AULA DO DIA 8 DE MAIO - MAP-2313

A equação de Laplace

Vamos supor que a temperatura de um corpo que ocupa $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ é conhecida em sua fronteira $\partial\Omega$ e é dada por uma função $g : \partial\Omega \to \mathbb{R}$ que não depende do tempo. Assim, a equação que descreve a temperatura é dada por

$$\left\{ \begin{array}{rcll} \frac{\partial u}{\partial t}(t,x) & = & \Delta u(t,x), & (t,x) \in (0,\infty) \times \Omega \\ u(t,x) & = & g(x), & (t,x) \in (0,\infty) \times \partial\Omega \\ u(0,x) & = & f(x), & x \in \Omega \end{array} \right. .$$

Se o corpo estiver em equilíbrio térmico, então a temperatura não depende do tempo ($\frac{\partial u}{\partial t}(t,x) = 0$). Logo a função $u : \Omega \to \mathbb{R}$ deve satisfazer a seguinte equação:

$$\left\{ \begin{array}{rcll} \Delta u(x) & = & 0, & x \in \Omega \\ u(x) & = & g(x), & x \in \partial\Omega \end{array} \right. , \tag{0.1}$$

em que, como sempre, $\Delta u = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}$.

A existência e a unicidade de soluções da equação acima pode ser provada para condições bastante gerais. Nesta aula, mostraremos como resolver a Equação (0.1) nas seguintes condições:

i) $\Omega =]0, L[$. Segmento de reta.

ii) $\Omega =]0, L_1[\times]0, L_2[$. Retângulo.

iii) $\Omega = B_1(0) := \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2; x^2 + y^2 < 1\right\}$. Bola de raio 1.

1. Segmento de reta

Este é o caso mais simples. Temos

$$\left\{ \begin{array}{rcll} \frac{d^2 u}{dx^2}(x)(x) & = & 0, & x \in \Omega \\ u(0) = g_0 & \text{e} & u(L) = g_1, & x \in \partial\Omega \end{array} \right. .$$

Assim,

$$u(x) = Ax + B.$$

Usando as condições de contorno, temos

$$\begin{array}{rcl} u(0) = g_0 & \Longrightarrow & B = g_0 \\ u(L) = g_1 & \Longrightarrow & AL + g_0 = g_1 \Longrightarrow A = \frac{g_1 - g_0}{L} \end{array} .$$

Concluímos que a solução é dada por

$$u(x) = \frac{g_1 - g_0}{L} x + g_0.$$

2. Retângulo

Vamos agora resolver o problema num retângulo:

$$\left\{ \begin{array}{rcll} \Delta u(x,y) & = & 0, & (x,y) \in]0, L_1[\times]0, L_2[\\ u(x,0) & = & f_1(x), & x \in]0, L_1[\\ u(x, L_2) & = & f_2(x), & x \in]0, L_1[\\ u(0,y) & = & g_1(y), & y \in]0, L_2[\\ u(L_1, y) & = & g_2(y), & y \in]0, L_2[\end{array} \right. . \tag{2.1}$$

Para resolver o problema acima, considere os dois problemas abaixo:

$$\begin{cases} \Delta u_1(x,y) &= 0, & (x,y) \in]0,L_1[\times]0,L_2[\\ u_1(x,0) &= f_1(x), & x \in]0,L_1[\\ u_1(x,L_2) &= f_2(x), & x \in]0,L_1[\\ u_1(0,y) &= 0, & y \in]0,L_2[\\ u_1(L_1,y) &= 0, & y \in]0,L_2[\end{cases} \quad \text{e} \quad \begin{cases} \Delta u_2(x,y) &= 0, & (x,y) \in]0,L_1[\times]0,L_2[\\ u_2(x,0) &= 0, & x \in]0,L_1[\\ u_2(x,L_2) &= 0, & x \in]0,L_1[\\ u_2(0,y) &= g_1(y), & y \in]0,L_2[\\ u_2(L_1,y) &= g_2(y), & y \in]0,L_2[\end{cases}.$$

É simples ver (mostre isso! É fácil) que $u_1 + u_2$, em u_1 e u_2 são soluções dos problemas acima, é solução do Problema (2.1), ou seja, $u = u_1 + u_2$. Note também que as equações para u_1 e u_2 são muito semelhantes. Apenas trocamos o papel de x e de y. Vamos, portanto, nos restringir ao estudo da equação para u_1.

Vamos usar novamente o método de separação de variáveis. Aqui os 3 passos serão ligeiramente diferentes. note que não temos condição inicial. Assim, os passos serão: procurar soluções da forma $X(x)Y(y)$. Depois usar as condições de contorno iguais a zero e, por fim, usar as condições de contorno diferentes de zero.

Primeiro Passo

Vamos procurar soluções da forma:

$$u(x,y) = X(x)Y(y).$$

Substituindo na equação, obtemos

$$\frac{\partial^2 (X(x)Y(y))}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 (X(x)Y(y))}{\partial y^2} = 0.$$

Logo, dividindo tudo por $X(x)Y(y)$,

$$\frac{\frac{d^2X(x)}{dx^2}}{X(x)} = -\frac{\frac{d^2Y(y)}{dy^2}}{Y(y)} = \lambda.$$

Concluímos que

$$\frac{d^2X(x)}{dx^2} = \lambda X(x), \quad \frac{d^2Y(y)}{dy^2} = -\lambda Y(y).$$

Assim, as soluções tanto de X e de Y serão da forma:

$$X(x) = A\cos\left(\sqrt{-\lambda}x\right) + B\text{sen}\left(\sqrt{-\lambda}x\right), \text{ se } \lambda \neq 0, \text{ ou } X(x) = Ax + B, \text{ se } \lambda = 0.$$

$$Y(y) = A\cos\left(\sqrt{\lambda}y\right) + B\text{sen}\left(\sqrt{\lambda}y\right), \text{ se } \lambda \neq 0, \text{ ou } Y(y) = Ay + B, \text{ se } \lambda = 0.$$

Segundo Passo

Vamos usar agora as condições de contorno que dão zero, ou seja:

$$u_1(0,y) = 0,\ y \in]0,L_2[\text{ e } u_1(L_1,y) = 0,\ y \in]0,L_2[.$$

Logo

$$X(0)Y(y) = 0,\ y \in]0,L_2[\implies X(0) = 0,$$
$$X(L_1)Y(y) = 0,\ y \in]0,L_2[\implies X(L_1) = 0.$$

Se $X(x) = Ax + B$, as condições acima nos dizem que $X = 0$. Se $\lambda \neq 0$, então

$$X(x) = A\cos\left(\sqrt{-\lambda}x\right) + B\text{sen}\left(\sqrt{-\lambda}x\right).$$

Assim,

$$X(0) = 0 \implies A = 0.$$

$$X(L_1) = 0 \implies B\text{sen}\left(\sqrt{-\lambda}L_1\right) = 0 \implies \lambda = -\left(\frac{n\pi}{L_1}\right)^2.$$

Concluímos que

$$X_n(x) = b_n\text{sen}\left(\frac{n\pi x}{L_1}\right),\ n \in \mathbb{N}.$$

Vamos agora achar Y. Se $\lambda_n = -\left(\frac{n\pi}{L_1}\right)^2$, então

$$Y_n(y) = A\cosh\left(\frac{n\pi y}{L_1}\right) + B\text{senh}\left(\frac{n\pi y}{L_1}\right).$$

Note que acima usamos seno e cosseno hiperbólico.[1]
Obtemos até agora funções da forma:

$$u_n(x,y) = \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L_1}\right)\left(a_n \cosh\left(\frac{n\pi y}{L_1}\right) + b_n \operatorname{senh}\left(\frac{n\pi y}{L_1}\right)\right).$$

Terceiro Passo
Vamos usar agora as condições de contorno não nulas, ou seja:

$$u_1(x,0) = f_1(x)\,,\ x \in]0, L_1[$$

$$u_1(x,L_2) = f_2(x)\,,\ x \in]0, L_1[$$

Vamos procurar uma solução da forma:

$$u_1(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L_1}\right)\left(a_n \cosh\left(\frac{n\pi y}{L_1}\right) + b_n \operatorname{senh}\left(\frac{n\pi y}{L_1}\right)\right).$$

Usando as condições de contorno, temos

$$u_1(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L_1}\right) = f_1(x).$$

Assim, através de nosso conhecimento sobre série de Fourier seno, temos

$$a_n = \frac{2}{L}\int_0^L f_1(s)\operatorname{sen}\left(\frac{n\pi s}{L_1}\right) ds.$$

Por outro lado,

$$u_1(x,L_2) = \sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L_1}\right)\left(a_n \cosh\left(\frac{n\pi L_2}{L_1}\right) + b_n \operatorname{senh}\left(\frac{n\pi L_2}{L_1}\right)\right) = f_2(x).$$

Logo

$$a_n \cosh\left(\frac{n\pi L_2}{L_1}\right) + b_n \operatorname{senh}\left(\frac{n\pi L_2}{L_1}\right) = \frac{2}{L_1}\int_0^{L_1} f_2(s)\operatorname{sen}\left(\frac{n\pi s}{L_1}\right) ds.$$

Portanto,

$$b_n = \frac{\frac{2}{L_1}\int_0^{L_1} f_2(s)\operatorname{sen}\left(\frac{n\pi s}{L_1}\right) ds - \left(\frac{2}{L}\int_0^{L} f_1(s)\operatorname{sen}\left(\frac{n\pi s}{L_1}\right) ds\right)\cosh\left(\frac{n\pi L_2}{L_1}\right)}{\operatorname{senh}\left(\frac{n\pi L_2}{L_1}\right)}.$$

Concluímos que

$$u_1(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L_1}\right)\left[\left(\frac{2}{L_1}\int_0^{L_1} f_1(s)\operatorname{sen}\left(\frac{n\pi s}{L_1}\right) ds\right)\cosh\left(\frac{n\pi y}{L_1}\right)\right.$$

$$\left. + \frac{\frac{2}{L_1}\int_0^{L_1} f_2(s)\operatorname{sen}\left(\frac{n\pi s}{L_1}\right) ds - \left(\frac{2}{L}\int_0^{L} f_1(s)\operatorname{sen}\left(\frac{n\pi s}{L_1}\right) ds\right)\cosh\left(\frac{n\pi L_2}{L_1}\right)}{\operatorname{senh}\left(\frac{n\pi L_2}{L_1}\right)}\operatorname{senh}\left(\frac{n\pi y}{L_1}\right)\right].$$

[1]Vamos lembrar do seno e do cosseno hiperbólico. Eles são definidos da seguinte forma:

$$\operatorname{senh}(\theta) = \frac{e^{\theta} - e^{-\theta}}{2} \quad \text{e} \quad \cosh(\theta) = \frac{e^{\theta} + e^{-\theta}}{2}.$$

Assim, $\operatorname{senh}(\theta) = -i\operatorname{sen}(i\theta)$ e $\cosh(\theta) = \cos(i\theta)$

3. Bola

Para estudar a equação numa bola é conveniente usar coordenadas polares:

$$\begin{array}{c} x = r\cos(\theta) \\ y = r\operatorname{sen}(\theta) \end{array}.$$

Nestas coordenadas, podemos mostrar (veja o apêndice) que o laplaciano é escrito como

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial \theta^2}.$$

Assim, o Problema (0.1) numa bola $B_1(0)$ é dado por

$$\left\{ \begin{array}{lcll} \frac{\partial^2 u}{\partial r^2}(r,\theta) + \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r}(r,\theta) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2}(r,\theta) & = & 0, & (r,\theta) \in]0,1[\times]-\pi,\pi[\\ u(1,\theta) & = & g(\theta), & \theta \in]-\pi,\pi[\end{array} \right. .$$

Vamos agora usar o método de separação de variáveis. Note que os pontos em que $\theta = -\pi$ correspondem aos mesmos pontos em que $\theta = \pi$. Assim, devemos ter

$$u(r,-\pi) = u(r,\pi) \text{ e } \frac{du}{d\theta}(r,-\pi) = \frac{du}{d\theta}(r,\pi). \tag{3.1}$$

Além disso, gostaríamos de achar soluções contínuas no interior. Logo

$$\lim_{r\to 0} u(r,\theta) \tag{3.2}$$

deve existir.

Primeiro Passo

Vamos procurar soluções da forma $u(r,\theta) = R(r)\Theta(\theta)$. Assim, temos

$$\frac{d^2R}{dr^2}(r)\Theta(\theta) + \frac{1}{r}\frac{dR}{dr}(r)\Theta(\theta) + \frac{1}{r^2}R(r)\frac{d^2\Theta}{d\theta^2}(\theta) = 0.$$

Logo, dividindo tudo por $R(r)\Theta(\theta)$,

$$\frac{r^2\frac{d^2R}{dr^2}(r) + r\frac{dR}{dr}(r)}{R(r)} = -\frac{\frac{d^2\Theta}{d\theta^2}(\theta)}{\Theta(\theta)} = \lambda.$$

Assim

$$\frac{d^2\Theta}{d\theta^2}(\theta) = -\lambda\Theta(\theta) \text{ e } r^2\frac{d^2R}{dr^2}(r) + r\frac{dR}{dr}(r) = \lambda R(r).$$

Logo

$$\Theta(\theta) = A\theta + B \text{ ou } \Theta(\theta) = Ae^{i\sqrt{\lambda}\theta} + Be^{-i\sqrt{\lambda}\theta}.$$

Poderíamos escrever $\Theta(\theta)$ em função de senos e cossenos e também obteríamos o resultado correto. Aqui vamos preferir usar exponenciais complexas, pois elas facilitam a prova da fórmula de Poisson, que será vista mais a frente.

Vamos agora resolver

$$r^2\frac{d^2R}{dr^2}(r) + r\frac{dR}{dr}(r) = \lambda R(r). \tag{3.3}$$

Vamos procurar soluções da forma r^α. Logo

$$r^2\alpha(\alpha-1)r^{\alpha-2} + r\alpha r^{\alpha-1} = \alpha r^\alpha \implies \alpha(\alpha-1)r^\alpha + \alpha r^\alpha = \lambda r^\alpha.$$

Assim

$$\alpha^2 = \lambda \implies \alpha = \pm\sqrt{\lambda}$$

e

$$R(r) = Ar^{\sqrt{\lambda}} + Br^{-\sqrt{\lambda}}.$$

Quando $\lambda = 0$, temos que $\ln(r)$ também é solução da Equação (3.3), como se pode verificar facilmente. Logo

$$R(r) = A + B\ln(r).$$

Segundo Passo

Vamos impor as Condições (3.1) e (3.2).

A Condição (3.1) implica que

$$u(r,-\pi)=u(r,\pi) \text{ e } \frac{\partial u}{\partial \theta}(r,-\pi)=\frac{\partial u}{\partial \theta}(r,\pi) \iff \Theta(-\pi)=\Theta(\pi) \text{ e } \frac{d\Theta}{d\theta}(-\pi)=\frac{d\Theta}{d\theta}(\pi)$$

Se $\Theta(\theta)=A+B\theta$, então $A-\pi B=A+\pi B$, ou seja, $B=0$ e Θ é uma função constante.
Se $\Theta(\theta)=Ae^{i\sqrt{\lambda}\theta}+Be^{-i\sqrt{\lambda}\theta}$, então

$$\begin{array}{rcl} \Theta(-\pi)=\Theta(\pi) & \Longrightarrow & Ae^{-i\sqrt{\lambda}\pi}+Be^{i\sqrt{\lambda}\pi}=Ae^{i\sqrt{\lambda}\pi}+Be^{-i\sqrt{\lambda}\pi}, \\ \frac{d\Theta}{d\theta}(-\pi)=\frac{d\Theta}{d\theta}(\pi) & \Longrightarrow & Ai\sqrt{\lambda}e^{-i\sqrt{\lambda}\pi}-Bi\sqrt{\lambda}e^{i\sqrt{\lambda}\pi}=Ai\sqrt{\lambda}e^{i\sqrt{\lambda}\pi}-Bi\sqrt{\lambda}e^{-i\sqrt{\lambda}\pi}. \end{array}$$

Assim, devemos ter

$$\begin{pmatrix} e^{-i\sqrt{\lambda}\pi}-e^{i\sqrt{\lambda}\pi} & e^{i\sqrt{\lambda}\pi}-e^{-i\sqrt{\lambda}\pi} \\ i\sqrt{\lambda}e^{-i\sqrt{\lambda}\pi}-i\sqrt{\lambda}e^{i\sqrt{\lambda}\pi} & -i\sqrt{\lambda}e^{i\sqrt{\lambda}\pi}+i\sqrt{\lambda}e^{-i\sqrt{\lambda}\pi} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Assim

$$\begin{pmatrix} -2i\frac{e^{i\sqrt{\lambda}\pi}-e^{-i\sqrt{\lambda}\pi}}{2i} & 2i\frac{e^{i\sqrt{\lambda}\pi}-e^{-i\sqrt{\lambda}\pi}}{2i} \\ 2\frac{\sqrt{\lambda}e^{i\sqrt{\lambda}\pi}-\sqrt{\lambda}e^{-i\sqrt{\lambda}\pi}}{2i} & 2\frac{\sqrt{\lambda}e^{i\sqrt{\lambda}\pi}-\sqrt{\lambda}e^{-i\sqrt{\lambda}\pi}}{2i} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Longrightarrow \begin{pmatrix} -2i\text{sen}\left(\sqrt{\lambda}\pi\right) & 2i\text{sen}\left(\sqrt{\lambda}\pi\right) \\ 2\sqrt{\lambda}\text{sen}\left(\sqrt{\lambda}\pi\right) & 2\sqrt{\lambda}\text{sen}\left(\sqrt{\lambda}\pi\right) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Para existir uma solução (A,B) não nula, devemos ter

$$\det\begin{pmatrix} -2i\text{sen}\left(\sqrt{\lambda}\pi\right) & 2i\text{sen}\left(\sqrt{\lambda}\pi\right) \\ 2\sqrt{\lambda}\text{sen}\left(\sqrt{\lambda}\pi\right) & 2\sqrt{\lambda}\text{sen}\left(\sqrt{\lambda}\pi\right) \end{pmatrix}=0 \Longrightarrow -8i\sqrt{\lambda}\text{sen}^2\left(\sqrt{\lambda}\pi\right)=0.$$

A condição acima é verdadeira se, e somente se, $\sqrt{\lambda}\pi=n\pi \Longrightarrow \lambda=n^2$.
Assim, as soluções encontradas são

$$u(r,\theta)=R(r)\Theta(\theta)=\left(Ar^n+Br^{-n}\right)\left(Ce^{in\theta}+De^{-in\theta}\right), n\neq 0,$$

e para $\lambda=n=0$, temos

$$u(r,\theta)=R(r)\Theta(\theta)=(A+B\ln(r)).$$

Usando agora a Condição (3.2), devemos descartar os termos r^{-n} e $\ln(r)$. Logo, as soluções encontradas são

$$\begin{array}{rcl} u_0(r,\theta) & = & c_0 \\ u_n(r,\theta) & = & r^n\left(c_ne^{in\theta}+c_{-n}e^{-in\theta}\right), \quad n\in\{1,2,...\}, \end{array}$$

em que $c_n\in\mathbb{C}$, para $n\in\mathbb{Z}$.

Terceiro Passo

Nosso terceiro passo será o uso da condição de contorno

$$u(1,\theta)=g(\theta).$$

Somando todas as soluções particulares, obtemos

$$u(r,\theta)=c_0+\sum_{n=1}^{\infty}r^n\left(c_ne^{in\theta}+c_{-n}e^{-in\theta}\right)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}c_nr^{|n|}e^{in\theta}.$$

Logo

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty}c_ne^{in\theta}=g(\theta).$$

Logo usando a série de Fourier, concluímos que

$$c_n=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}g(\varphi)e^{-in\varphi}d\varphi.$$

Assim, a solução do problema é dada por

$$u(r,\theta) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left(\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} g(\varphi) e^{-in\varphi} d\varphi \right) r^{|n|} e^{in\theta}. \tag{3.4}$$

3.1. **Fórmula de Poisson.** A solução que obtemos anteriormente para a equação de Laplace na bola unitária pode ser escrita numa forma muito simples, que chamamos de fórmula de Poisson. Nesta seção, vamos deduzir essa expressão. Partindo da Fórmula (3.4), vamos passar a soma para dentro da integral[2], e obter

$$u(r,\theta) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} g(\varphi) \left(\sum_{n=-\infty}^{\infty} r^{|n|} e^{in(\theta-\varphi)} \right) d\varphi.$$

Para simplificar a expressão acima, vamos usar a seguinte fórmula: para $|z| < 1$, $z \in \mathbb{C}$, temos

$$\sum_{j=0}^{\infty} z^j = \frac{1}{1-z}.$$

Assim,

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} r^{|n|} e^{in\theta} = \sum_{n=0}^{\infty} r^n e^{in\theta} + \sum_{n=1}^{\infty} r^n e^{-in\theta}$$

$$= \frac{1}{1-re^{i\theta}} + \frac{re^{-i\theta}}{1-re^{-i\theta}} = \frac{1-re^{-i\theta}+re^{-i\theta}\left(1-re^{i\theta}\right)}{\left(1-re^{i\theta}\right)\left(1-re^{-i\theta}\right)} = \frac{1-re^{-i\theta}+re^{-i\theta}-r^2}{1-re^{i\theta}-re^{-i\theta}+r^2} = \frac{1-r^2}{1-2r\cos(\theta)+r^2}.$$

Concluímos, por fim, que

$$u(r,\theta) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1-r^2}{1-2r\cos(\theta-\varphi)+r^2} g(\varphi)\, d\varphi. \tag{3.5}$$

A Fórmula (3.5) é chamada de **fórmula de Poisson**.

4. Apêndice: O laplaciano em coordenadas polares

Nesta última parte, vamos deduzir o Laplaciano em coordenadas polares. Vamos usar $x = r\cos(\theta)$, $y = r\mathrm{sen}(\theta)$ e a regra da cadeia para obter

$$\begin{array}{rclcl} \frac{\partial u}{\partial r} & = & \frac{\partial x}{\partial r}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial r}\frac{\partial u}{\partial y} & = & \cos(\theta)\frac{\partial u}{\partial x} + \mathrm{sen}(\theta)\frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial u}{\partial \theta} & = & \frac{\partial x}{\partial \theta}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial \theta}\frac{\partial u}{\partial y} & = & -r\mathrm{sen}(\theta)\frac{\partial u}{\partial x} + r\cos(\theta)\frac{\partial u}{\partial y} \end{array},$$

Em termos matriciais, temos

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial r} \\ \frac{\partial}{\partial \theta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & \mathrm{sen}(\theta) \\ -r\mathrm{sen}(\theta) & r\cos(\theta) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \end{pmatrix}.$$

Invertendo a matriz quadrada acima, concluímos que

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \end{pmatrix} = \frac{1}{r} \begin{pmatrix} r\cos(\theta) & -\mathrm{sen}(\theta) \\ r\mathrm{sen}(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial r} \\ \frac{\partial}{\partial \theta} \end{pmatrix} \Longrightarrow \begin{array}{l} \frac{\partial}{\partial x} = \cos(\theta)\frac{\partial}{\partial r} - \frac{1}{r}\mathrm{sen}(\theta)\frac{\partial}{\partial \theta} \\ \frac{\partial}{\partial y} = \mathrm{sen}(\theta)\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r}\cos(\theta)\frac{\partial}{\partial \theta} \end{array}.$$

Assim,

$$\begin{array}{rc} & \Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \\ = & \left(\cos(\theta)\frac{\partial}{\partial r} - \frac{\mathrm{sen}(\theta)}{r}\frac{\partial}{\partial \theta}\right)\left(\cos(\theta)\frac{\partial}{\partial r} - \frac{\mathrm{sen}(\theta)}{r}\frac{\partial}{\partial \theta}\right) + \left(\mathrm{sen}(\theta)\frac{\partial}{\partial r} + \frac{\cos(\theta)}{r}\frac{\partial}{\partial \theta}\right)\left(\mathrm{sen}(\theta)\frac{\partial}{\partial r} + \frac{\cos(\theta)}{r}\frac{\partial}{\partial \theta}\right) \\ = & \cos^2(\theta)\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{\mathrm{sen}(\theta)\cos(\theta)}{r^2}\frac{\partial}{\partial \theta} - \frac{\mathrm{sen}(\theta)\cos(\theta)}{r}\frac{\partial^2}{\partial r \partial \theta} + \frac{\mathrm{sen}^2(\theta)}{r}\frac{\partial}{\partial r} - \frac{\mathrm{sen}(\theta)\cos(\theta)}{r}\frac{\partial^2}{\partial \theta \partial r} + \frac{\mathrm{sen}(\theta)\cos(\theta)}{r^2}\frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{\mathrm{sen}^2(\theta)}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \\ & +\mathrm{sen}^2(\theta)\frac{\partial^2}{\partial r^2} - \frac{\mathrm{sen}(\theta)\cos(\theta)}{r^2}\frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{\mathrm{sen}(\theta)\cos(\theta)}{r}\frac{\partial^2}{\partial r \partial \theta} + \frac{\cos^2(\theta)}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{\mathrm{sen}(\theta)\cos(\theta)}{r}\frac{\partial^2}{\partial \theta \partial r} - \frac{\mathrm{sen}(\theta)\cos(\theta)}{r^2}\frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{\cos^2(\theta)}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \\ = & \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial \theta^2}. \end{array}$$

[2]Isso é possível, devido à convergência uniforme em compactos do interior da bola. Mas não faremos uma justificativa detalhada aqui.

Principais resultados e ideias dessa seção:
1) Vimos que a equação de Laplace aparece naturalmente quando estudamos corpos em equilíbrio térmico. (Na verdade, também em muitos outros contextos).
2) Vimos como resolver a equação de Laplace com condições de Dirichlet:

$$\begin{cases} \Delta u(x) &= 0, & x \in \Omega \\ u(x) &= g(x) & x \in \partial\Omega \end{cases}$$

nos seguintes casos: segmento de reta, retângulo e bola. Para tanto, novamente usamos o método de separação de variáveis.
3) Vimos que no caso da bola, devemos usar coordenadas polares. Escrevemos o Laplaciano nessas coordenadas e obtemos a solução, novamente pelo método de separação de variáveis. A solução pode ser escrita de forma simples através da fórmula de Poisson.