

# Capítulo 5

## Corrente e Resistência

### 5.1 Corrente Elétrica

A corrente elétrica  $i$  em um fio condutor é definida como a carga que atravessa a área do fio por unidade de tempo:

$$i = \frac{dQ}{dt} \quad (5.1)$$

Unidade de corrente: Ampere [A] = [C/s].

Convenção: Sentido da corrente = sentido de movimento de cargas *positivas*.

Se  $n$  é o número de partículas (portadores de carga) por unidade de volume que atravessam a área  $A$  de um fio condutor de comprimento  $\Delta x$ ,  $q$  é a carga de cada partícula, então a carga  $\Delta Q$  é dada por

$$\Delta Q = nq(A\Delta x) \quad (5.2)$$

Se as partículas se movem com velocidade  $v_d$  no condutor, então  $\Delta x = v_d \Delta t$  e

$$\Delta Q = nqAv_d \Delta t \quad (5.3)$$

e a corrente fica

$$i = \frac{\Delta Q}{\Delta t} = nqAv_d \quad (5.4)$$

A densidade de corrente  $j$  é definida

$$j = \frac{i}{A} = nqv_d = \rho v_d \quad (5.5)$$

onde  $\rho = nq$ . O vetor  $\vec{j}$  densidade de corrente é

$$\vec{j} = \rho \vec{v}_d \quad (5.6)$$

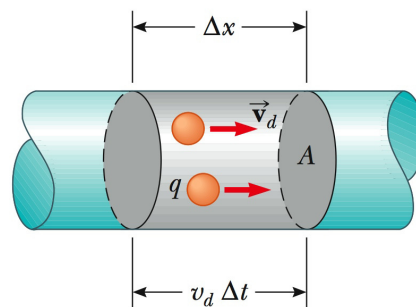


Figura 5.1: Cargas em movimento gerando corrente em um fio. (Serway)

## 5.2 Resistência Elétrica e Lei de Ohm

Em alguns dispositivos de circuito, temos que  $\vec{v}_d \propto \vec{E}$ , i.e.  $\vec{j} \propto \vec{E}$ . A constante de proporcionalidade é a *condutividade*  $\sigma$ :

$$\vec{j} = \sigma \vec{E} \quad (5.7)$$

Considere um trecho de um fio condutor de área transversal  $A$  e comprimento  $l$ . A diferença de potencial  $\Delta V$  entre as extremidades do trecho é

$$\Delta V = El \quad (5.8)$$

Por outro lado, a corrente no fio é dada por

$$i = jA = \sigma EA \quad (5.9)$$

Eliminando o campo  $E$ , obtemos

$$\Delta V = \frac{i}{\sigma A} l = \left( \frac{l}{\sigma A} \right) i \quad (5.10)$$

Portanto  $\Delta V \propto i$ , e a constante de proporcionalidade é a *resistência*  $R$ :

$$\Delta V = Ri \quad (5.11)$$

ou

$$R = \frac{\Delta V}{i} \quad (\text{Lei de Ohm}) \quad (5.12)$$

Unidade de resistência: Ohm  $[\Omega] = [V/A]$ .

Objetos para os quais a resistência, definida pela equação acima, é constante são ditos *ohmicos*. Um exemplo é o *resistor*. Um exemplo de dispositivo não-ohmico é o *diodo*, um semi-condutor cuja resistência é alta para correntes em um sentido e baixa no outro sentido.

A resistência pode ser escrita como

$$R = \frac{l}{\sigma A} = \rho \frac{l}{A} \quad (5.13)$$

onde  $\rho = 1/\sigma$  é a *resistividade* do material resistor.

## 5.3 Energia e Potência Elétrica

Em circuitos, a energia é transferida de uma fonte aos elétrons. Por exemplo, uma bateria converte energia química em energia cinética dos elétrons (corrente), e também em calor no condutor.

Quando uma corrente passa em um fio, ela transporta energia. A potência (energia por unidade de tempo) fornecida pela bateria para fazer a carga  $q$  se mover na diferença de potencial  $\Delta V$  é

$$P = \frac{dU}{dt} = \frac{d}{dt}(q\Delta V) = \frac{dq}{dt}\Delta V = i\Delta V \quad (5.14)$$

Unidade de potência: Watts  $[W] = [J/s]$ .

Se essa energia for dissipada no resistor, temos que a potência dissipada é (usando  $\Delta V = Ri$ ):

$$P = Ri^2 = \frac{(\Delta V)^2}{R} \quad (5.15)$$

## 5.4 Força Eletromotriz

Baterias: fornecem voltagem por meio de energia química → correntes estacionárias.

Voltagem nominal na ausência de corrente:  $\mathcal{E}$  = força eletromotriz (fem).

Bateria tem resistência interna  $r$  que diminui voltagem de  $ri$  quando existe corrente.

Voltagem real entre extremidades da bateria é

$$\Delta V = \mathcal{E} - ri \quad (5.16)$$

Se houver um resistor com resistência  $R$ , a voltagem no resistor é  $\Delta V$  e portanto

$$\Delta V = Ri \rightarrow \mathcal{E} - ri = Ri \rightarrow \mathcal{E} = Ri + ri \quad (5.17)$$

ou seja,

$$i = \frac{\mathcal{E}}{R + r} \quad (5.18)$$

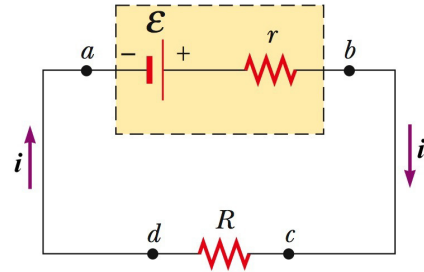


Figura 5.2: Circuito com resistor e bateria com resistência interna. (Serway)

## 5.5 Combinação de Resistores

### 5.5.1 Resistores em Série

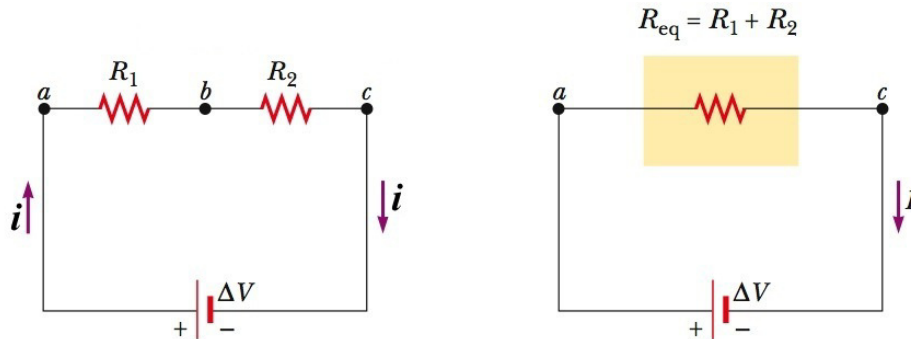


Figura 5.3: Resistores em série. (Halliday)

Para resistores em série, a corrente  $i$  é a mesma em todos os resistores. O resistor equivalente também será atravessado pela mesma corrente  $i$ , mas estará submetido a uma diferença de potencial igual à soma das diferenças de potencial de cada resistor:

$$V_1 = R_1 i, \quad V_2 = R_2 i, \dots \quad (5.19)$$

A diferença de potencial total fica

$$V = V_1 + V_2 + \dots = (R_1 + R_2 + \dots)i = R_{\text{eq}} i \quad (5.20)$$

e a resistência equivalente fica

$$R_{\text{eq}} = \sum_{i=1}^N R_i \quad (5.21)$$

### 5.5.2 Resistores em Paralelo

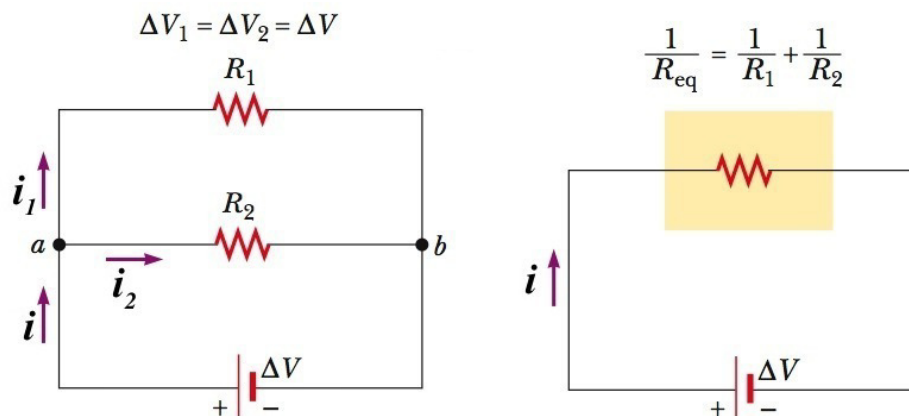


Figura 5.4: Resistores em paralelo. (Halliday)

Para resistores em paralelo, a voltagem  $V$  é a mesma em todos os resistores. O resistor equivalente também estará submetido à mesma voltagem  $V$ , mas, por conservação da carga, terá uma corrente igual à soma das correntes em cada resistor:

$$i_1 = \frac{V}{R_1}, \quad i_2 = \frac{V}{R_2}, \dots \quad (5.22)$$

A corrente total fica

$$i = i_1 + i_2 + \dots = V \left( \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \dots \right) = \frac{V}{R_{\text{eq}}} \quad (5.23)$$

Portanto, a resistência equivalente fica

$$\frac{1}{R_{\text{eq}}} = \sum_{i=1}^N \frac{1}{R_i} \quad (5.24)$$

## 5.6 Regras de Kirchhoff

1. **Lei dos nós:** A soma das correntes que entram em um nó é igual à corrente que sae do nó. Expressa Conservação da corrente:  $\sum_{\text{nó}} i = 0$ .
2. **Lei das malhas:** A soma das diferenças de potencial nos elementos de uma malha *fechada* do circuito é zero. Expressa independência do caminho para forças conservativas:  $\sum_{\text{malha}} V = 0$

Para aplicar essas regras em circuitos:

- Escolhemos direções arbitrárias para a(s) corrente(s). Se acharmos  $i < 0$ , o sentido é contrário.
- Iniciamos em um ponto arbitrário do circuito e atravessamos os vários dispositivos.
- Em transições ( $- \rightarrow +$ ), aumenta-se o potencial do valor correspondente, e.g.  $+\mathcal{E}$  ou  $+q/C$ . Em transições ( $+ \rightarrow -$ ), diminui-se o potencial do valor correspondente, e.g.  $-\mathcal{E}$  ou  $-q/C$ .
- Na *direção da corrente*, cada resistor diminui o potencial  $V$  de  $-Ri$ ; Na *direção oposta à corrente*, cada resistor aumenta o potencial  $V$  de  $Ri$ .

## 5.7 Circuito RC

### 5.7.1 Carregando o capacitor

Usando a regra da malha, temos:

$$\mathcal{E} - Ri - \frac{q}{C} = 0 \quad (5.25)$$

Como  $i = dq/dt$ , obtemos a seguinte equação diferencial:

$$\frac{dq}{dt} + \frac{q}{RC} = \frac{\mathcal{E}}{R} \quad (5.26)$$

Multiplicando ambos os lados por  $e^{t/RC}$ , e usando a regra do produto  $d(AB)/dt = (dA/dt)B + A(dB/dt)$ , obtemos:

$$\begin{aligned} \frac{dq}{dt} e^{t/RC} + \frac{q}{RC} e^{t/RC} &= \frac{\mathcal{E}}{R} e^{t/RC} \\ \frac{d}{dt} (q e^{t/RC}) &= e^{t/RC} \frac{\mathcal{E}}{R} \end{aligned} \quad (5.27)$$

Integrando esta equação, obtemos

$$\begin{aligned} q e^{t/RC} &= \int e^{t/RC} \frac{\mathcal{E}}{R} dt + K = \mathcal{E} C e^{t/RC} + K \\ \rightarrow q(t) &= \mathcal{E} C + K e^{-t/RC} \end{aligned} \quad (5.28)$$

onde  $K$  é uma constante. Chamando  $q(t=0) = q_0$ , e avaliando em  $t=0$  e assumindo que  $q(0) = 0$  (capacitor descarregado inicialmente), determinamos  $K$ :

$$0 = q(0) = \mathcal{E} C + K \rightarrow K = -\mathcal{E} C. \quad (5.29)$$

e portanto a solução para a carga no tempo fica

$$q(t) = \mathcal{E} C \left(1 - e^{-t/RC}\right) \quad (5.30)$$

Quando  $t \rightarrow \infty$ , temos  $q \rightarrow \mathcal{E} C$ , i.e. o capacitor se carrega até o ponto em que a voltagem entre suas placas é  $\mathcal{E}$ .

A corrente é dada diferenciando

$$i(t) = \frac{dq}{dt} = \frac{\mathcal{E}}{R} e^{-t/RC} \quad (5.31)$$

e vai a zero à medida que o capacitor é carregado.

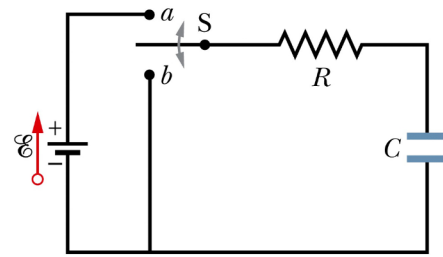


Figura 5.5: Capacitor carregando ou descarregando. (Halliday)

### 5.7.2 Descarregando o capacitor

Com o capacitor carregado, podemos desconectar a bateria e obter a evolução temporal da carga quando o capacitor passa a ser descarregado. Neste caso temos

$$-Ri - \frac{q}{C} = 0 \rightarrow \frac{dq}{dt} + \frac{q}{RC} = 0 \quad (5.32)$$

Procedimento idêntico nos leva a

$$q(t) = Ke^{-t/RC} \quad (5.33)$$

Como iniciamos com  $q(0) = q_0$ , onde  $q_0 = \mathcal{E}C$  é a carga do capacitor, temos  $K = q_0$  e

$$q(t) = \mathcal{E}C e^{-t/RC} \quad (5.34)$$

e a corrente fica

$$i(t) = -\frac{\mathcal{E}}{R} e^{-t/RC} \quad (5.35)$$

## 5.8 Energia do Campo Elétrico Revisitada

Considere que estamos carregando um capacitor. Temos

$$\mathcal{E} - Ri - \frac{q}{C} = 0 \quad (5.36)$$

Multiplicando essa equação por  $i = dq/dt$ , temos

$$\mathcal{E}i = Ri^2 + \frac{q}{C} \frac{dq}{dt} = 0 \quad (5.37)$$

O lado esquerdo representa a potência (energia por unidade de tempo) provida pela bateria. O primeiro termo do lado direito corresponde à potência dissipada como energia térmica no resistor. Por eliminação, o último termo representa a potência relacionada à energia armazenada no campo elétrico do capacitor:

$$\frac{dU_E}{dt} = \frac{q}{C} \frac{dq}{dt} = \frac{1}{2C} \frac{dq^2}{dt} = \frac{d}{dt} \left( \frac{q^2}{2C} \right) \rightarrow U_E = \frac{q^2}{2C} \quad (5.38)$$