

Apêndice E

Coordenadas Esféricas

Considere a Fig. E.1, que mostra a definição de coordenadas esféricas (r, θ, ϕ) em termos de coordenadas cartesianas (x, y, z) para qualquer ponto no espaço tri-dimensional. As coordenadas angulares θ e ϕ representam a longitude e latitude que caracterizam qualquer ponto em uma esfera de raio r .

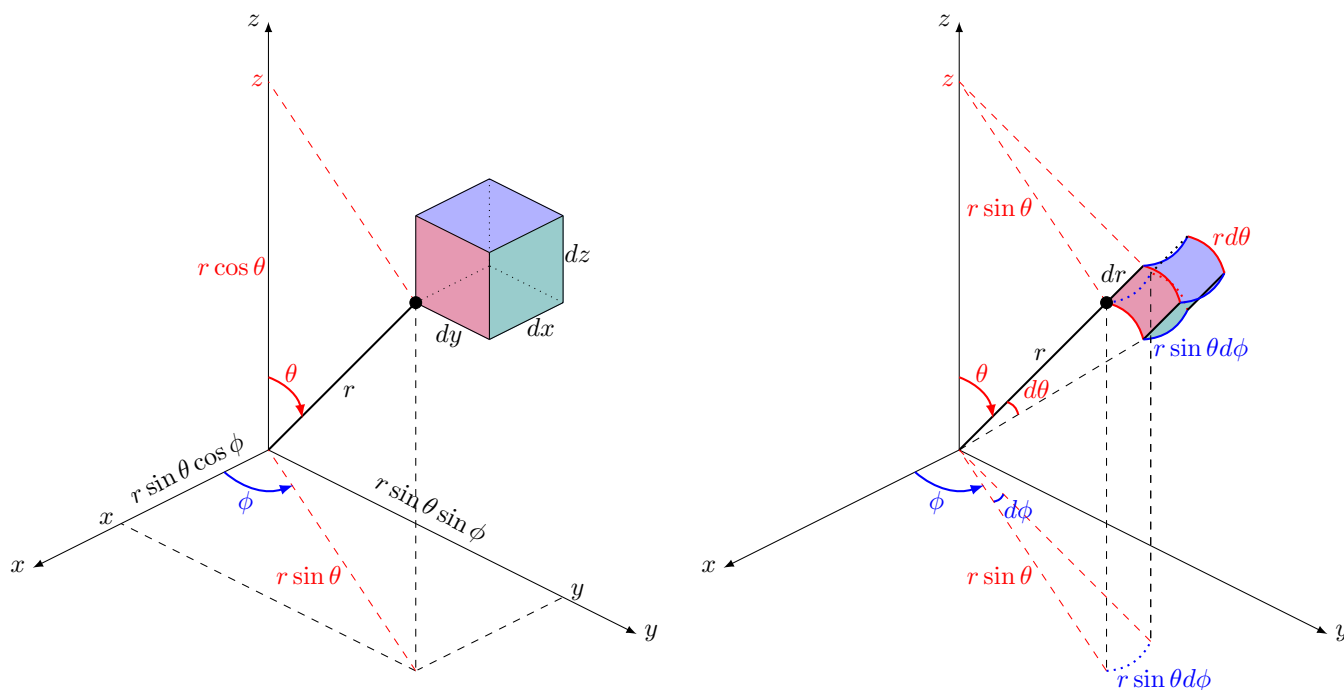


Figura E.1: Definição de coordenadas esféricas (r, θ, ϕ) em termos de coordenadas cartesianas (x, y, z) . O elemento de volume é dado por $dV = dx dy dz$ em coordenadas cartesianas e $dV = r^2 \sin \theta d\theta d\phi dr$ em coordenadas esféricas.

Da figura temos:

$$\begin{aligned}x &= r \sin \theta \cos \phi \\y &= r \sin \theta \sin \phi \\z &= r \cos \theta\end{aligned}\tag{E.1}$$

O elemento de volume em coordenadas cartesianas é

$$dV = dx dy dz \quad (\text{E.2})$$

enquanto em coordenadas esféricas ele é

$$dV = (r \sin \theta d\phi)(r d\theta) dr = r^2 \sin \theta dr d\theta d\phi \quad (\text{E.3})$$

Podemos também usar o jacobiano da transformação de coordenadas para obter este resultado. Das Eqs. E.1, temos os diferenciais:

$$dx = \sin \theta \cos \phi dr + r \cos \theta \cos \phi d\theta - r \sin \theta \sin \phi d\phi \quad (\text{E.4})$$

$$dy = \sin \theta \sin \phi dr + r \cos \theta \sin \phi d\theta + r \sin \theta \cos \phi d\phi \quad (\text{E.5})$$

$$dz = \cos \theta dr - r \sin \theta d\theta \quad (\text{E.6})$$

ou em termos matriciais

$$\begin{pmatrix} dx \\ dy \\ dz \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} \sin \theta \cos \phi & r \cos \theta \cos \phi & -r \sin \theta \sin \phi \\ \sin \theta \sin \phi & r \cos \theta \sin \phi & r \sin \theta \cos \phi \\ \cos \theta & -r \sin \theta & 0 \end{pmatrix}}_{A = \frac{\partial(x,y,z)}{\partial(r,\theta,\phi)}} \begin{pmatrix} dr \\ d\theta \\ d\phi \end{pmatrix} \quad (\text{E.7})$$

onde a matrix de transformação $A = \frac{\partial(x,y,z)}{\partial(r,\theta,\phi)}$. O jacobiano ($J = \det A = |A|$) é

$$\begin{aligned} J &= \det A = \left| \frac{\partial(x,y,z)}{\partial(r,\theta,\phi)} \right| \\ &= (r \cos \theta \cos \phi)(r \sin \theta \cos \phi)(\cos \theta) + (-r \sin \theta \sin \phi)(-r \sin \theta)(\sin \theta \sin \phi) \\ &\quad - (\cos \theta)(r \cos \theta \sin \phi)(-r \sin \theta \sin \phi) - (-r \sin \theta)(r \sin \theta \cos \phi)(\sin \theta \cos \phi) \\ &= r^2 \sin \theta \cos^2 \theta \cos^2 \phi + r^2 \sin^3 \theta \sin^2 \phi \\ &\quad + r^2 \sin \theta \cos^2 \theta \sin^2 \phi + r^2 \sin^3 \theta \cos^2 \phi \\ &= r^2 (\sin \theta \cos^2 \theta + \sin^3 \theta) \\ &= r^2 \sin \theta \end{aligned} \quad (\text{E.8})$$

Assim,

$$dV = dx dy dz = \left| \frac{\partial(x,y,z)}{\partial(r,\theta,\phi)} \right| dr d\theta d\phi = r^2 \sin \theta dr d\theta d\phi \quad (\text{E.9})$$

Para problemas com simetria esférica, podemos ter uma função que dependa apenas da coordenada radial r , i.e. $f = f(r)$. Neste caso, a integral de volume desta função fica:

$$\begin{aligned} \iiint f(r) dV &= \iiint f(r) r^2 \sin \theta dr d\theta d\phi = \int_0^r dr \int_0^\pi d\theta \int_0^{2\pi} d\phi f(r) r^2 \sin \theta \\ &= \underbrace{\int_0^{2\pi} d\phi}_{=2\pi} \underbrace{\int_0^\pi \sin \theta d\theta}_{=-\cos \theta|_0^\pi=2} \int_0^r f(r) r^2 dr \\ &= \int_0^r f(r) 4\pi r^2 dr \end{aligned} \quad (\text{E.10})$$

Ou seja, com simetria esférica o elemento de volume $dV = 4\pi r^2 dr$ é simplesmente uma casca esférica de área $4\pi r^2$ e espessura dr .