{n\pi\theta}{\beta}\right)d\theta \end{array}.$$

Resolvendo essa equação para a_n e b_n, concluímos que

$$a_n=\frac{\left(r_1^{-\left(\frac{n\pi}{\beta}\right)}\frac{2}{\beta}\int_0^{\beta} g(\theta)\operatorname{sen}\left(\frac{n\pi\theta}{\beta}\right)d\theta-r_0^{-\left(\frac{n\pi}{\beta}\right)}\frac{2}{\beta}\int_0^{\beta} f(\theta)\operatorname{sen}\left(\frac{n\pi\theta}{\beta}\right)d\theta\right)}{\left(\frac{r_0}{r_1}\right)^{\left(\frac{n\pi}{\beta}\right)}-\left(\frac{r_1}{r_0}\right)^{\left(\frac{n\pi}{\beta}\right)}}$$

$$b_n=\frac{\left(-r_1^{\left(\frac{n\pi}{\beta}\right)}\frac{2}{\beta}\int_0^{\beta} g(\theta)\operatorname{sen}\left(\frac{n\pi\theta}{\beta}\right)d\theta+r_0^{\left(\frac{n\pi}{\beta}\right)}\frac{2}{\beta}\int_0^{\beta} f(\theta)\operatorname{sen}\left(\frac{n\pi\theta}{\beta}\right)d\theta\right)}{\left(\frac{r_0}{r_1}\right)^{\left(\frac{n\pi}{\beta}\right)}-\left(\frac{r_1}{r_0}\right)^{\left(\frac{n\pi}{\beta}\right)}}.$$

0.2. **Resolvendo a equação para w.** Vamos agora resolver a Equação (0.4). Novamente faremos os mesmos passos.

Primeiro Passo

Vamos procurar soluções da forma $w(r,\theta)=R(r)\Theta(\theta)$. Como visto anteriormente, temos soluções da forma

$$w(r,\theta)=(A\theta+B)(C+D\ln(r))$$

ou, para $\lambda\neq 0$, da forma

$$w(r,\theta)=\left(A\cos\left(\sqrt{\lambda}\theta\right)+B\operatorname{sen}\left(\sqrt{\lambda}\theta\right)\right)\left(Cr^{\sqrt{\lambda}}+Dr^{-\sqrt{\lambda}}\right).$$

Segundo Passo

Vamos impor as condições de contorno que são iguais a zero:

$$\begin{cases} w(r_0,\theta) &= 0, \quad \theta\in\left]0,\beta\right[\\ w(r_1,\theta) &= 0, \quad \theta\in\left]0,\beta\right[\end{cases}.$$

Logo, devemos ter

$$R(r_0)\Theta(\theta)=R(r_1)\Theta(\theta)=0,\ \forall\theta\in\left]0,\beta\right[,$$

ou seja,

$$R(r_0)=R(r_1)=0.$$

Assim, se $R(r)=C+D\ln(r)$, então

$$C+D\ln(r_0)=C+D\ln(r_1)=0.$$

Logo

$$D(\ln(r_0)-\ln(r_1))=0\implies D=0.$$

Por outro lado,

$$0 = C + D\ln(r_0) = C.$$

Assim, não existe solução não nula. Portanto, basta considerarmos soluções da forma $R(r) = Cr^{\sqrt{\lambda}} + Dr^{-\sqrt{\lambda}}$, para $\lambda \neq 0$. Usando que $R(r_0) = R(r_1) = 0$, temos

$$Cr_0^{\sqrt{\lambda}} + Dr_0^{-\sqrt{\lambda}} = Cr_1^{\sqrt{\lambda}} + Dr_1^{-\sqrt{\lambda}} = 0,$$

ou seja,

$$\begin{pmatrix} r_0^{\sqrt{\lambda}} & r_0^{-\sqrt{\lambda}} \\ r_1^{\sqrt{\lambda}} & r_1^{-\sqrt{\lambda}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C \\ D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Para obter solução não nula, o determinante da matriz acima deve ser nulo:

$$\det \begin{pmatrix} r_0^{\sqrt{\lambda}} & r_0^{-\sqrt{\lambda}} \\ r_1^{\sqrt{\lambda}} & r_1^{-\sqrt{\lambda}} \end{pmatrix} = 0 \iff r_0^{\sqrt{\lambda}} r_1^{-\sqrt{\lambda}} = r_0^{-\sqrt{\lambda}} r_1^{\sqrt{\lambda}} \iff \left(\frac{r_1}{r_0}\right)^{2\sqrt{\lambda}} = 1$$

$$\iff e^{2\sqrt{\lambda}\ln\left(\frac{r_1}{r_0}\right)} = 1 \iff 2\sqrt{\lambda}\ln\left(\frac{r_1}{r_0}\right) = 2n\pi i, n \in \mathbb{N} \iff \sqrt{\lambda} = \frac{n\pi i}{\ln\left(\frac{r_1}{r_0}\right)}, n \in \mathbb{N}.$$

Para essas constantes λ, vamos procurar C e D adequados. Devemos ter[1]

$$R(r) = Cr^{-\frac{n\pi i}{\ln\left(\frac{r_1}{r_0}\right)}} + Dr^{\frac{n\pi i}{\ln\left(\frac{r_1}{r_0}\right)}} = Ce^{-i\frac{n\pi\ln(r)}{\ln\left(\frac{r_1}{r_0}\right)}} + De^{i\frac{n\pi\ln(r)}{\ln\left(\frac{r_1}{r_0}\right)}}$$

$$= \tilde{C}\cos\left(\frac{n\pi\left(\ln(r) - \ln(r_0)\right)}{\ln\left(\frac{r_1}{r_0}\right)}\right) + \tilde{D}\mathrm{sen}\left(\frac{n\pi\left(\ln(r) - \ln(r_0)\right)}{\ln\left(\frac{r_1}{r_0}\right)}\right).$$

Assim, $R(r_0) = 0$ implica que

$$0 = \tilde{C}\cos\left(\frac{n\pi\left(\ln(r_0) - \ln(r_0)\right)}{\ln\left(\frac{r_1}{r_0}\right)}\right) + \tilde{D}\mathrm{sen}\left(\frac{n\pi\left(\ln(r_0) - \ln(r_0)\right)}{\ln\left(\frac{r_1}{r_0}\right)}\right) = \tilde{C}.$$

Concluímos que

$$R(r) = \tilde{D}\mathrm{sen}\left(n\pi\frac{\ln\left(\frac{r}{r_0}\right)}{\ln\left(\frac{r_1}{r_0}\right)}\right).$$

Note que a equação acima automaticamente satisfaz $R(r_1) = 0$.

Assim, as soluções encontradas são

$$w_n(r,\theta) = \mathrm{sen}\left(n\pi\frac{\ln\left(\frac{r}{r_0}\right)}{\ln\left(\frac{r_1}{r_0}\right)}\right)\left(\tilde{A}_n\cos\left(\frac{n\pi i}{\ln\left(\frac{r_1}{r_0}\right)}\theta\right) + \tilde{B}_n\mathrm{sen}\left(\frac{n\pi i}{\ln\left(\frac{r_1}{r_0}\right)}\theta\right)\right)$$

$$\mathrm{sen}\left(n\pi\frac{\ln\left(\frac{r}{r_0}\right)}{\ln\left(\frac{r_1}{r_0}\right)}\right)\left(A_n\cosh\left(\frac{n\pi}{\ln\left(\frac{r_1}{r_0}\right)}\theta\right) + B_n\mathrm{senh}\left(\frac{n\pi}{\ln\left(\frac{r_1}{r_0}\right)}\theta\right)\right), n \in \mathbb{N}.$$

Terceiro Passo

Vamos agora somar todas as soluções particulares obtidas e usar as condições de contorno que não são iguais a zero.

$$w(r,\theta) = \sum_{n=1}^{\infty}\mathrm{sen}\left(n\pi\frac{\ln\left(\frac{r}{r_0}\right)}{\ln\left(\frac{r_1}{r_0}\right)}\right)\left(A_n\cosh\left(\frac{n\pi}{\ln\left(\frac{r_1}{r_0}\right)}\theta\right) + B_n\mathrm{senh}\left(\frac{n\pi}{\ln\left(\frac{r_1}{r_0}\right)}\theta\right)\right).$$

---

[1] Aqui estamos escrevendo $Ce^{i\theta} + De^{-i\theta}$ como $Ce^{i\varphi}e^{i(\theta-\varphi)} + De^{-i\varphi}e^{-i(\theta-\varphi)}$. Usando a fórmula de Euler, concluímos que dadas constantes C,D e φ, existem constantes $\tilde{C}$ e $\tilde{D}$ tais que

$$Ce^{i\theta} + De^{-i\theta} = \tilde{C}\cos(\theta - \varphi) + \tilde{D}\mathrm{sen}(\theta - \varphi).$$

Nas contas acima, usamos $\varphi = -\frac{n\pi\ln(r_0)}{\ln\left(\frac{r_1}{r_0}\right)}$.

Sabemos que

$$\begin{cases} w(r,0) = h(r), & r \in]r_0, r_1[\\ w(r,\beta) = k(r), & r \in]r_0, r_1[\end{cases}.$$

Logo

$$\sum_{n=1}^{\infty} A_n \operatorname{sen}\left(n\pi \frac{\ln\left(\frac{r}{r_0}\right)}{\ln\left(\frac{r_1}{r_0}\right)}\right) = h(r)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{sen}\left(n\pi \frac{\ln\left(\frac{r}{r_0}\right)}{\ln\left(\frac{r_1}{r_0}\right)}\right)\left(A_n \cosh\left(\frac{n\pi\beta}{\ln\left(\frac{r_1}{r_0}\right)}\right) + B_n \operatorname{senh}\left(\frac{n\pi\beta}{\ln\left(\frac{r_1}{r_0}\right)}\right)\right) = k(r).$$

Como podemos determinar A_n e B_n? Devemos usar nosso conhecimento sobre problemas de Sturm-Liouville. Consideremos o problema

$$\begin{array}{c} r\frac{d}{dr}\left(r\frac{dR}{dr}(r)\right) = \lambda R(r) \\ R(r_0) = 0 \\ R(r_1) = 0 \end{array}.$$

Note que $r\frac{d}{dr}\left(r\frac{dR}{dr}(r)\right) = r^2\frac{d^2R}{dr^2}(r) + r\frac{dR}{dr}(r)$ e a equação acima é exatamente a equação que resolvemos anteriormente. (Compare com a equação que define o problema de Sturm-Liouville da aula do dia 22 de abril e note que aqui $a = r_0$, $b = r_1$, $w(x) = r(x) = x$ e $f(x) = 0$)

Vimos que as soluções são dadas por

$$R_n(r) = C_n \operatorname{sen}\left(n\pi \frac{\ln\left(\frac{r}{r_0}\right)}{\ln\left(\frac{r_1}{r_0}\right)}\right), \quad \lambda_n = -\left(\frac{n\pi}{\ln\left(\frac{r_1}{r_0}\right)}\right)^2.$$

Note que

$$\int_{r_0}^{r_1} R_n(r) R_m(r) \frac{dr}{r} = C_n C_m \int_{r_0}^{r_1} \operatorname{sen}\left(n\pi \frac{\ln\left(\frac{r}{r_0}\right)}{\ln\left(\frac{r_1}{r_0}\right)}\right) \operatorname{sen}\left(m\pi \frac{\ln\left(\frac{r}{r_0}\right)}{\ln\left(\frac{r_1}{r_0}\right)}\right) \frac{dr}{r}$$

$$\overset{(1)}{=} C_n C_m \ln\left(\frac{r_1}{r_0}\right) \int_0^1 \operatorname{sen}(n\pi y) \operatorname{sen}(m\pi y)\, dy = C_n C_m \ln\left(\frac{r_1}{r_0}\right) \delta_{mn}.$$

em que em (1) fizemos a mudança de coordenadas $y = \frac{\ln\left(\frac{r}{r_0}\right)}{\ln\left(\frac{r_1}{r_0}\right)}$ $dy = \frac{1}{r\ln\left(\frac{r_1}{r_0}\right)} dr$.

Se escolhermos $C_n = \frac{1}{\sqrt{\ln\left(\frac{r_1}{r_0}\right)}}$, para todo n, concluímos que R_n são funções ortonormais em relação ao produto interno:

$$\langle f, g\rangle = \int_{r_0}^{r_1} f(r) g(r) \frac{dr}{r}.$$

Pelo Teorema de Sturm-Liouville (veja aula do dia 22 de abril), toda função f contínua por partes pode ser escrita como

$$f = \sum_{n=1}^{\infty} \langle R_n, f\rangle R_n.$$

Assim,

$$h(r) = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{r_0}^{r_1} \left(\frac{1}{\sqrt{\ln\left(\frac{r_1}{r_0}\right)}} \operatorname{sen}\left(n\pi \frac{\ln\left(\frac{s}{r_0}\right)}{\ln\left(\frac{r_1}{r_0}\right)}\right) h(s) \frac{ds}{s}\right) \frac{1}{\sqrt{\ln\left(\frac{r_1}{r_0}\right)}} \operatorname{sen}\left(n\pi \frac{\ln\left(\frac{r}{r_0}\right)}{\ln\left(\frac{r_1}{r_0}\right)}\right)$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\ln\left(\frac{r_1}{r_0}\right)} \left(\int_{r_0}^{r_1} \operatorname{sen}\left(n\pi \frac{\ln\left(\frac{s}{r_0}\right)}{\ln\left(\frac{r_1}{r_0}\right)}\right) h(s) \frac{ds}{s}\right) \operatorname{sen}\left(n\pi \frac{\ln\left(\frac{r}{r_0}\right)}{\ln\left(\frac{r_1}{r_0}\right)}\right).$$

Concluímos que

$$\sum_{n=1}^{\infty} A_n \text{sen}\left(n\pi \frac{\ln\left(\frac{r}{r_0}\right)}{\ln\left(\frac{r_1}{r_0}\right)}\right) = h(r) \implies A_n = \frac{1}{\ln\left(\frac{r_1}{r_0}\right)}\left(\int_{r_0}^{r_1} \text{sen}\left(n\pi \frac{\ln\left(\frac{s}{r_0}\right)}{\ln\left(\frac{r_1}{r_0}\right)}\right) h(s)\frac{ds}{s}\right).$$

e

$$\sum_{n=1}^{\infty} \text{sen}\left(n\pi \frac{\ln\left(\frac{r}{r_0}\right)}{\ln\left(\frac{r_1}{r_0}\right)}\right)\left(A_n \cosh\left(\frac{n\pi\beta}{\ln\left(\frac{r_1}{r_0}\right)}\right) + B_n \text{senh}\left(\frac{n\pi\beta}{\ln\left(\frac{r_1}{r_0}\right)}\right)\right) = k(r).$$

$$\implies \left(A_n \cosh\left(\frac{n\pi\beta}{\ln\left(\frac{r_1}{r_0}\right)}\right) + B_n \text{senh}\left(\frac{n\pi\beta}{\ln\left(\frac{r_1}{r_0}\right)}\right)\right) = \frac{1}{\ln\left(\frac{r_1}{r_0}\right)}\left(\int_{r_0}^{r_1} \text{sen}\left(n\pi \frac{\ln\left(\frac{s}{r_0}\right)}{\ln\left(\frac{r_1}{r_0}\right)}\right) k(s)\frac{ds}{s}\right).$$

$$B_n = \frac{\frac{1}{\ln\left(\frac{r_1}{r_0}\right)}\left[\left(\int_{r_0}^{r_1} \text{sen}\left(n\pi \frac{\ln\left(\frac{s}{r_0}\right)}{\ln\left(\frac{r_1}{r_0}\right)}\right) k(s)\frac{ds}{s}\right) - \left(\int_{r_0}^{r_1} \text{sen}\left(n\pi \frac{\ln\left(\frac{s}{r_0}\right)}{\ln\left(\frac{r_1}{r_0}\right)}\right) h(s)\frac{ds}{s}\right)\cosh\left(\frac{n\pi\beta}{\ln\left(\frac{r_1}{r_0}\right)}\right)\right]}{\text{senh}\left(\frac{n\pi\beta}{\ln\left(\frac{r_1}{r_0}\right)}\right)}.$$

Concluímos que

$$w(r,\theta) = \sum_{n=1}^{\infty} \text{sen}\left(n\pi \frac{\ln\left(\frac{r}{r_0}\right)}{\ln\left(\frac{r_1}{r_0}\right)}\right)\left[\frac{1}{\ln\left(\frac{r_1}{r_0}\right)}\left(\int_{r_0}^{r_1} \text{sen}\left(n\pi \frac{\ln\left(\frac{s}{r_0}\right)}{\ln\left(\frac{r_1}{r_0}\right)}\right) h(s)\frac{ds}{s}\right)\cosh\left(\frac{n\pi}{\ln\left(\frac{r_1}{r_0}\right)}\theta\right)\right.$$

$$\left. + \frac{\frac{1}{\ln\left(\frac{r_1}{r_0}\right)}\left[\left(\int_{r_0}^{r_1} \text{sen}\left(n\pi \frac{\ln\left(\frac{s}{r_0}\right)}{\ln\left(\frac{r_1}{r_0}\right)}\right) k(s)\frac{ds}{s}\right) - \left(\int_{r_0}^{r_1} \text{sen}\left(n\pi \frac{\ln\left(\frac{s}{r_0}\right)}{\ln\left(\frac{r_1}{r_0}\right)}\right) h(s)\frac{ds}{s}\right)\cosh\left(\frac{n\pi\beta}{\ln\left(\frac{r_1}{r_0}\right)}\right)\right]}{\text{senh}\left(\frac{n\pi\beta}{\ln\left(\frac{r_1}{r_0}\right)}\right)} \text{senh}\left(\frac{n\pi}{\ln\left(\frac{r_1}{r_0}\right)}\theta\right)\right].$$

Principais resultados e ideias dessa seção:
1) Vimos mais um exemplo de equação de Laplace com coordenadas polares.
2) Para resolver o problema, dividimo-lo em 2 problemas mais simples.
3) A técnica de resolução para ambos os problemas foi a mesma: separação de variáveis. Os passos foram:
Passo 1) Procuramos soluções da forma $R(r)\Theta(\theta)$.
Passo 2) Usamos as condições de contorno que são iguais a zero.
Passo 3) Somamos todas as soluções particulares que obtivemos no passo 2 e usamos as condições de contorno que não são nulas.