

## Apêndice G

# Campo $\vec{B}$ de Solenóide Finito

Considere um solenóide de comprimento  $L$  e raio  $R$ , percorrido por uma corrente  $i$ , como na Fig. G.1. Vamos calcular o campo magnético  $B$  sobre o eixo  $y$  do solenóide usando a lei de Biot-Savart. Visualizamos o solenóide como um conjunto de  $N$  espiras de espessura  $\Delta y$ , tal que  $N\Delta y = L$ .

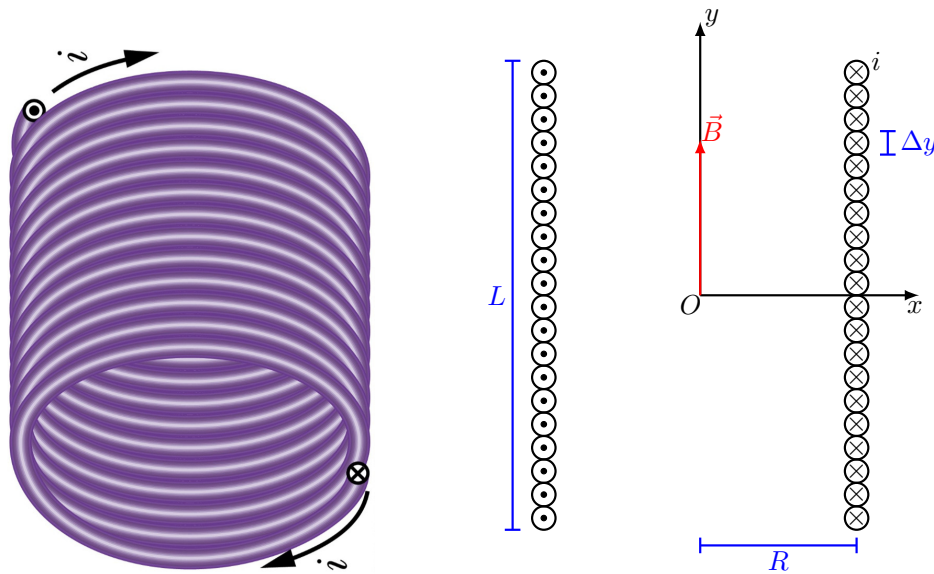


Figura G.1: Campo  $\vec{B}$  sobre o eixo central  $y$  de um solenóide de comprimento  $L$ , raio  $R$  e corrente  $i$  percorrendo  $N$  espiras.

Sabemos que cada espira indexada por  $j$  e localizada na altura  $y'_j$  produz em um ponto  $y$  genérico do eixo um campo  $\vec{B} = B\hat{y}$  (ver Seção 7.2.3), onde:

$$B(y, y'_j) = \frac{\mu_0 i R^2}{2[(y - y'_j)^2 + R^2]^{3/2}} \quad (\text{G.1})$$

O campo magnético total é obtido portanto somando as contribuições das  $N$  espiras:

$$B(y) = \sum_{j=1}^N B(y, y'_j) \quad (\text{G.2})$$

Podemos multiplicar esta soma por  $1 = \Delta y N/L = n\Delta y$ , onde  $n = N/L$  é a densidade linear de espiras:

$$B(y) = \sum_{j=1}^N B(y, y'_j) \times 1 = \sum_{j=1}^N B(y, y'_j) n \Delta y \quad (\text{G.3})$$

Assumindo que a espessura da espira  $\Delta y \rightarrow 0$  e  $N = nL \rightarrow \infty$ , podemos converter a soma em uma integral, obtendo:

$$\begin{aligned} B(y) &= \int_{-L/2}^{L/2} B(y, y') n \, dy' = \int_{-L/2}^{L/2} \frac{\mu_0 i R^2}{2[(y - y')^2 + R^2]^{3/2}} n \, dy' \\ &= \frac{\mu_0 i n R^2}{2} \int_{-L/2}^{L/2} \frac{dy'}{[(y' - y)^2 + R^2]^{3/2}} \\ &= \frac{\mu_0 i n R^2}{2} \left[ \frac{y' - y}{R^2 \sqrt{(y' - y)^2 + R^2}} \right]_{-L/2}^{L/2} \\ &= \frac{\mu_0 i n}{2} \left[ \frac{L/2 - y}{\sqrt{(L/2 - y)^2 + R^2}} + \frac{L/2 + y}{\sqrt{(L/2 + y)^2 + R^2}} \right] \end{aligned} \quad (\text{G.4})$$

O campo no ponto  $y = \alpha L/2$ , em função de  $\alpha$ :

$$B(\alpha) = \frac{\mu_0 i n}{2} \left[ \frac{(1 - \alpha)L/2}{\sqrt{(1 - \alpha)^2 (L/2)^2 + R^2}} + \frac{(1 + \alpha)L/2}{\sqrt{(1 + \alpha)^2 (L/2)^2 + R^2}} \right] \quad (\text{G.5})$$

Vamos considerar alguns casos.

## G.1 Centro do Solenóide

Primeiramente, para  $\alpha = 0$ ,  $y = 0$  e estamos no centro do solenóide. Neste caso:

$$B(y = 0) = \frac{\mu_0 i n}{2} \left[ \frac{L/2}{\sqrt{(L/2)^2 + R^2}} + \frac{L/2}{\sqrt{(L/2)^2 + R^2}} \right] = \mu_0 i n \left[ \frac{L/2}{\sqrt{(L/2)^2 + R^2}} \right] \quad (\text{G.6})$$

Para  $L \gg R$ , o colchete  $\rightarrow 1$  e re-obtemos o resultado do solenóide infinito via a Lei de Ampere, ou seja  $B(y = 0) = \mu_0 i n$  (Ver Seção 7.4.3).

## G.2 Bordas do Solenóide

Para  $\alpha = 1$  ou  $\alpha = -1$ , ou seja, nas fronteiras do solenóide temos em ambos os casos:

$$B(y = \pm L/2) = \frac{\mu_0 i n}{2} \left[ \frac{L}{\sqrt{L^2 + R^2}} \right] \quad (\text{G.7})$$

Para  $L \gg R$ , o colchete  $\rightarrow 1$  novamente e obtemos  $B(y = \pm L/2) = \mu_0 i n/2$ .

### G.3 Dentro ou Fora do Solenóide

Vamos considerar agora apenas valores  $\alpha > 0$  (eixo  $y$  positivo, i.e. parte superior do solenóide), mas  $\alpha \neq 1$ , pois este caso já foi considerado<sup>1</sup>. Como  $\sqrt{a^2} = |a|$ , podemos fatorar o resultado geral:

$$\begin{aligned}
 B(\alpha) &= \frac{\mu_0 i n}{2} \left[ \frac{(1-\alpha)L/2}{\sqrt{(1-\alpha)^2 (L/2)^2 + R^2}} + \frac{(1+\alpha)L/2}{\sqrt{(1+\alpha)^2 (L/2)^2 + R^2}} \right] \\
 &= \frac{\mu_0 i n}{2} \left[ \frac{(1-\alpha)L/2}{|1-\alpha|L/2\sqrt{1 + \left(\frac{2R}{(1-\alpha)L}\right)^2}} + \frac{(1+\alpha)L/2}{|1+\alpha|L/2\sqrt{1 + \left(\frac{2R}{(1+\alpha)L}\right)^2}} \right] \\
 &\approx \frac{\mu_0 i n}{2} \left\{ \frac{(1-\alpha)}{|1-\alpha|} \left[ 1 - \frac{1}{2} \left( \frac{2R}{(1-\alpha)L} \right)^2 + \dots \right] + \frac{(1+\alpha)}{|1+\alpha|} \left[ 1 - \frac{1}{2} \left( \frac{2R}{(1+\alpha)L} \right)^2 + \dots \right] \right\}
 \end{aligned} \tag{G.8}$$

Como estamos considerando apenas  $\alpha > 0$ , temos  $\alpha + 1 > 0$  e portanto  $\sqrt{(1+\alpha)^2} = |1+\alpha| = 1+\alpha$ .

#### G.3.1 Fora

Se  $\alpha > 1$ , estamos em  $y > L/2$ , portanto *fora* do solenóide. Neste caso  $1 - \alpha < 0$  e portanto  $\sqrt{(1-\alpha)^2} = |1-\alpha| = \alpha - 1$ . Temos então:

$$\begin{aligned}
 B(\alpha) &\approx \frac{\mu_0 i n}{2} \left\{ - \left[ 1 - \frac{1}{2} \left( \frac{2R}{(1-\alpha)L} \right)^2 + \dots \right] + \left[ 1 - \frac{1}{2} \left( \frac{2R}{(1+\alpha)L} \right)^2 + \dots \right] \right\} \\
 &\approx \mu_0 i n \left\{ \left( \frac{R}{(1-\alpha)L} \right)^2 - \left( \frac{R}{(1+\alpha)L} \right)^2 \right\} + \dots \\
 &\approx \mu_0 i n \left\{ \left( \frac{R}{L} \right)^2 \frac{(1+\alpha)^2 - (1-\alpha)^2}{(1-\alpha^2)^2} \right\} + \dots \\
 &\approx \mu_0 i n \left\{ \left( \frac{R}{L} \right)^2 \frac{2\alpha}{(1-\alpha^2)^2} \right\} + \dots
 \end{aligned} \tag{G.9}$$

Portanto, quando  $\alpha \gg 1$  (ponto muito afastado do solenóide), temos  $B \approx 0$  mesmo para solenóide finito. Além disso, quando  $L \gg R$  (solenóide muito longo), temos  $B \approx 0$  em qualquer ponto fora do solenóide, como esperado.

<sup>1</sup>Poderíamos considerar a parte inferior de forma similar.

### G.3.2 Dentro

Já se  $\alpha < 1$ , estamos em  $y < L/2$ , portanto *dentro* do solenóide. Neste caso  $1 - \alpha < 0$  e portanto  $\sqrt{(1 - \alpha)^2} = |1 - \alpha| = 1 - \alpha$ . Temos então:

$$\begin{aligned}
 B(\alpha) &\approx \frac{\mu_0 i n}{2} \left\{ \left[ 1 - \frac{1}{2} \left( \frac{2R}{(1 - \alpha)L} \right)^2 + \dots \right] + \left[ 1 - \frac{1}{2} \left( \frac{2R}{(1 + \alpha)L} \right)^2 + \dots \right] \right\} \\
 &\approx \mu_0 i n \left\{ 1 - \left[ \left( \frac{R}{(1 - \alpha)L} \right)^2 + \left( \frac{R}{(1 + \alpha)L} \right)^2 \right] \right\} + \dots \\
 &\approx \mu_0 i n \left\{ 1 - \left( \frac{R}{L} \right)^2 \frac{(1 + \alpha)^2 + (1 - \alpha)^2}{(1 - \alpha^2)^2} \right\} + \dots \\
 &\approx \mu_0 i n \left\{ 1 - 2 \left( \frac{R}{L} \right)^2 \frac{(1 + \alpha^2)}{(1 - \alpha^2)^2} \right\} + \dots
 \end{aligned} \tag{G.10}$$

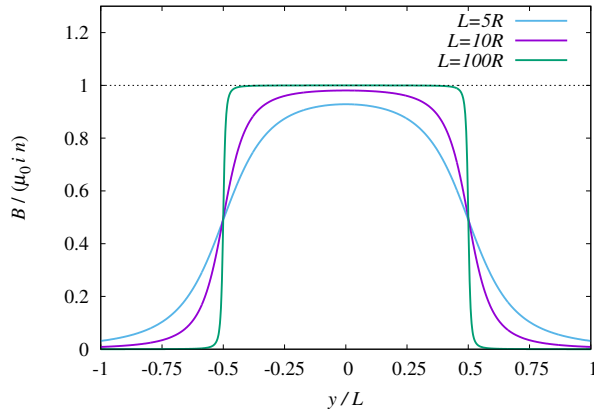


Figura G.2: Campo  $B(y)$  no eixo  $y$  de um solenóide de raio  $R$  e comprimento  $L$ . O campo está normalizado por  $\mu_0 i n$  (campo de um solenóide ideal:  $L \gg R$ ), e o ponto  $y$  pelo comprimento  $L$ .

Portanto, quando  $L \gg R$  (solenóide muito longo), temos  $B \approx \mu_0 i n$  em qualquer ponto dentro do solenóide, como esperado (Seção 7.4.3).

Desta forma, um solenóide longo tem, ao longo do seu eixo, um campo constante dentro do solenóide e zero fora dele. Note que na borda, o valor do campo é metade do valor dentro, descrevendo a transição suave que ocorrerá em qualquer caso de solenóide finito.

Na Fig. G.2, mostramos  $B(y)/(\mu_0 i n)$  versus  $y/L$  para diferentes valores de  $L/R$ , com  $B(y)$  dado pela Eq. G.4. Fica claro que para  $L \gg R$ , temos  $B(y) \approx \mu_0 i n$  dentro do solenóide e 0 fora dele.