Apêndice I

Solução da Equação de Poisson

Na eletrostática, as cargas estão paradas, de modo que temos:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \tag{I.1}$$

$$\vec{E} = -\vec{\nabla}\phi \tag{I.2}$$

onde ϕ é o potencial escalar elétrico. Combinando estas equações, temos:

$$\nabla^2 \phi = -\frac{\rho}{\epsilon_0} \qquad \text{(Equação de Poisson)} \tag{I.3}$$

A solução da Eq. de Poisson estabelece a relação entre $\phi(\vec{x})$ e $\rho(\vec{x})$. Em princípio a solução pode ser dada pelo método da função de Green (ver Apêndice L). Mas podemos obter a resposta de forma mais simples e intuitiva, usando o princípio da superposição e o conceito de potencial para cargas pontuais que vimos no Cap. 3. Foram inclusive essas idéias que usamos para obter o potencial de diferentes distribuições de carga naquele capítulo.

Dada uma origem arbitrária do sistema de coordenadas, suponha que uma distribuição de cargas com densidade volumétrica $\rho(\vec{x'})$ no ponto $\vec{x'}$ genérico produza um potencial $\phi(\vec{x})$ em um ponto fixo $\vec{x}$. Um volume infinitesimal $dV' = d^3x'$ em torno do ponto $\vec{x'}$ contém a carga infinitesimal $dq' = \rho(\vec{x'})dV'$. Como trata-se de uma carga infinitesimal, ela pode ser tratada como uma carga *pontual*, que produz o seguinte potencial $d\phi(\vec{x})$ em $\vec{x}$:

$$d\phi(\vec{x}) = \frac{dq'}{4\pi\epsilon_0|\vec{x} - \vec{x'}|} = \frac{\rho(\vec{x'})d^3x'}{4\pi\epsilon_0|\vec{x} - \vec{x'}|} \tag{I.4}$$

Portanto, para obter o potencial total em $\vec{x}$, basta somar (integrar) todas as contribuições de todos os pontos $\vec{x'}$ para os quais $\rho(\vec{x'}) \neq 0$. Portanto $\phi(\vec{x}) = \int d\phi(\vec{x})$, ou seja:

$$\phi(\vec{x}) = \int d\phi(\vec{x}) = \int \frac{\rho(\vec{x'})d^3x'}{4\pi\epsilon_0|\vec{x} - \vec{x'}|} \tag{I.5}$$

Esta é, portanto, a solução da Eq. de Poisson.