

6

Análise pelo Método do Lugar das Raízes

6-1 INTRODUÇÃO

A característica básica da resposta transitória de um sistema a malha fechada está intimamente relacionada à localização dos pólos a malha fechada. Se o sistema tiver um ganho de malha variável, então a localização dos pólos de malha fechada depende do valor do ganho de malha escolhido. É importante, portanto, que o projetista saiba como os pólos a malha fechada se movem no plano s quando o ganho da malha é variado.

Do ponto de vista do projeto, em alguns sistemas o simples ajuste do ganho pode mover os pólos a malha fechada para os locais desejados. Então o problema do projeto pode se transformar na seleção de um valor de ganho apropriado. Se o ajuste do ganho sozinho não produzir um resultado desejado, será necessário o acréscimo de um compensador ao sistema. (Este assunto é discutido, em detalhes, no Cap. 7).

Os pólos a malha fechada são as raízes da equação característica. A determinação das raízes da equação característica de grau superior a três é trabalhosa e requer solução com o uso de computadores. (O MATLAB fornece uma solução simples para este problema.) Contudo, a simples determinação das raízes da equação característica pode ser de alcance limitado. Com efeito, à medida que o ganho da função de transferência a malha aberta varia, a equação característica se modifica e os cálculos necessitam ser repetidos.

Um método simples para determinar as raízes da equação característica foi desenvolvido por W. R. Evans e é amplamente usado em engenharia de controle. Este método, denominado *método do lugar das raízes*, é um procedimento pelo qual as raízes da equação característica são localizadas graficamente em função dos valores de um parâmetro do sistema. As raízes correspondentes a um valor particular deste parâmetro podem então ser localizadas no gráfico resultante. Note-se que, usualmente, o parâmetro é o ganho, porém qualquer outra variável da função de transferência a malha aberta pode ser utilizada. Salvo menção em contrário, será admitido que o ganho da função de transferência a malha aberta é o parâmetro a ser variado ao longo de toda a gama de valores possíveis, isto é, de zero a infinito.

Usando o método do lugar das raízes, o projetista pode prever os efeitos sobre a localização dos pólos a malha fechada devido à variação do valor do ganho ou ao acréscimo de pólos e/ou zeros a malha aberta. Portanto, o que se deseja é que o projetista tenha uma boa compreensão do método para esboçar os lugares das raízes do sistema a malha fechada, seja manualmente, seja através de recursos computacionais como o MATLAB.

Método do lugar das raízes. A idéia básica que fundamenta o método do lugar das raízes é a de que os valores de s que fazem a função de transferência de malha ser igual a -1 devem satisfazer a equação característica do sistema.

O lugar das raízes da equação característica do sistema a malha fechada, quando o ganho varia de zero a infinito, dá ao método o seu nome. O gráfico correspondente mostra claramente as contribuições de cada pólo ou cada zero a malha aberta nas localizações dos pólos a malha fechada.

No projeto de um sistema de controle linear verifica-se que o método do lugar das raízes se torna muito útil, uma vez que indica a maneira pela qual os pólos e zeros a malha aberta devem ser modificados para que a resposta satisfaça as especificações de desempenho do sistema. Este método é particularmente conveniente para que se obtenham resultados aproximados de modo muito rápido.

Alguns sistemas de controle podem envolver o ajuste de mais de um parâmetro. O diagrama do lugar das raízes para um sistema que tem múltiplos parâmetros pode ser construído variando-se um parâmetro de cada vez. Neste capítulo incluí-se a discussão dos lugares das raízes para um sistema com dois parâmetros. Os lugares das raízes para um tal caso recebem a denominação de *contorno das raízes*.

O método do lugar das raízes é uma técnica gráfica poderosa para investigar os efeitos do valor de um parâmetro do sistema sobre a localização dos pólos a malha fechada. Na maioria dos casos, o parâmetro considerado é o ganho de malha

K , embora possa ser qualquer outro parâmetro variável do sistema. Se o projetista seguir as regras gerais de construção do lugar das raízes, o esboço destes lugares se torna, na realidade, algo muito simples.

Uma vez que a geração do lugar das raízes através do MATLAB é um assunto muito simples, pode-se imaginar que o esboço manual destes lugares seja uma perda de tempo e de esforço. Contudo, a experiência em esboçar manualmente o lugar das raízes é de um valor inestimável na interpretação do lugar das raízes gerados por computador, bem como para se obter, rapidamente, uma idéia aproximada do lugar das raízes.

Através do método do lugar das raízes, é possível determinar o valor do ganho de malha K que produza o coeficiente de amortecimento prescrito para os pólos dominantes a malha fechada. Se a localização de um pólo ou de um zero for a variável do sistema, o método do lugar das raízes sugere a forma de escolher a localização do pólo ou do zero a malha aberta. (Ver o Exemplo 6-8 e os Problemas A-6-12 a A-6-14.) No Cap. 7 será mostrado mais sobre o projeto de sistemas de controle com base no método do lugar das raízes.

Escopo do capítulo. Este capítulo introduz o conceito básico do método do lugar das raízes e apresenta regras úteis para a construção gráfica dos lugares das raízes, bem como sua geração por meio do MATLAB.

O escopo do capítulo é o seguinte: a Seção 6-1 apresentou uma introdução ao método do lugar das raízes. A Seção 6-2 detalha os conceitos que servem de base ao método do lugar das raízes e apresenta o procedimento geral para se desenharem os lugares das raízes usando exemplos ilustrativos. A Seção 6-3 resume as regras gerais para a construção dos lugares das raízes e a Seção 6-4 discute a geração dos lugares das raízes por meio do MATLAB. A Seção 6-5 trata de casos especiais: o primeiro ocorre quando a variável K não aparece como um fator multiplicativo e o segundo caso quando o sistema a malha fechada apresenta retroação positiva. A Seção 6-6 analisa os sistemas a malha fechada através do método do lugar das raízes. A Seção 6-7 estende o método do lugar das raízes para tratar dos sistemas a malha fechada com retardo de transporte. Finalmente, a Seção 6-8 discute os gráficos de contorno das raízes.

6-2 DIAGRAMAS DE LUGAR DAS RAÍZES

Condições de ângulo e de módulo. Considere-se o sistema mostrado na Fig. 6-1. A função de transferência a malha fechada é

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{G(s)}{1 + G(s)H(s)} \quad (6-1)$$

A equação característica para este sistema a malha fechada é obtida igualando-se a zero o denominador da fração do segundo membro da Eq. (6-1). Isto é,

$$1 + G(s)H(s) = 0$$

ou

$$G(s)H(s) = -1 \quad (6-2)$$

Admite-se que $G(s)H(s)$ é uma razão de polinômios em s . [Posteriormente, na Seção 6-7, a análise será estendida ao caso em que $G(s)H(s)$ envolve o retardo de transporte e^{-Ts} .] Uma vez que $G(s)H(s)$ é uma quantidade complexa, a Eq. (6-2) deve ser desmembrada em duas equações a fim de se igualarem os ângulos e os módulos de ambos os membros da equação, respectivamente, para obter:

Condição angular:

$$\angle G(s)H(s) = \pm 180^\circ(2k + 1) \quad (k = 0, 1, 2, \dots) \quad (6-3)$$

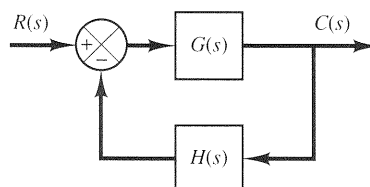


Fig. 6-1 Sistema de controle.

Condição de módulo:

$$|G(s)H(s)| = 1 \quad (6-4)$$

Os valores de s que satisfazem simultaneamente as condições de ângulo e de módulo são raízes da equação característica, ou os pólos a malha fechada. O gráfico dos pontos do plano complexo que satisfazem apenas a condição angular é o lugar das raízes. As raízes da equação característica (os pólos a malha fechada) correspondentes a um dado valor do ganho podem ser determinadas a partir da condição de módulo. Os detalhes da aplicação das condições de ângulo e de módulo a fim de se obterem os pólos a malha fechada são apresentados adiante, nesta seção.

Em muitos casos, $G(s)H(s)$ envolve um parâmetro de ganho K e a equação característica pode ser escrita como

$$1 + \frac{K(s + z_1)(s + z_2) \cdots (s + z_m)}{(s + p_1)(s + p_2) \cdots (s + p_n)} = 0 \quad (6-5)$$

Então os lugares das raízes para o sistema são os lugares dos pólos a malha fechada quando o ganho K é variado de zero a infinito.

Note-se que para começar o esboço dos lugares das raízes de um sistema pelo método do lugar das raízes, deve-se saber a localização dos pólos e zeros de $G(s)H(s)$. Deve-se lembrar que os ângulos das grandezas complexas que se originam dos pólos a malha aberta e dos zeros de malha aberta para o ponto de teste s são medidos no sentido anti-horário. Por exemplo, se $G(s)H(s)$ for dado por

$$G(s)H(s) = \frac{K(s + z_1)}{(s + p_1)(s + p_2)(s + p_3)(s + p_4)}$$

onde $-p_2$ e $-p_3$ são pólos complexos-conjugados, então o ângulo de $G(s)H(s)$ é

$$\angle G(s)H(s) = \phi_1 - \theta_1 - \theta_2 - \theta_3 - \theta_4$$

onde $\phi_1, \theta_1, \theta_2, \theta_3$ e θ_4 são medidos no sentido anti-horário conforme mostrado nas Fig. 6-2(a) e (b). O módulo de $G(s)H(s)$ para este sistema é

$$|G(s)H(s)| = \frac{KB_1}{A_1 A_2 A_3 A_4}$$

onde A_1, A_2, A_3, A_4 e B_1 são os módulos das grandezas complexas $s + p_1, s + p_2, s + p_3, s + p_4$ e $s + z_1$, respectivamente, conforme mostrado na Fig. 6-2(a).

Note-se que, devido ao fato de os pólos e zeros complexos-conjugados a malha aberta, se os houver, estarem sempre localizados simetricamente em torno do eixo real, os lugares das raízes são sempre simétricos em relação a este eixo. Portanto,

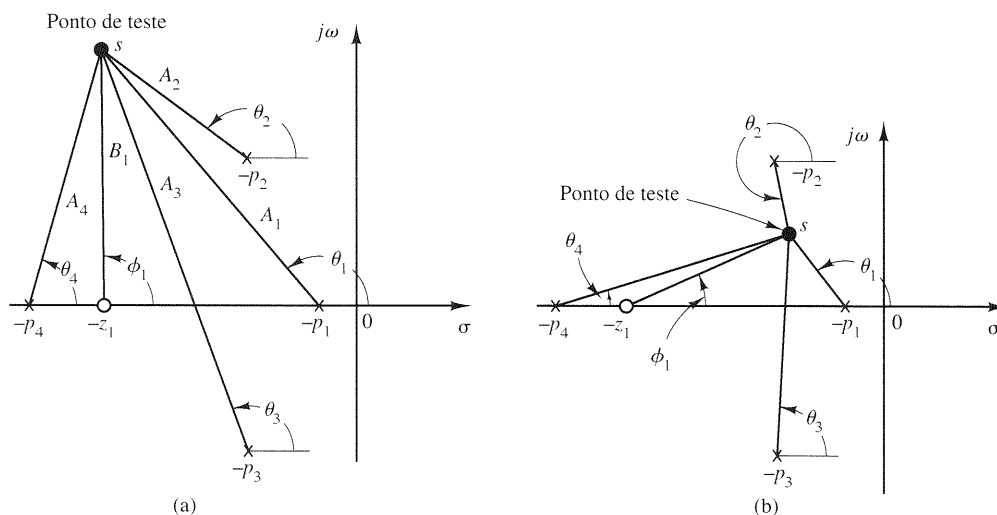


Fig. 6-2 (a) e (b) Diagramas mostrando a medida de ângulos, num ponto de testes, a partir de pólos e zeros a malha aberta.

necessita-se apenas construir a metade superior dos lugares das raízes e desenhar a imagem especular da metade superior na metade inferior do plano s .

Exemplos ilustrativos. Serão apresentados, a seguir, dois exemplos ilustrativos de construção de gráficos do lugar das raízes. Embora se disponham de métodos computacionais para a construção dos lugares das raízes, serão usados aqui meios gráficos de cálculo, combinados com inspeção, para determinar os lugares geométricos sobre os quais as raízes da equação característica do sistema a malha fechada devem permanecer. Um método gráfico deste tipo intensificará a compreensão de como os pólos a malha fechada se movem no plano complexo quando os pólos e zeros a malha aberta se deslocam. Embora sejam empregados somente sistemas simples com propósitos ilustrativos, o procedimento para achar os lugares das raízes não é mais complicado para os sistemas de ordem mais alta.

O primeiro passo no procedimento para a construção do gráfico do lugar das raízes é determinar os lugares das possíveis raízes utilizando a condição de ângulo. Posteriormente, se necessário, os lugares das raízes são calibrados ou graduados em ganho usando-se a condição de módulo.

Tendo em vista que estão envolvidas na análise medidas gráficas de ângulos e de módulos, torna-se necessário usar a mesma escala para o eixo das abcissas e para o eixo das ordenadas quando se esboçam o lugar das raízes em papel de gráficos (papel milimetrado ou quadriculado).

EXEMPLO 6-1

Considere-se o sistema indicado na Fig. 6-3. (Supõe-se que o valor do ganho K é não-negativo.) Para este sistema,

$$G(s) = \frac{K}{s(s+1)(s+2)}, \quad H(s) = 1$$

Vamos esboçar o gráfico do lugar das raízes e determinar posteriormente o valor de K para que o coeficiente de amortecimento ζ relativo ao par de pólos complexos-conjugados dominantes, a malha fechada, seja 0,5. Para o sistema dado, a condição de ângulo se torna

$$\begin{aligned} \angle G(s) &= \angle \frac{K}{s(s+1)(s+2)} \\ &= -\angle s - \angle s+1 - \angle s+2 \\ &= \pm 180^\circ(2k+1) \quad (k = 0, 1, 2, \dots) \end{aligned}$$

A condição de módulo é

$$|G(s)| = \left| \frac{K}{s(s+1)(s+2)} \right| = 1$$

Um procedimento típico para esboçar o gráfico do lugar das raízes é o seguinte:

1. Determinar os lugares das raízes sobre o eixo real. O primeiro passo na construção de um gráfico do lugar das raízes é localizar, no plano complexo, os pólos a malha aberta, $s = 0$, $s = -1$, e $s = -2$. (Não há zeros a malha aberta neste sistema.) As posições dos pólos a malha aberta são indicadas por cruzes. (As posições dos zeros a malha aberta serão indicadas neste livro por pequenos círculos.) Note-se que os pontos de partida dos lugares das raízes (os pontos correspondentes a $K = 0$) são os pólos a malha aberta. O número de lugares das raízes individuais para este sistema é três, que é igual ao número de pólos a malha aberta.

Para determinar os lugares das raízes sobre o eixo real, seleciona-se um ponto de teste s . Se o ponto de teste estiver sobre o eixo real positivo, então

$$\angle s = \angle s+1 = \angle s+2 = 0^\circ$$

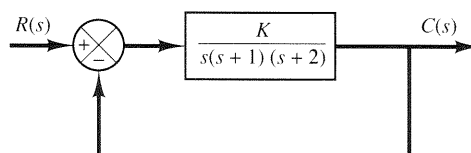


Fig. 6-3 Sistema de controle.

Isto indica que a condição de ângulo não pode ser satisfeita. Conseqüentemente, não há nenhum lugar das raízes sobre o eixo real positivo. Selecciona-se, em seguida, um ponto de teste sobre o eixo real negativo entre 0 e -1. Então,

$$\angle s = 180^\circ, \quad \angle s + 1 = \angle s + 2 = 0^\circ$$

Portanto,

$$-\angle s - \angle s + 1 - \angle s + 2 = -180^\circ$$

e a condição do ângulo é satisfeita. Portanto, o segmento do eixo real negativo entre 0 e -1 constitui uma parte do lugar das raízes. Se um ponto de teste for seleccionado entre -1 e -2, então

$$\angle s = \angle s + 1 = 180^\circ, \quad \angle s + 2 = 0^\circ$$

e

$$-\angle s - \angle s + 1 - \angle s + 2 = -360^\circ$$

Verifica-se então que a condição de ângulo não será satisfeita. Portanto, o segmento do eixo real negativo entre -1 e -2 não corresponde a uma parte do lugar das raízes. Analogamente, se um ponto de teste for localizado no segmento do eixo real negativo entre -2 e $-\infty$, a condição de ângulo será satisfeita. Conseqüentemente, existirá um lugar das raízes sobre o eixo real negativo entre 0 e -1 e entre -2 e $-\infty$.

2. Determinar as assíntotas dos lugares das raízes. As assíntotas dos lugares das raízes, à medida que s tende a infinito, podem ser determinadas como a seguir: se um ponto de teste for seleccionado muito distante da origem, então

$$\lim_{s \rightarrow \infty} G(s) = \lim_{s \rightarrow \infty} \frac{K}{s(s+1)(s+2)} = \lim_{s \rightarrow \infty} \frac{K}{s^3}$$

e a condição de ângulo se torna

$$-3\angle s = \pm 180^\circ(2k+1) \quad (k = 0, 1, 2, \dots)$$

ou

$$\text{Ângulos das assíntote} = \frac{\pm 180^\circ(2k+1)}{3} \quad (k = 0, 1, 2, \dots)$$

Uma vez que o ângulo se repete para diferentes valores de k , os ângulos distintos para as assíntotas são apenas 60° , -60° e 180° . Portanto, há três assíntotas. Aquela correspondente ao ângulo de 180° está sobre o eixo real negativo.

Antes de desenhar estas assíntotas no plano complexo, deve-se determinar onde elas interceptam o eixo real. Uma vez que

$$G(s) = \frac{K}{s(s+1)(s+2)} \quad (6-6)$$

se for considerado um ponto de teste bem longe da origem, então $G(s)$ pode ser escrito sob a forma

$$G(s) = \frac{K}{s^3 + 3s^2 + \dots} \quad (6-7)$$

Como a equação característica é

$$G(s) = -1$$

com base na Eq. (6-7), é possível escrevê-la sob a forma

$$s^3 + 3s^2 + \dots = -K$$

Se s for suposto muito grande, pode-se então aproximar esta equação característica pela seguinte equação

$$(s+1)^3 = 0$$

Designando-se por $s = -\sigma_a$ a abscissa da interseção das assíntotas no eixo real, então

$$\sigma_a = -1$$

e o ponto da origem das assíntotas é $(-1, 0)$. Estas assíntotas constituem parte do lugar das raízes nas regiões muito distantes da origem.

3. *Determinar o ponto de separação de partida.* Para desenhar precisamente o gráfico do lugar das raízes, deve-se determinar o ponto de separação de partida onde os ramos do lugar das raízes, originários dos pólos 0 e -1 , se separam, deixando o eixo real (à medida que o valor de K aumenta), e se movem para o plano complexo. O ponto de separação corresponde a um ponto no plano s onde ocorrem raízes múltiplas da equação característica.

Dispõe-se de um método simples para determinação do ponto de separação de partida. Este método será apresentado a seguir. Seja a equação característica escrita sob a forma

$$f(s) = B(s) + KA(s) = 0 \quad (6-8)$$

onde $A(s)$ e $B(s)$ não contêm K . Note-se que $f(s) = 0$ possui raízes múltiplas nos pontos onde

$$\frac{df(s)}{ds} = 0$$

Isto pode ser visto como se segue: suponha-se que $f(s)$ tenha raízes múltiplas de ordem r . Então $f(s)$ pode ser escrita como

$$f(s) = (s - s_1)^r (s - s_2) \cdots (s - s_n)$$

Derivando-se esta equação em relação a s e fazendo-se $s = s_1$, resulta então

$$\left. \frac{df(s)}{ds} \right|_{s=s_1} = 0 \quad (6-9)$$

Isto significa que as raízes múltiplas de $f(s)$ satisfazem a Eq. (6-9). Da Eq. (6-8) obtém-se

$$\frac{df(s)}{ds} = B'(s) + KA'(s) = 0 \quad (6-10)$$

onde

$$A'(s) = \frac{dA(s)}{ds}, \quad B'(s) = \frac{dB(s)}{ds}$$

O valor particular de K que fornecerá raízes múltiplas da equação característica é obtido da Eq. (6-10) como sendo

$$K = -\frac{B'(s)}{A'(s)}$$

Se este valor de K for substituído na Eq. (6-8), obtém-se

$$f(s) = B(s) - \frac{B'(s)}{A'(s)} A(s) = 0$$

ou

$$B(s)A'(s) - B'(s)A(s) = 0 \quad (6-11)$$

Se a Eq. (6-11) for resolvida em relação a s , podem ser obtidos os pontos onde ocorrem raízes múltiplas. Por outro lado, da Eq. (6-8) obtém-se

$$K = -\frac{B(s)}{A(s)}$$

e

$$\frac{dK}{ds} = -\frac{B'(s)A(s) - B(s)A'(s)}{A^2(s)}$$

Fazendo-se dK/ds igual a zero, obtém-se a mesma expressão da Eq. (6-11). Portanto, os pontos de separação de partida podem ser simplesmente determinados a partir das raízes de

$$\frac{dK}{ds} = 0$$

Deve-se notar que nem todas as soluções da Eq. (6-11) ou de $dK/ds = 0$ correspondem a pontos de separação de partidas reais. Se um ponto s para o qual $df(s)/ds = 0$ estiver sobre o lugar das raízes, ele é um ponto de separação de chegada ou de partida real. Dito de

outra maneira, se em um ponto em que $df(s)/ds = 0$ o valor de K assumir um valor positivo real, então o ponto s é um ponto de separação de partida ou de chegada real.

Para o presente exemplo, a equação característica $G(s) + 1 = 0$ é dada por

$$\frac{K}{s(s+1)(s+2)} + 1 = 0$$

ou

$$K = -(s^3 + 3s^2 + 2s)$$

Impondo $dK/ds = 0$, obtém-se

$$\frac{dK}{ds} = -(3s^2 + 6s + 2) = 0$$

ou

$$s = -0,4226, \quad s = -1,5774$$

Uma vez que o ponto de separação de partida deve permanecer sobre um lugar das raízes entre 0 e -1 , está claro que $s = -0,4226$ corresponde ao ponto de separação de partida real. O ponto $s = -1,5774$ não está sobre o lugar das raízes. Por conseguinte, este ponto não é um ponto de separação de partida ou de chegada real. De fato, o cálculo dos valores de K correspondentes a $s = -0,4226$ e $s = -1,5774$ gera

$$K = 0,3849, \quad \text{para } s = -0,4226$$

$$K = -0,3849, \quad \text{para } s = -1,5774$$

4. Determinar os pontos em que os lugares das raízes cruzam o eixo imaginário. Estes pontos podem ser achados pelo uso do critério de estabilidade de Routh conforme se segue. Como a equação característica para o presente sistema é

$$s^3 + 3s^2 + 2s + K = 0$$

o arranjo de Routh se torna

$$\begin{array}{ccc} s^3 & 1 & 2 \\ s^2 & 3 & K \\ s^1 & \frac{6-K}{3} & \\ s^0 & K & \end{array}$$

O valor de K que faz com que o termo s^1 na primeira coluna seja igual a zero é $K = 6$. Os pontos do cruzamento do eixo imaginário podem ser determinados pela solução da equação auxiliar obtida a partir da linha s^2 , isto é,

$$3s^2 + K = 3s^2 + 6 = 0$$

que fornece

$$s = \pm j\sqrt{2}$$

As frequências dos pontos de cruzamento no eixo imaginário são, portanto, $\omega = \pm\sqrt{2}$. O valor do ganho correspondente aos pontos de cruzamento é $K = 6$.

Uma abordagem alternativa consiste em substituir $s = j\omega$ na equação característica, igualar tanto a parte real como a parte imaginária a zero e então resolver para ω e K . Para o sistema dado, a equação característica, com $s = j\omega$, é

$$(j\omega)^3 + 3(j\omega)^2 + 2(j\omega) + K = 0$$

ou

$$(K - 3\omega^2) + j(2\omega - \omega^3) = 0$$

Igualando-se a zero as partes real e imaginária desta última equação, obtém-se

$$K - 3\omega^2 = 0, \quad 2\omega - \omega^3 = 0$$

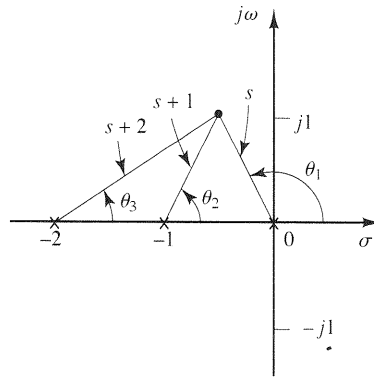


Fig. 6-4 Construção do lugar das raízes.

da qual

$$\omega = \pm\sqrt{2}, \quad K = 6 \quad \text{ou} \quad \omega = 0, \quad K = 0$$

Portanto, os lugares das raízes cruzam o eixo imaginário em $\omega = \pm\sqrt{2}$, e o valor de K nos pontos de cruzamento é 6. Além disso, um ramo do lugar das raízes no eixo real toca o eixo imaginário em $\omega = 0$.

5. Escolher um ponto de teste nas proximidades do eixo $j\omega$ e da origem, como indicado na Fig. 6-4, e aplicar a condição do ângulo. Se o ponto de teste estiver sobre o lugar das raízes, então a soma dos três ângulos $\theta_1 + \theta_2 + \theta_3$ deve ser 180° . Se o ponto de teste não satisfizer a condição do ângulo, seleciona-se um outro ponto de teste até que este a satisfaça. (A soma dos ângulos do ponto de teste indicará em que direção e sentido o ponto de teste deve ser movimentado.) Continua-se este processo e se localiza um número suficiente de pontos que satisfaça a condição do ângulo.

6. Esboçar os lugares das raízes com base na informação obtida nas etapas precedentes, conforme mostrado na Fig. 6-5.

7. Determinar um par de pólos a malha fechada dominantes, complexos-conjugados, tais que o coeficiente de amortecimento ζ seja 0,5. Os pólos a malha fechada com $\zeta = 0,5$ estão sobre as retas passando pela origem e fazendo ângulos de $\pm\cos^{-1}\zeta = \pm\cos^{-1}0,5 = \pm60^\circ$ com o eixo real negativo. Tais pólos a malha fechada, com $\zeta = 0,5$, são obtidos a partir da Fig. 6-5 como sendo:

$$s_1 = -0,3337 + j0,5780, \quad s_2 = -0,3337 - j0,5780$$

O valor de K que fornece estes pólos é determinado a partir da condição de módulo como segue

$$\begin{aligned} K &= |s(s+1)(s+2)|_{s=-0,3337+j0,5780} \\ &= 1,0383 \end{aligned}$$

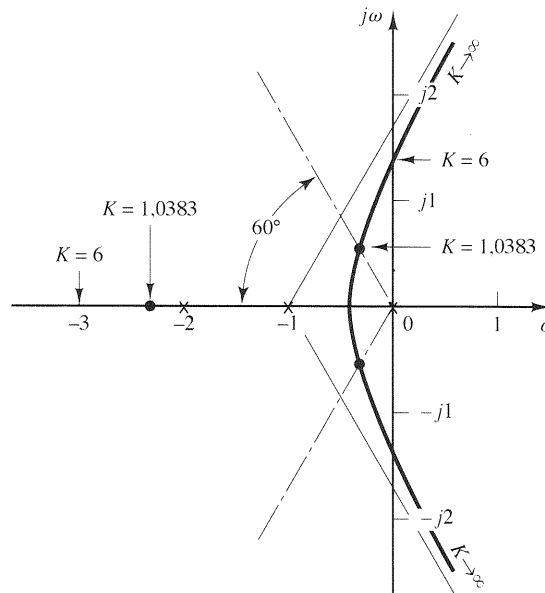


Fig. 6-5 Gráfico do lugar das raízes.

Usando-se este valor de K , obtém-se o terceiro pólo em $s = -2,3326$.

Note-se que, com base na etapa 4, é possível verificar que para $K = 6$ os pólos a malha fechada dominantes estão sobre o eixo imaginário em $s = \pm j\sqrt{2}$. Com este valor de K , o sistema exibirá oscilações mantidas. Para $K > 6$, os pólos a malha fechada dominantes estão no semiplano direito do plano, resultando em um sistema instável.

Note-se, finalmente, que se necessário, os lugares das raízes podem ser graduados facilmente em valores de K pelo uso da condição do módulo. Escolhe-se, simplesmente, um ponto sobre um dos ramos do lugar das raízes, medem-se os módulos dos três números complexos s , $s + 1$ e $s + 2$, multiplicam-se estes três módulos, e o produto resultante é igual ao valor do ganho K naquele ponto, ou

$$|s| \cdot |s + 1| \cdot |s + 2| = K$$

EXEMPLO 6-2

Neste exemplo será esboçado o gráfico do lugar das raízes de um sistema com pólos a malha aberta complexos-conjugados. Considere-se o sistema indicado na Fig. 6-6. Para este sistema

$$G(s) = \frac{K(s + 2)}{s^2 + 2s + 3}, \quad H(s) = 1$$

Verifica-se que $G(s)$ possui um par de pólos complexos conjugados em

$$s = -1 + j\sqrt{2}, \quad s = -1 - j\sqrt{2}$$

Um procedimento típico para esboçar o gráfico do lugar das raízes é o seguinte:

1. *Determinar os lugares das raízes sobre o eixo real.* Para qualquer ponto de teste s sobre o eixo real, a soma das contribuições angulares dos pólos complexos conjugados é 360° , como mostrado na Fig. 6-7. Portanto, a contribuição líquida dos pólos complexos-conjugados é zero sobre o eixo real. A localização do lugar das raízes sobre o eixo real é determinada pelo zero a malha aberta situado no semi-eixo real negativo. Um teste simples revela que o segmento do eixo real negativo, entre -2 e $-\infty$, constitui uma parte do lugar das raízes. Note-se que, como este lugar fica situado entre dois zeros (em $s = -2$ e $s = -\infty$) o segmento é, na realidade, uma parte de dois ramos do lugar das raízes, cada um deles partindo de um dos pólos complexos-conjugados. Em outras palavras, duas raízes devem coincidir na região sobre o eixo real negativo entre -2 e $-\infty$.

Como há dois pólos e um zero a malha aberta, há uma única assíntota que coincide com o semi-eixo real negativo.

2. *Determinar o ângulo de partida dos pólos a malha aberta complexos-conjugados.* A presença de um par de pólos de malha aberta complexos-conjugados requer a determinação do ângulo de partida destes pólos. O conhecimento deste ângulo é importante, uma vez que o lugar das raízes próximo ao pólo complexo fornece informação de como o lugar das raízes originário do pólo complexo migra para o eixo real ou se estende para a assíntota.

Com base na Fig. 6-8, se for escolhido um ponto de teste móvel nas proximidades do pólo complexo a malha aberta, em $s = -p_1$, verifica-se que a soma das contribuições angulares do pólo em $s = -p_2$ e do zero em $s = -z_1$ no ponto de teste móvel, pode ser consi-

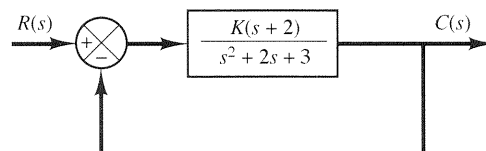


Fig. 6-6 Sistema de controle.

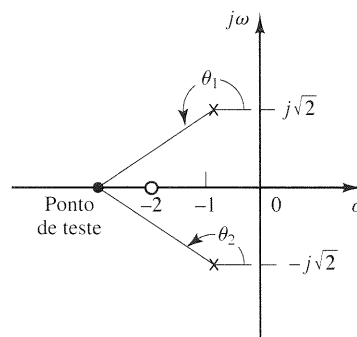


Fig. 6-7 Determinação do lugar das raízes sobre o eixo real.

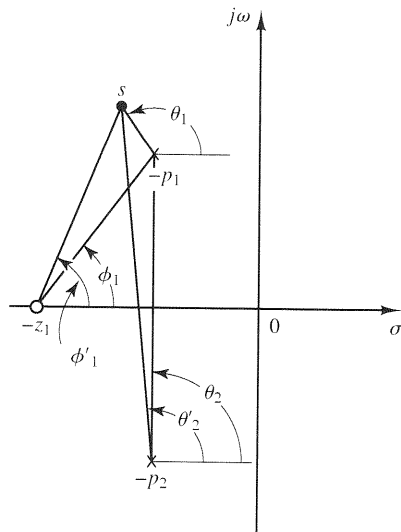


Fig. 6-8 Determinação do ângulo de partida.

derada constante, com um mesmo valor. Se o ponto de teste estiver sobre o lugar das raízes, então a soma de ϕ'_1 , $-\theta_1$ e $-\theta'_2$ deve ser $\pm 180^\circ (2k + 1)$ onde $k = 0, 1, 2, \dots$. Portanto, neste exemplo,

$$\phi'_1 - (\theta_1 + \theta'_2) = \pm 180^\circ (2k + 1)$$

ou

$$\theta_1 = 180^\circ - \theta'_2 + \phi'_1 = 180^\circ - \theta_2 + \phi_1$$

O ângulo de partida é então

$$\theta_1 = 180^\circ - \theta_2 + \phi_1 = 180^\circ - 90^\circ + 55^\circ = 145^\circ$$

Como o lugar das raízes é simétrico em relação ao eixo real, o ângulo de partida do pólo em $s = -p_2$ é -145° .

3. *Determinar o ponto de separação de chegada no eixo real.* Um ponto de separação de chegada no eixo real existe onde um par de ramos de lugar das raízes se funde quando K é aumentado. Para este problema, o ponto de separação de chegada no eixo real pode ser determinado como se segue. Uma vez que

$$K = -\frac{s^2 + 2s + 3}{s + 2}$$

tem-se

$$\frac{dK}{ds} = -\frac{(2s + 2)(s + 2) - (s^2 + 2s + 3)}{(s + 2)^2} = 0$$

que fornece

$$s^2 + 4s + 1 = 0$$

ou

$$s = -3,7320 \quad \text{ou} \quad s = -0,2680$$

Observe-se que o ponto $s = -3,7320$ está sobre o lugar das raízes. Assim, este ponto é um ponto de separação de chegada real. (Note-se que no ponto $s = -3,7320$ o correspondente valor do ganho é $K = 5,4641$.) Uma vez que o ponto $s = -0,2680$ não está sobre o lugar das raízes, ele não pode ser um ponto de separação de chegada. (Para o ponto $s = 0,2680$, o correspondente valor do ganho é $K = -1,4641$.)

4. *Esboçar o gráfico do lugar das raízes* com base na informação obtida nas etapas precedentes. Para determinar, com exatidão, o lugar das raízes, é necessário determinar diversos pontos entre o ponto de separação de chegada e os pólos a malha aberta complexos, usando a técnica de tentativa e erro (método experimental). (Para facilitar o esboço do gráfico do lugar das raízes, deve-se achar a direção na qual o ponto de teste deve ser movido, resumindo-se mentalmente as variações nos ângulos dos pólos e dos zeros.) A Fig. 6-9 mostra o gráfico completo do lugar das raízes referente ao sistema considerado.

O valor do ganho K em qualquer ponto do lugar das raízes pode ser determinado aplicando-se a condição do módulo. Por exemplo, o valor de K para o qual os pólos complexos-conjugados a malha fechada apresentam um coeficiente de amortecimento $\zeta = 0,7$ pode

ser determinado pela localização das raízes, como indicado na Fig. 6-9, e calculado o valor de K como se segue:

$$K = \left| \frac{(s + 1 - j\sqrt{2})(s + 1 + j\sqrt{2})}{s + 2} \right|_{s=-1,67+j1,70} = 1,34$$

Observa-se que neste sistema o lugar das raízes no plano complexo é parte de um círculo. Um tal lugar das raízes circular não ocorre na maioria dos sistemas. Lugares das raízes circulares podem ocorrer em sistemas que envolvam dois pólos e um zero, dois pólos e dois zeros, ou um pólo e dois zeros. Mesmo em tais sistemas, a ocorrência ou não dos lugares das raízes circulares depende da localização dos pólos e zeros envolvidos.

Para mostrar a ocorrência de um lugar das raízes circular no presente sistema, necessita-se deduzir a equação do lugar das raízes. Para o presente sistema, a condição de ângulo é

$$\angle s + 2 - \angle s + 1 - j\sqrt{2} - \angle s + 1 + j\sqrt{2} = \pm 180^\circ(2k + 1)$$

Se $s = \sigma + j\omega$ for substituído nesta última equação, obtém-se

$$\angle \sigma + 2 + j\omega - \angle \sigma + 1 + j\omega - j\sqrt{2} - \angle \sigma + 1 + j\omega + j\sqrt{2} = \pm 180^\circ(2k + 1)$$

que pode ser escrita como

$$\tan^{-1}\left(\frac{\omega}{\sigma + 2}\right) - \tan^{-1}\left(\frac{\omega - \sqrt{2}}{\sigma + 1}\right) - \tan^{-1}\left(\frac{\omega + \sqrt{2}}{\sigma + 1}\right) = \pm 180^\circ(2k + 1)$$

ou

$$\tan^{-1}\left(\frac{\omega - \sqrt{2}}{\sigma + 1}\right) + \tan^{-1}\left(\frac{\omega + \sqrt{2}}{\sigma + 1}\right) = \tan^{-1}\left(\frac{\omega}{\sigma + 2}\right) \pm 180^\circ(2k + 1)$$

Tomando as tangentes de ambos os membros desta última equação e usando a relação

$$\tan(x \pm y) = \frac{\tan x \pm \tan y}{1 \mp \tan x \tan y} \quad (6-12)$$

obtém-se

$$\tan \left[\tan^{-1}\left(\frac{\omega - \sqrt{2}}{\sigma + 1}\right) + \tan^{-1}\left(\frac{\omega + \sqrt{2}}{\sigma + 1}\right) \right] = \tan \left[\tan^{-1}\left(\frac{\omega}{\sigma + 2}\right) \pm 180^\circ(2k + 1) \right]$$

ou

$$\frac{\frac{\omega - \sqrt{2}}{\sigma + 1} + \frac{\omega + \sqrt{2}}{\sigma + 1}}{1 - \left(\frac{\omega - \sqrt{2}}{\sigma + 1}\right)\left(\frac{\omega + \sqrt{2}}{\sigma + 1}\right)} = \frac{\frac{\omega}{\sigma + 2} \pm 0}{1 \mp \frac{\omega}{\sigma + 2} \times 0}$$

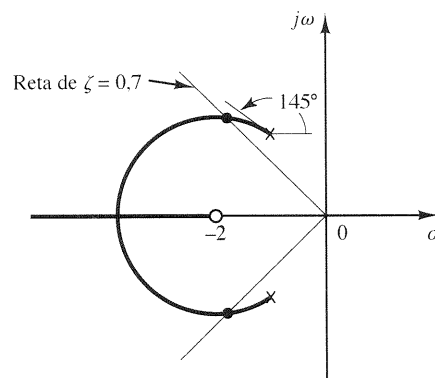


Fig. 6-9 Gráfico do lugar das raízes.

que pode ser simplificada para

$$\frac{2\omega(\sigma + 1)}{(\sigma + 1)^2 - (\omega^2 - 2)} = \frac{\omega}{\sigma + 2}$$

ou

$$\omega[(\sigma + 2)^2 + \omega^2 - 3] = 0$$

Esta última equação é equivalente a

$$\omega = 0 \quad \text{ou} \quad (\sigma + 2)^2 + \omega^2 = (\sqrt{3})^2$$

Estas duas expressões são as equações dos lugares das raízes para o presente sistema. Observe-se que a primeira equação, $\omega = 0$, é a equação do eixo real. O eixo real de $s = -2$ até $s = -\infty$ corresponde a um lugar das raízes para $K \geq 0$. A parte remanescente do eixo real corresponde a um lugar das raízes quando K é negativo. (No presente sistema, K é não-negativo.) A segunda equação para o lugar das raízes é uma equação de um círculo com centro em $\sigma = -2$, $\omega = 0$ e o raio igual a $\sqrt{3}$. A parte do círculo à esquerda dos pólos complexos conjugados corresponde a um lugar das raízes para $K \geq 0$. A parte restante do círculo corresponde a um lugar das raízes quando K for negativo.

É importante notar que equações facilmente interpretáveis para o lugar das raízes podem ser deduzidas apenas para sistemas simples. Para sistemas complicados com muitos pólos e zeros, qualquer tentativa de deduzir equações dos lugares das raízes é desencorajada. Tais equações deduzidas são muito complicadas e sua configuração no plano complexo é difícil de visualizar.

6-3 RESUMO DAS REGRAS GERAIS PARA CONSTRUÇÃO DOS LUGARES DAS RAÍZES

Para um sistema complicado com muitos pólos e zeros a malha aberta, a construção do gráfico do lugar das raízes pode parecer complicada, porém, na realidade, não é difícil se forem aplicadas as regras para construção dos lugares das raízes. Pela localização de pontos particulares e assíntotas, e pelo cálculo de ângulos de partida de pólos complexos e ângulos de chegada em zeros complexos, pode-se construir a forma geral dos lugares das raízes sem dificuldade.

Algumas das regras para construção dos lugares das raízes foram dadas na Seção 6-2. A finalidade desta seção é resumir as regras gerais para a construção dos lugares das raízes do sistema indicado na Fig. 6-10. Embora o método do lugar das raízes seja baseado essencialmente em uma técnica de tentativa e erro, o número de tentativas necessárias pode ser reduzido significativamente se estas regras forem usadas.

Regras gerais para construção dos lugares das raízes. Será fornecido agora um resumo das regras e procedimentos gerais para construção dos lugares das raízes do sistema mostrado na Fig. 6-10.

Obtenha-se, inicialmente, a equação característica

$$1 + G(s)H(s) = 0$$

e seja feito um rearranjo desta equação de modo que o parâmetro sob interesse apareça como um fator multiplicativo na forma

$$1 + \frac{K(s + z_1)(s + z_2) \cdots (s + z_m)}{(s + p_1)(s + p_2) \cdots (s + p_n)} = 0 \quad (6-13)$$

Nas discussões presentes, supõe-se que o parâmetro de interesse é o ganho K , onde $K > 0$. (Se $K < 0$, que corresponde ao caso de retroação positiva, a condição de ângulo deve ser modificada. Ver a Seção 6-5.) Note-se, entretanto, que o método ainda é aplicável a sistemas com parâmetros de interesse diferentes do ganho.

1. *Locar os pólos e zeros a malha aberta de $G(s)H(s)$ no plano s . Os ramos dos lugares das raízes começam nos pólos a malha aberta e terminam nos zeros a malha aberta (zeros finitos ou zeros no infinito).* A partir da forma fatorada da

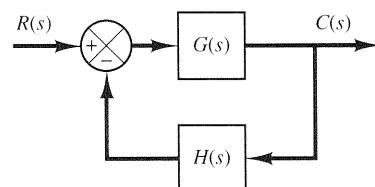


Fig. 6-10 Sistema de controle.

função de transferência a malha aberta, locam-se os pólos e zeros a malha aberta no plano s . [Note-se que os zeros a malha aberta são os zeros de $G(s)H(s)$, enquanto os zeros a malha fechada consistem nos zeros de $G(s)$ e nos pólos de $H(s)$.]

Note-se que os lugares das raízes são simétricos em relação ao eixo real do plano s porque os pólos complexos e os zeros complexos ocorrem somente em pares conjugados.

Acham-se os pontos de início e os pontos onde terminam os lugares das raízes, bem como o número de ramos destacados. Os pontos no lugar das raízes que correspondem a $K = 0$ são os pólos a malha aberta. Isto pode ser constatado a partir da condição de módulo, fazendo-se K tender para zero, ou seja

$$\lim_{K \rightarrow 0} \left| \frac{(s + z_1)(s + z_2) \cdots (s + z_m)}{(s + p_1)(s + p_2) \cdots (s + p_n)} \right| = \lim_{K \rightarrow 0} \frac{1}{K} = \infty$$

Esta última equação implica que, à medida que K se reduz, o valor de s se aproxima de um dos pólos a malha aberta. Portanto, cada lugar das raízes se origina num pólo da função de transferência a malha aberta $G(s)H(s)$. À medida que o valor de K aumenta, tendendo a infinito, cada trecho do lugar das raízes se aproxima ou de um zero da função de transferência a malha aberta, ou de um ponto do plano complexo, no infinito. Isto pode ser visto como a seguir: fazendo-se K tender para infinito na condição de módulo, então

$$\lim_{K \rightarrow \infty} \left| \frac{(s + z_1)(s + z_2) \cdots (s + z_m)}{(s + p_1)(s + p_2) \cdots (s + p_n)} \right| = \lim_{K \rightarrow \infty} \frac{1}{K} = 0$$

Portanto, o valor de s deve tender para um dos zeros a malha aberta finitos ou para um dos zeros no infinito. [Incluindo-se o número de zeros no infinito na contagem, $G(s)H(s)$ possui o mesmo número de pólos e de zeros.]

Um gráfico do lugar das raízes possui tantos ramos quantas são as raízes da equação característica. Uma vez que o número de pólos a malha aberta geralmente excede o de zeros, o número de ramos é igual ao número de pólos. Se o número de pólos a malha fechada for o mesmo que os pólos a malha aberta, então o número de ramos individuais do lugar das raízes que terminam em zeros finitos é igual ao número m dos zeros a malha aberta. Os $n - m$ ramos restantes terminarão no infinito ($n - m$ zeros implícitos no infinito) ao longo das assíntotas.

Se forem incluídos pólos e zeros no infinito, o número de pólos a malha aberta é igual ao número de zeros a malha aberta. Portanto, é sempre possível enunciar que os lugares das raízes começam nos pólos de $G(s)H(s)$ e terminam nos zeros de $G(s)H(s)$, quando K varia de zero a infinito, incluídos aí pólos e zeros finitos no plano s e os situados no infinito.

2. Determinar os lugares das raízes sobre o eixo real. Os lugares das raízes sobre o eixo real são determinados pelos pólos e zeros a malha aberta existentes sobre ele. Os pólos e zeros complexos-conjugados da função de transferência a malha aberta não influenciam a locação do lugar das raízes sobre o eixo real, uma vez que a contribuição angular de um par de pólos ou de zeros complexos-conjugados é de 360° sobre o eixo real. Cada parte do lugar das raízes sobre o eixo real se estende de um pólo ou zero a outro pólo ou zero. Para se construir o lugar das raízes sobre o eixo real escolhe-se um ponto de teste sobre ele. Se o número de raízes reais (pólos e zeros) à direita do ponto de teste for ímpar, então este é um ponto do lugar das raízes. O lugar das raízes e seu complemento formam segmentos alternados ao longo do eixo real.

3. Determinar as assíntotas dos lugares das raízes. Se o ponto de teste estiver localizado muito longe da origem, então o valor de ângulo de cada grandeza complexa pode ser considerado o mesmo. Os efeitos de um zero a malha aberta e um pólo a malha aberta se cancelam mutuamente. Por conseguinte, os lugares das raízes para valores grandes de s devem ser assintóticos a retas cujos valores angulares de inclinação são dados por

$$\hat{\text{Ângulos das assíntotas}} = \frac{\pm 180^\circ(2k + 1)}{n - m} \quad (k = 0, 1, 2, \dots)$$

onde n = número dos pólos finitos de $G(s)H(s)$

m = número de zeros finitos de $G(s)H(s)$

Aqui, $k = 0$ corresponde às assíntotas com o menor ângulo em relação ao eixo real. Embora k possa ter um número infinito de valores, à medida que k aumenta, a determinação angular se repete, e o número de assíntotas distintas é $n - m$.

Todas as assíntotas se interceptam sobre o eixo real. O ponto no qual elas se cruzam é obtido da seguinte maneira: expandindo-se o numerador e o denominador da função de transferência o resultado é

$$G(s)H(s) = \frac{K[s^m + (z_1 + z_2 + \cdots + z_m)s^{m-1} + \cdots + z_1 z_2 \cdots z_m]}{s^n + (p_1 + p_2 + \cdots + p_n)s^{n-1} + \cdots + p_1 p_2 \cdots p_n}$$

Se o ponto de teste for colocado bastante distante da origem, então, dividindo-se o denominador pelo numerador, é possível escrever $G(s)H(s)$ sob a forma

$$G(s)H(s) = \frac{K}{s^{n-m} + [(p_1 + p_2 + \cdots + p_n) - (z_1 + z_2 + \cdots + z_m)]s^{n-m-1} + \cdots}$$

Como a equação característica é

$$G(s)H(s) = -1$$

ela pode ser escrita como

$$s^{n-m} + [(p_1 + p_2 + \dots + p_n) - (z_1 + z_2 + \dots + z_m)]s^{n-m-1} + \dots = -K \quad (6-14)$$

A Eq. (6-14), para valores grandes de s , pode ser aproximada por

$$\left[s + \frac{(p_1 + p_2 + \dots + p_n) - (z_1 + z_2 + \dots + z_m)}{n - m} \right]^{n-m} = 0$$

Designando-se a abcissa do ponto de interseção das assíntotas sobre o eixo real por $s = \sigma_a$, então,

$$\sigma_a = -\frac{(p_1 + p_2 + \dots + p_n) - (z_1 + z_2 + \dots + z_m)}{n - m} \quad (6-15)$$

ou

$$\sigma_a = \frac{(\text{soma dos pólos}) - (\text{soma dos zeros})}{n - m} \quad (6-16)$$

Tendo em vista que todos os pólos e zeros complexos ocorrem em pares conjugados, σ_a é sempre uma grandeza real. Uma vez que se tenha determinado o ponto de interseção das assíntotas sobre o eixo real, é possível traçá-las prontamente no plano complexo.

É importante observar que as assíntotas mostram o comportamento dos lugares das raízes para $|s| \gg 1$. Um ramo do lugar das raízes pode permanecer de um dos lados da assíntota correspondente ou cruzá-la de um lado para outro.

4. Determinar os pontos de separação de partida e os pontos de separação de chegada. Em virtude da simetria dos lugares das raízes em relação ao eixo real, os pontos de separação de partida e de chegada ou estão situados sobre o eixo real ou ocorrem em pontos complexos-conjugados.

Se o lugar das raízes ocorrer sobre o eixo real entre dois pólos adjacentes, existe, pelo menos, um ponto de separação de partida entre os dois pólos. De modo análogo, se o lugar das raízes ocorrer entre dois zeros adjacentes (um dos zeros pode estar localizado em $-\infty$) sobre o eixo real, então existe, pelo menos, um ponto de separação de chegada entre os dois zeros. Se o lugar das raízes ocorrer sobre o eixo real entre um pólo e um zero a malha aberta (finito ou infinito), não ocorrem isoladamente pontos de partida ou de chegada, ou então devem existir ambos.

Suponha-se que a equação característica seja dada por

$$B(s) + KA(s) = 0$$

Os pontos de separação de partida e os pontos de separação de chegada correspondem a raízes múltiplas da equação característica. Por conseguinte, os pontos de separação de partida e de chegada podem ser determinados a partir das raízes de

$$\frac{dK}{ds} = -\frac{B'(s)A(s) - B(s)A'(s)}{A^2(s)} = 0 \quad (6-17)$$

onde o apóstrofo indica derivação em relação a s . É importante notar que os pontos de separação de partida e de chegada devem ser raízes da Eq. (6-17), mas nem todas as raízes da Eq. (6-17) são pontos de separação de partida ou de chegada. Se uma raiz real da Eq. (6-17) permanecer sobre a porção do lugar das raízes do eixo real, então ela é um ponto de separação de partida ou de chegada real. Se uma raiz real da Eq. (6-17) não estiver sobre a porção do lugar das raízes do eixo real, então esta raiz não corresponde nem a um ponto de separação de partida nem a um ponto de separação de chegada. Se duas raízes da Eq. (6-17) $s = s_j$ e $s = -s_j$ são um par de complexos-conjugados e se não há certeza de que estão sobre os lugares das raízes, então é necessário verificar o correspondente valor de K . Se o valor de K correspondente a uma raiz de $dK/ds = 0$, $s = s_j$, for positivo, o ponto $s = s_j$ será um ponto de separação de partida ou de chegada real. (Como K é suposto não-negativo, se o valor de K assim obtido for negativo, então o ponto $s = s_j$ não será nem um ponto de separação de partida nem um ponto de separação de chegada.)

5. Determinar o ângulo de partida (ou ângulo de chegada) dos lugares das raízes de um pólo complexo (a um zero complexo). Para que sejam esboçados os lugares das raízes com razoável precisão, deve-se determinar as direções dos lugares das raízes nas proximidades dos pólos e dos zeros complexos. Se for escolhido um ponto de teste e este for movido em uma vizinhança muito próxima de um pólo complexo (ou zero complexo), pode-se considerar que a soma das contribuições angulares de todos os outros pólos e zeros permanecerá a mesma. Portanto, o ângulo de partida (ou o ângulo de chegada) do lugar das raízes de um pólo complexo (ou a um zero complexo) pode ser determinado subtraindo-se de 180°

a soma de todos os ângulos dos vetores com origem nos outros pólos e zeros e com extremidade final no pólo complexo (ou zero complexo) em questão, incluindo-se os sinais apropriados.

Ângulo de partida de um pólo complexo = 180°

- (soma dos ângulos dos vetores com extremidade final no pólo complexo em questão e origem nos outros pólos)
- + (soma dos ângulos dos vetores com extremidade final no pólo complexo em questão e origem nos zeros)

Ângulo de chegada em um zero complexo = 180°

- (soma dos ângulos dos vetores com extremidade final no zero complexo em questão e origem nos outros zeros)
- + (soma dos ângulos dos vetores com extremidade final no zero complexo em questão e origem nos pólos)

O ângulo de partida é mostrado na Fig. 6-11.

6. Determinar os pontos onde os lugares das raízes cruzam o eixo imaginário. Os pontos onde os lugares das raízes interceptam o eixo $j\omega$ podem ser facilmente determinados (a) pelo uso do critério de estabilidade de Routh, (b) pela substituição de $s = j\omega$ na equação característica, igualando a zero tanto a parte real quanto a parte imaginária e resolvendo para ω e K . O valor de ω assim determinado fornece a frequência na qual o lugar das raízes cruza o eixo imaginário. O valor de K correspondente a cada frequência de cruzamento dá o ganho no ponto de cruzamento.

7. Obter uma série de pontos de teste numa região abrangente em torno da origem do plano s e esboçar os lugares das raízes. Determinar os lugares das raízes numa região abrangente em torno do eixo $j\omega$ e da origem. A parte mais importante dos lugares das raízes diz respeito não ao trecho sobre o eixo real ou sobre as assíntotas, mas aos trechos nas vizinhanças do eixo $j\omega$ e da origem. A forma do lugar das raízes nesta importante região do plano s deve ser obtida com suficiente exatidão.

8. Determinar os pólos a malha fechada. Um ponto particular sobre cada um dos ramos do lugar das raízes será um pólo a malha fechada se o valor de K neste ponto satisfizer a condição de módulo. Reciprocamente, a condição de módulo capacita a determinação do valor de ganho K correspondente a uma localização de raiz específica sobre o lugar das raízes. (Se necessário, pode-se graduar os lugares das raízes em função de K . Os lugares são contínuos com K .)

O valor de K correspondente a qualquer ponto s sobre um lugar das raízes pode ser obtido usando a condição de módulo, ou

$$K = \frac{\text{produto das distâncias do ponto } s \text{ aos pólos}}{\text{produto das distâncias do ponto } s \text{ aos zeros}}$$

Este valor pode ser calculado quer graficamente, quer analiticamente.

Se o ganho K da função de transferência a malha aberta for dado no problema, então, pela aplicação da condição de módulo, pode-se achar as localizações corretas dos pólos a malha fechada correspondentes, em cada um dos lugares das raízes. Esta determinação pode ser feita por um método de tentativa e erro ou através do uso do MATLAB como será apresentado na Seção 6-4.

Comentários sobre os gráficos do lugar das raízes. Observa-se que a equação característica do sistema cuja função de transferência é

$$G(s)H(s) = \frac{K(s^m + b_1s^{m-1} + \dots + b_m)}{s^n + a_1s^{n-1} + \dots + a_n} \quad (n \geq m)$$

é uma equação algébrica em s de grau n . Se a ordem do numerador de $G(s)H(s)$ for inferior àquela do denominador por duas ou mais unidades (o que significa que há dois ou mais zeros no infinito), então o coeficiente a_1 é a soma negativa das raízes da equação e é independente de K . Neste caso, se alguma das raízes se deslocar para esquerda sobre o lugar das raízes conforme K é aumentado, então as outras raízes devem se mover para a direita, conforme K é aumentado. Esta informação é útil na determinação da forma geral dos lugares das raízes.

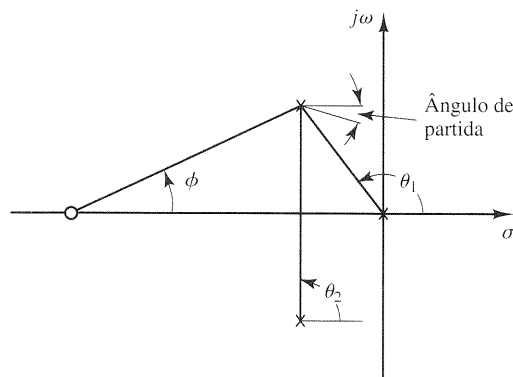


Fig. 6-11 Construção do lugar das raízes. [Ângulo de partida = $180^\circ - (\theta_1 + \theta_2) + \phi$]

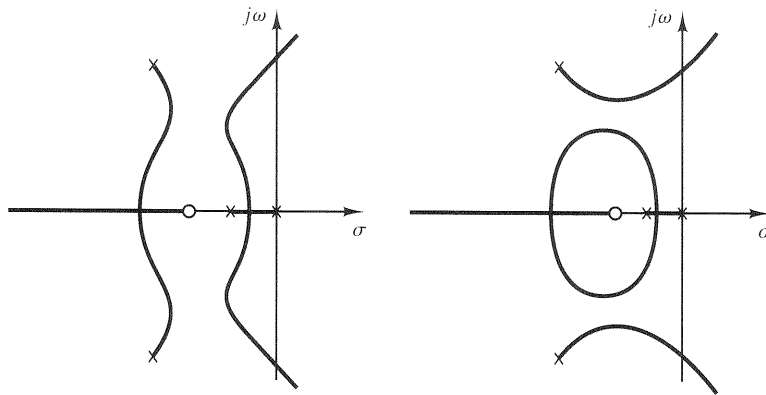


Fig. 6-12 Gráfico do lugar das raízes.

Observa-se, também, que uma pequena variação na configuração de pólos e zeros pode acarretar variações significativas na configuração do lugar das raízes. A Fig. 6-12 demonstra o fato de que uma pequena modificação na posição do zero ou do pólo resultará em uma configuração do lugar das raízes bastante diferente.

Cancelamento de pólos de $G(s)$ com zeros $H(s)$. É importante notar que se o denominador de $G(s)$ e numerador de $H(s)$ envolverem fatores comuns, então os pólos e zeros de malha aberta correspondentes se cancelarão entre si, reduzindo o grau da equação característica de uma ou mais unidades. Por exemplo, considere-se o sistema mostrado na Fig. 6-13(a). (Este sistema possui retroação de velocidade.) Mudando o diagrama de bloco da Fig. 6-13(a) para aquele mostrado na Fig. 6-13(b) observa-se claramente que $G(s)$ e $H(s)$ têm um fator comum $s + 1$. A função de transferência a malha fechada $C(s)/R(s)$ é

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{K}{s(s + 1)(s + 2) + K(s + 1)}$$

A equação característica é

$$[s(s + 2) + K](s + 1) = 0$$

Em virtude do cancelamento dos termos $(s + 1)$ que aparecem em $G(s)$ e $H(s)$, tem-se, contudo,

$$\begin{aligned} 1 + G(s)H(s) &= 1 + \frac{K(s + 1)}{s(s + 1)(s + 2)} \\ &= \frac{s(s + 2) + K}{s(s + 2)} \end{aligned}$$

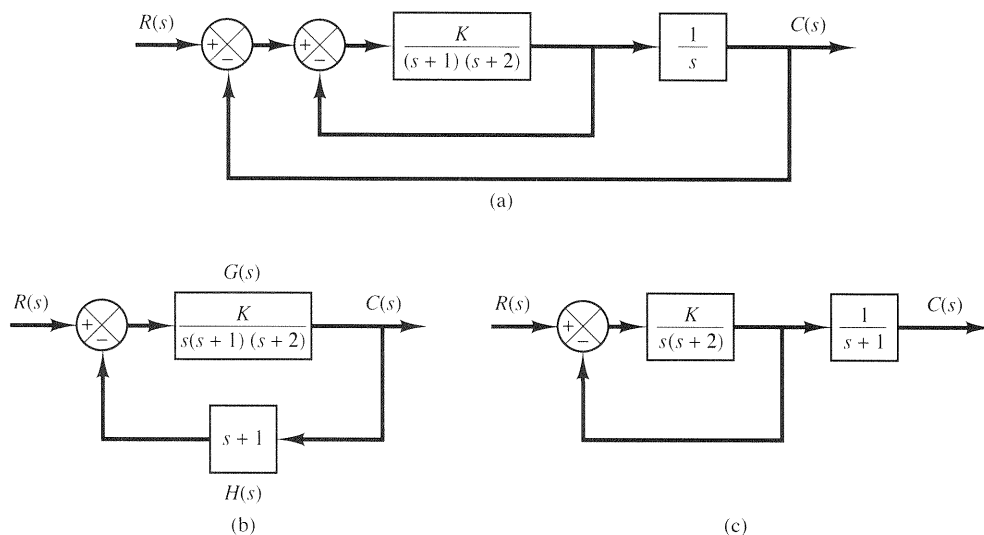


Fig. 6-13 (a) Sistema de controle com retroação de velocidade; (b) e (c) diagramas de blocos modificados.

A equação característica reduzida é

$$s(s + 2) + K = 0$$

O gráfico do lugar das raízes de $G(s)H(s)$ não mostra todas as raízes da equação característica, apenas as raízes da equação reduzida.

Para obter o conjunto completo de pólos a malha fechada, devem ser adicionados os pólos cancelados de $G(s)H(s)$ aos pólos a malha fechada obtidos do gráfico do lugar das raízes de $G(s)H(s)$. O fato importante a lembrar é que o pólo cancelado de $G(s)H(s)$ é um pólo a malha fechada do sistema, conforme é visto na Fig. 6-13(c).

Configurações típicas de pólos e zeros e lugares das raízes correspondentes. Concluindo esta seção, a Tabela 6-1 mostra algumas configurações de pólos e zeros a malha aberta e seus correspondentes lugares das raízes. A configuração dos lugares das raízes depende apenas da separação relativa aos pólos e zeros a malha aberta. Se o número de pólos a malha aberta exceder o número de zeros finitos por três ou mais unidades, há um valor do ganho K além do qual os lugares das raízes entram no semiplano direito do plano s , e portanto o sistema pode tornar-se instável. Um sistema estável deve possuir todos os seus pólos a malha fechada no semiplano esquerdo do plano s .

Tabela 6-1 Configurações de pólos e zeros a malha aberta e os correspondentes lugares das raízes

Note-se que uma vez que se tenha alguma experiência com o método, é possível avaliar facilmente as modificações causadas nos lugares das raízes por modificações no número e na localização dos pólos e zeros a malha aberta, a partir da visualização dos gráficos resultantes das diversas configurações de pólos e zeros.

Resumo. Das discussões precedentes, fica evidenciado que é possível esboçar diagramas de lugares das raízes razoavelmente precisos, para um determinado sistema, através da observância de regras bastante simples. (Sugere-se ao leitor estudar os vários diagramas de lugares das raízes mostrados nos problemas ilustrativos e nos problemas do fim do capítulo.) Nos estágios preliminares de um projeto, pode não ser necessário conhecer a posição exata dos pólos a malha fechada. Frequentemente, as localizações aproximadas são tudo o que é necessário para se fazer uma estimativa do desempenho do sistema. É importante, por conseguinte, que o projetista tenha a capacidade de esboçar rapidamente o lugar das raízes de um dado sistema.

6-4 CONSTRUÇÃO DO LUGAR DAS RAÍZES COM MATLAB

Nesta seção será apresentado o enfoque MATLAB para gerar os gráficos dos lugares das raízes.

Construindo os lugares das raízes com o MATLAB. O traçado do lugar das raízes com o MATLAB envolve a representação do sistema sob a forma da Eq. (6-13), que pode ser escrita como

$$1 + K \frac{\text{num}}{\text{den}} = 0$$

onde num é o polinômio do numerador e den o polinômio do denominador. Isto é,

$$\begin{aligned} \text{num} &= (s + z_1)(s + z_2) \cdots (s + z_m) \\ &= s^m + (z_1 + z_2 + \cdots + z_m)s^{m-1} + \cdots + z_1 z_2 \cdots z_m \\ \text{den} &= (s + p_1)(s + p_2) \cdots (s + p_n) \\ &= s^n + (p_1 + p_2 + \cdots + p_n)s^{n-1} + \cdots + p_1 p_2 \cdots p_n \end{aligned}$$

Observe-se que ambos os vetores num e den devem ser escritos de acordo com as potências decrescentes de s .

Um comando MATLAB comumente usado para traçar os lugares das raízes é

$$\text{rlocus}(\text{num}, \text{den})$$

Através deste comando, o lugar das raízes é desenhado na tela do monitor. O vetor relativo ao ganho K é determinado automaticamente. O comando `rlocus` funciona tanto para sistemas contínuos, quanto para sistemas discretos no tempo.

Para os sistemas definidos no espaço de estados, o comando `rlocus(A, B, C, D)` realiza o traçado do lugar das raízes, com o vetor ganho determinado de forma automática.

Observe-se que os comandos

$$\text{rlocus}(\text{num}, \text{den}, K) \quad \text{e} \quad \text{rlocus}(A, B, C, D, K)$$

utilizam o vetor de ganho K definido pelo usuário. (O vetor K contém todos os valores de ganho para os quais se deseja calcular os pólos a malha fechada.)

Se utilizados com argumentos à esquerda

$$\begin{aligned} [r, K] &= \text{rlocus}(\text{num}, \text{den}) \\ [r, K] &= \text{rlocus}(\text{num}, \text{den}, K) \\ [r, K] &= \text{rlocus}(A, B, C, D) \\ [r, K] &= \text{rlocus}(A, B, C, D, K) \end{aligned}$$

a tela do monitor exibirá a matriz r e o vetor de ganho K (r é uma matriz que possui um número de linhas igual ao comprimento de K e um número de colunas igual ao comprimento de $\text{den}-1$, contendo a localização das raízes complexas. Cada linha da matriz corresponde a um valor de ganho do vetor K). O comando `plot`

$$\text{plot}(r, 't')$$

traça os lugares das raízes.

Desejando-se traçar os lugares das raízes com marcas identificadoras 'o' ou 'x', é necessário utilizar os seguintes comandos

```
r = rlocus(num,den)
plot(r,'o')    ou    plot(r,'x')
```

O traçado dos lugares das raízes utilizando marcas 'o' ou 'x' é instrutiva, uma vez que cada um dos pólos a malha fechada calculado é mostrado graficamente; em alguns trechos do lugar das raízes estas marcas são densamente assinaladas, enquanto em outras partes são colocadas de forma esparsa. O MATLAB fornece o seu próprio conjunto de valores de ganho usados para traçar o lugar das raízes. Isto é feito através de uma rotina interna de passo de cálculo adaptativo. Além disto, o MATLAB utiliza o recurso de escala automática dos eixos do comando *plot*.

Observe-se, finalmente, que devido ao fato de se ter o vetor ganho definido automaticamente, os gráficos dos lugares das raízes de

$$G(s)H(s) = \frac{K(s + 1)}{s(s + 2)(s + 3)}$$

$$G(s)H(s) = \frac{10K(s + 1)}{s(s + 2)(s + 3)}$$

$$G(s)H(s) = \frac{200K(s + 1)}{s(s + 2)(s + 3)}$$

são todos iguais. Os conjuntos *num* e *den* são os mesmos para todos os três sistemas. Os vetores *num* e *den* são

```
num = [0  0  1  1]
den = [1  5  6  0]
```

EXEMPLO 6-3

Considere-se o sistema de controle mostrado na Fig. 6-14. Para traçar o lugar das raízes com o MATLAB, é necessário obter os polinômios do numerador e do denominador da função de transferência a malha aberta.

Neste problema, o numerador já é fornecido como um polinômio em *s*. Contudo, o denominador é dado sob a forma de um produto de termos do primeiro grau e do segundo grau, havendo necessidade de se efetuar a multiplicação dos termos para se obter um polinômio em *s*. A multiplicação destes termos pode ser feita facilmente através do *comando de convolução*, conforme mostrado a seguir.

Sejam, por definição,

$$a = s(s + 4) = s^2 + 4s \quad : \quad a = [1 \quad 4 \quad 0]$$

$$b = s + 6 \quad : \quad b = [1 \quad 6]$$

$$c = s^2 + 1,4s + 1 \quad : \quad c = [1 \quad 1.4 \quad 1]$$

Utilizam-se em seguida os seguintes comandos

```
d = conv(a,b);    e = conv(c,d)
```

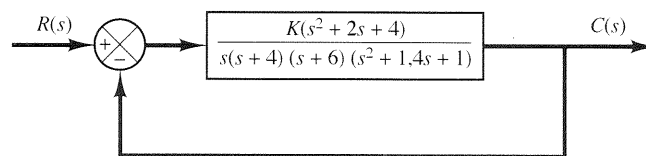


Fig. 6-14 Sistema de controle.

[Note-se que `conv(a,b)` fornece o produto dos dois polinômios a e b .] Observa-se a seguinte saída na tela do monitor:

```
a = [1  4  0];
b = [1  6];
c = [1  1.4  1];
d = conv(a,b)

d =

    1    10   24    0

e = conv(c,d)

e =

    1.0000   11.4000   39.0000   43.6000   24.0000    0
```

O polinômio do denominador é, por conseguinte,

$$\text{den} = [1 \quad 11.4 \quad 39 \quad 43.6 \quad 24 \quad 0]$$

Para se encontrarem os zeros a malha aberta de uma dada função de transferência, pode ser usado o comando `roots`, como a seguir:

$$p = [1 \quad 2 \quad 4]$$
$$r = \text{roots}(p)$$

Os comandos e as saídas do computador são os seguintes:

```
p = [1  2  4];
r = roots(p)

r =

   -1.0000 + 1.7321i
   -1.0000 - 1.7321i
```

De modo semelhante, para se encontrarem os pólos complexos conjugados (as raízes de $s^2 + 1,4s + 1 = 0$), pode-se entrar com os seguintes comandos:

```
q = roots(c)

q =

   -0.7000 + 0.7141i
   -0.7000 - 0.7141i
```

Assim, o sistema possui os seguintes zeros e pólos a malha aberta:

$$\begin{array}{ll} \text{Zeros a malha aberta: } & s = -1 + j1,7321, \quad s = -1 - j1,7321 \\ \text{Pólos a malha aberta: } & s = -0,7 + j0,7141, \quad s = -0,7 - j0,7141 \\ & s = 0, \quad s = -4, \quad s = -6 \end{array}$$

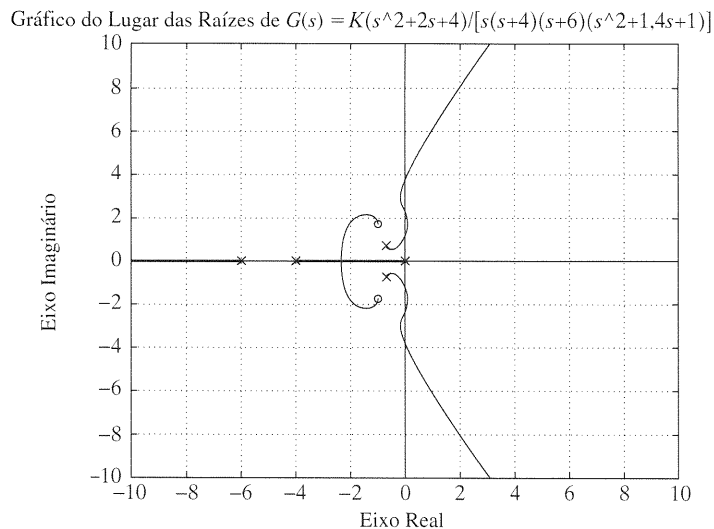


Fig. 6-15 Gráfico do lugar das raízes.

O Programa MATLAB 6-1 traça o diagrama do lugar das raízes deste sistema. O gráfico é mostrado na Fig. 6-15.

```

Programa MATLAB 6-1
% ----- Gráfico do lugar das raízes -----
num = [0 0 0 1 2 4];
den = [1 11.4 39 43.6 24 0];
rlocus(num,den)
Warning: Divide by zero*
v = [-10 10 -10 10]; axis(v)
grid
title('Lugar das Raízes de G(s) = K(s^2 + 2s + 4)/[s(s + 4)(s + 6) (s^2 + 1,4s + 1)]')

```

* Atenção: Divisão por zero.

EXEMPLO 6-4

Considere-se o sistema mostrado na Fig. 6-16, onde a função de transferência a malha aberta $G(s)H(s)$ é

$$G(s)H(s) = \frac{K(s + 0,2)}{s^2(s + 3,6)}$$

O zero a malha aberta está situado em $s = -0,2$ e os pólos a malha aberta estão em $s = 0$, $s = 0$ e $s = 3,6$.

O Programa MATLAB 6-2 gera o gráfico do lugar das raízes. O traçado do gráfico resultante é mostrado na Fig. 6-17.

```

Programa MATLAB 6-2
% ----- Gráfico do lugar das raízes -----
num = [0 0 1 0,2];
den = [1 3,6 0 0];
rlocus(num,den)
v = [-4 2 -4 4]; axis(v)
grid
title('Lugar das Raízes de G(s)H(s) = K(s + 0,2)/[s^2(s + 3,6)]')

```

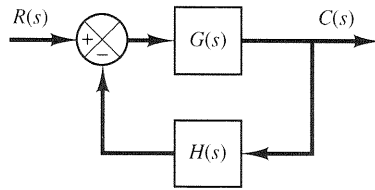


Fig. 6-16 Sistema de controle.

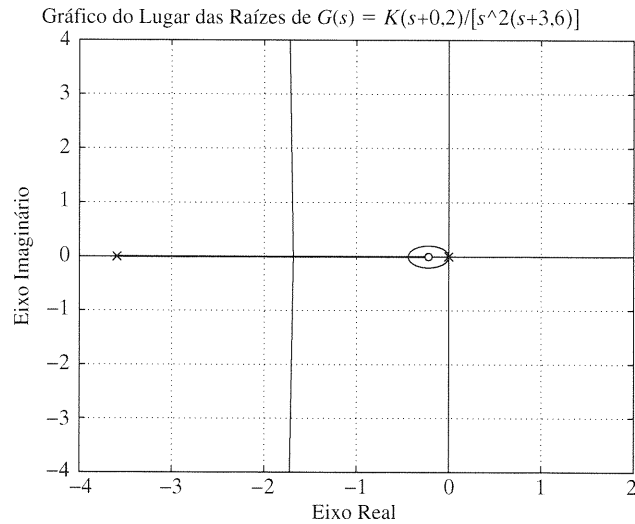


Fig. 6-17 Gráfico do lugar das raízes.

EXEMPLO 6-5

Seja o sistema mostrado na Fig. 6-18. Traçar o lugar das raízes com uma relação de aspecto quadrada de modo que uma linha com inclinação 1 seja a verdadeira reta com inclinação de 45° .

Para ajustar a região gráfica da tela à forma quadrada, entra-se com o comando `axis('square')`. Com este comando, uma reta com tangente unitária possui uma inclinação real de 45° , não sendo distorcida pela forma irregular da tela do monitor. (É importante notar que na cópia em papel pode-se ter ou não uma forma de quadrado, dependendo da impressora.)

O Programa MATLAB 6-3 produz um gráfico numa região de forma quadrada. O gráfico resultante é mostrado na Fig. 6-19.

```

Programa MATLAB 6-3
% ----- Gráfico do lugar das raízes -----
num = [0 0 0 1 1];
den = [1 3 12 -16 0];
rlocus(num,den)
v = [-6 6 -6 6];axis(v);axis('square')
grid
title('Lugar das Raízes de G(s)H(s) = K(s + 1)/[s(s - 1)(s^2 + 4s + 16)]')

```

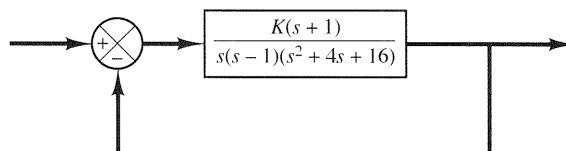


Fig. 6-18 Sistema de controle.

Gráfico do Lugar das Raízes de $G(s) = K(s + 1)/[s(s - 1)(s^2 + 4s + 16)]$

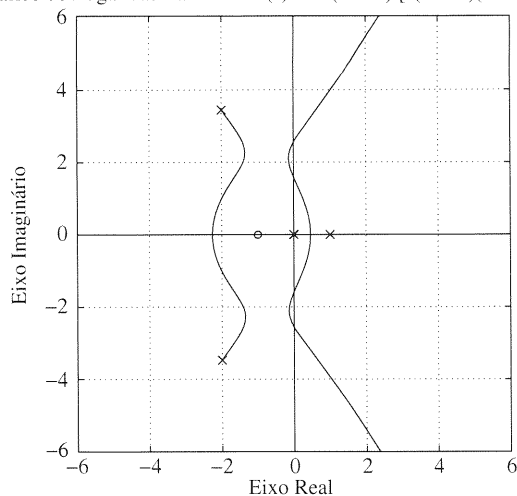


Fig. 6-19 Gráfico do lugar das raízes.

EXEMPLO 6-6

Considere-se o sistema cuja função de transferência a malha aberta seja

$$G(s)H(s) = \frac{K}{s(s + 0,5)(s^2 + 0,6s + 10)}$$

$$= \frac{K}{s^4 + 1,1s^3 + 10,3s^2 + 5s}$$

Não há zeros a malha aberta. Os pólos a malha aberta estão situados em $s = -0,3 + j3,1480$, $s = -0,3 - j3,1480$, $s = -0,5$ e $s = 0$. Entrando-se no computador com o Programa MATLAB 6-4 obtém-se o gráfico do lugar das raízes mostrado na Fig. 6-20.

```

Programa MATLAB 6-4
% ----- Gráfico do lugar das raízes -----
num = [0 0 0 0 1];
den = [1 1.1 10.3 5 0];
rlocus(num,den)
grid
title('Lugar das Raízes de G(s)H(s) = K/[s(s + 0.5)(s^2 + 0.6s + 10)]')
    
```

Observe-se que na região próxima a $x = -0,3$, $y = 2,3$ e $x = -0,3$, $y = -2,3$, dois lugares se aproximam mutuamente. Pode-se imaginar se estes dois ramos devem-se tocar ou não. Para explorar esta situação, pode-se traçar os lugares das raízes utilizando os comandos

```

r = rlocus(num,den)
plot(r,'o')
    
```

conforme mostrado no Programa MATLAB 6-5. A Fig. 6-21 apresenta o gráfico resultante.

Como não há pontos calculados próximo das regiões $(-0,3, 2,3)$ e $(-0,3, -2,3)$, torna-se necessário ajustar o passo de cálculo do ganho K . Através de um procedimento de tentativa e erro, encontra-se uma região particular de interesse como sendo $20 \leq K \leq 30$. Entrando-se com o Programa MATLAB 6-6, obtém-se o gráfico do lugar das raízes mostrado na Fig. 6-22. A partir deste gráfico, fica evidenciado que os dois ramos que se aproximam no semi-plano superior (ou no semiplano inferior) não se tocam.

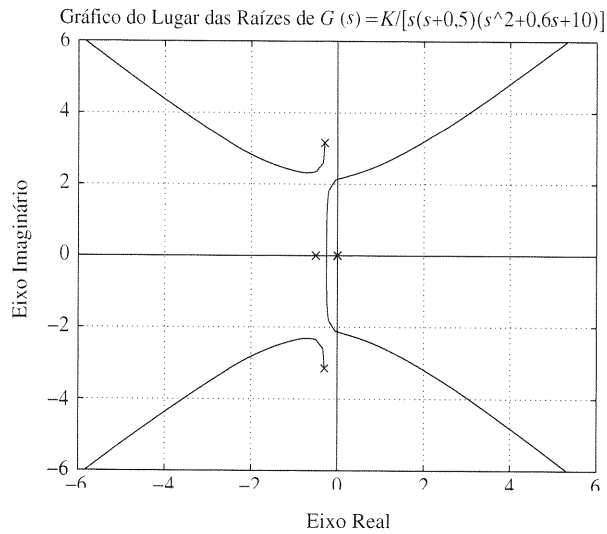


Fig. 6-20 Gráfico do lugar das raízes.

Programa MATLAB 6-5

```
% ----- Gráfico do lugar das raízes -----
num = [0 0 0 0 1];
den = [1 1.1 10.3 5 0];
r = rlocus(num,den);
plot(r,'or')
v = [-6 6 -6 6]; axis(v)
grid
title('Lugar das Raízes de G(s) = K/[s(s + 0.5)(s^2 + 0.6s + 10)]')
xlabel('Eixo Real')
ylabel('Eixo Imaginário')

% ***** Observe-se que o comando 'plot(r,'or')' produz, na tela,
% pequenos círculos de cor vermelha*****
```

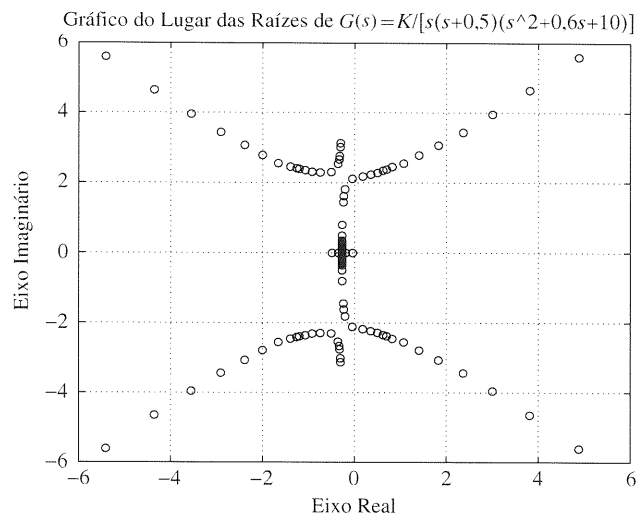


Fig. 6-21 Gráfico do lugar das raízes.


```

Programa MATLAB 6-6
% ----- Gráfico do lugar das raízes -----
num = [0 0 0 0 1];
den = [1 1.1 10.3 5 0];
K1 = 0:0.2:20;
K2 = 20:0.1:30;
K3 = 30:5:1000;
K = [K1 K2 K3];
r = rlocus(num,den,K);
plot(r,'ob')
v = [-4 4 -4 4]; axis(v)
grid
title('Lugar das Raízes de G(s)H(s) = K/[s(s + 0.5)(s^2 + 0.6s + 10)]')
xlabel('Eixo Real')
ylabel('Eixo Imaginário')

%*****Observe-se que o comando 'plot(r,'ob')' produz, na tela,
% pequenos círculos de cor azul*****

```

EXEMPLO 6-7

Considere-se o sistema mostrado na Fig. 6-23. As equações do sistema são

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + Bu \\ y &= Cx + Du \\ u &= r - y \end{aligned}$$

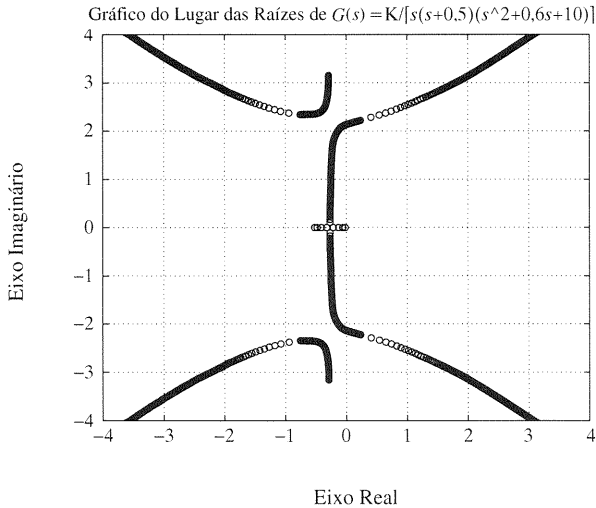


Fig. 6-22 Gráfico do lugar das raízes.

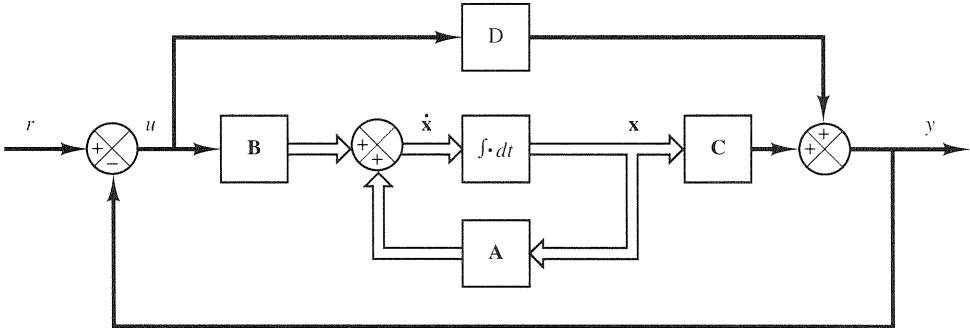


Fig. 6-23 Sistema de controle a malha fechada.

Neste problema ilustrativo será obtido o diagrama do lugar das raízes do sistema definido no espaço de estados. Admita-se, por exemplo, que as matrizes **A**, **B**, **C** e **D** sejam dadas por

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -160 & -56 & -14 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -14 \end{bmatrix} \quad (6-18)$$

$$\mathbf{C} = [1 \quad 0 \quad 0], \quad \mathbf{D} = [0]$$

O gráfico do lugar das raízes para este sistema pode ser obtido com o MATLAB através do seguinte comando

rlocus(A,B,C,D)

Este comando produz o mesmo gráfico de lugar das raízes obtido pelo uso do comando rlocus(num,den), onde num e den são obtidos a partir de

[num,den] = ss2tf(A,B,C,D)

como a seguir:

num = [0 0 1 0]
den = [1 14 56 160]

O Programa MATLAB 6-7 produzirá o gráfico do lugar das raízes mostrado na Fig. 6-24.

```

Programa MATLAB 6-7
% ----- Gráfico do lugar das raízes -----
%*****Gráfico do lugar das raízes de um sistema definido no espaço de estados*****
%*****Entrar com as matrizes A, B, C e D*****
A = [0 1 0;0 0 1; -160 -56 -14];
B = [0;1; -14];
C = [1 0 0];
D = [0];

%****Entrar com o comando rlocus(A,B,C,D)****
rlocus(A,B,C,D)
grid
title('Lugar das Raízes de Sistema definido no Espaço de Estados')
    
```

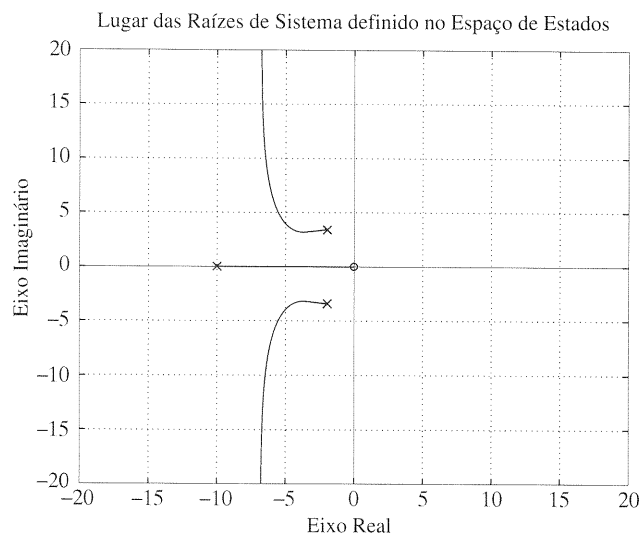


Fig. 6-24 Gráfico do lugar das raízes de um sistema definido no espaço de estados, onde **A**, **B**, **C** e **D** são dadas pela Eq. (6-18).

6-5 CASOS ESPECIAIS

Nesta seção serão considerados dois casos especiais. Um deles é o caso em que o ganho K não aparece como fator multiplicativo e o outro diz respeito a sistemas a malha fechada com retroação positiva em vez de retroação negativa.

Construção de lugar das raízes quando o parâmetro variável não aparece como fator multiplicativo. Em alguns casos, o parâmetro variável K pode não aparecer como um fator multiplicativo de $G(s)H(s)$. Em casos como esses, é possível reescrever a equação característica de tal sorte que o parâmetro variável K apareça como fator multiplicativo de $G(s)H(s)$. O Exemplo 6-8 mostra como proceder em tal caso.

EXEMPLO 6-8

Considere-se o sistema da Fig. 6-25. Desenhar o diagrama do lugar das raízes. Determinar, em seguida, o valor de k tal que o coeficiente de amortecimento dos pólos a malha fechada dominantes seja 0,4.

O sistema em pauta envolve retroação de velocidade. A função de transferência a malha aberta é

$$\text{Função de transferência a malha aberta} = \frac{20}{s(s+1)(s+4) + 20ks}$$

Observe-se que o parâmetro ajustável k não aparece como um fator multiplicativo. A equação característica do sistema é

$$s^3 + 5s^2 + 4s + 20 + 20ks = 0 \quad (6-19)$$

Seja, por definição,

$$20k = K$$

Então a Eq. (6-19) se transforma em

$$s^3 + 5s^2 + 4s + Ks + 20 = 0 \quad (6-20)$$

Dividindo-se ambos os membros da Eq. (6-20) pela soma dos termos que não contêm K , tem-se

$$1 + \frac{Ks}{s^3 + 5s^2 + 4s + 20} = 0$$

ou

$$1 + \frac{Ks}{(s+j2)(s-j2)(s+5)} = 0 \quad (6-21)$$

A Eq. (6-21) está agora sob a forma da Eq. (6-5).

Será esboçado agora o gráfico do lugar das raízes do sistema dado pela Eq. (6-21). Note-se que os pólos a malha aberta estão localizados em $s = j2, s = -j2, s = -5$, e o zero a malha aberta está situado em $s = 0$. O lugar das raízes existe sobre o eixo real entre 0 e -5 . Como

$$\lim_{s \rightarrow \infty} \frac{Ks}{(s+j2)(s-j2)(s+5)} = \lim_{s \rightarrow \infty} \frac{K}{s^2}$$

tem-se

$$\text{Ângulo das assíntotas} = \frac{\pm 180^\circ(2k+1)}{2} = \pm 90^\circ$$

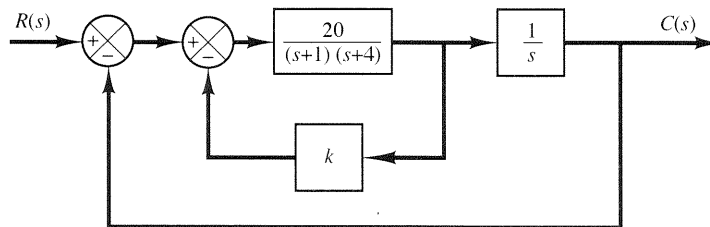


Fig. 6-25 Sistema de controle.

A interseção das assíntotas com o eixo real pode ser achada a partir de

$$\lim_{s \rightarrow \infty} \frac{Ks}{s^3 + 5s^2 + 4s + 20} = \lim_{s \rightarrow \infty} \frac{K}{s^2 + 5s + \dots} = \lim_{s \rightarrow \infty} \frac{K}{(s + 2,5)^2}$$

como sendo

$$\sigma_a = -2,5$$

O ângulo de partida (ângulo θ) do pólo $s = j2$ pode ser obtido da seguinte forma:

$$\theta = 180^\circ - 90^\circ - 21,8^\circ + 90^\circ = 158,2^\circ$$

Assim, o ângulo de partida do pólo $s = j2$ é $158,2^\circ$. A Fig. 6-26 mostra um gráfico do lugar das raízes do sistema.

Observe-se que os pólos a malha fechada com $\zeta = 0,4$ devem estar situados sobre uma reta que faça um ângulo de $\pm 66,42^\circ$ com o semi-eixo real negativo. No presente caso, há duas interseções do ramo do lugar das raízes no semiplano superior de s com a reta que faz um ângulo de $66,42^\circ$. Portanto, dois valores de K produzirão pólos a malha fechada com coeficiente de amortecimento igual a $0,4$. No ponto P o valor de K é

$$K = \left| \frac{(s + j2)(s - j2)(s + 5)}{s} \right|_{s = -1,0490 + j2,4065} = 8,9801$$

Portanto,

$$k = \frac{K}{20} = 0,4490 \quad \text{no ponto } P$$

No ponto Q , o valor de K é

$$K = \left| \frac{(s + j2)(s - j2)(s + 5)}{s} \right|_{s = -2,1589 + j4,9652} = 28,260$$

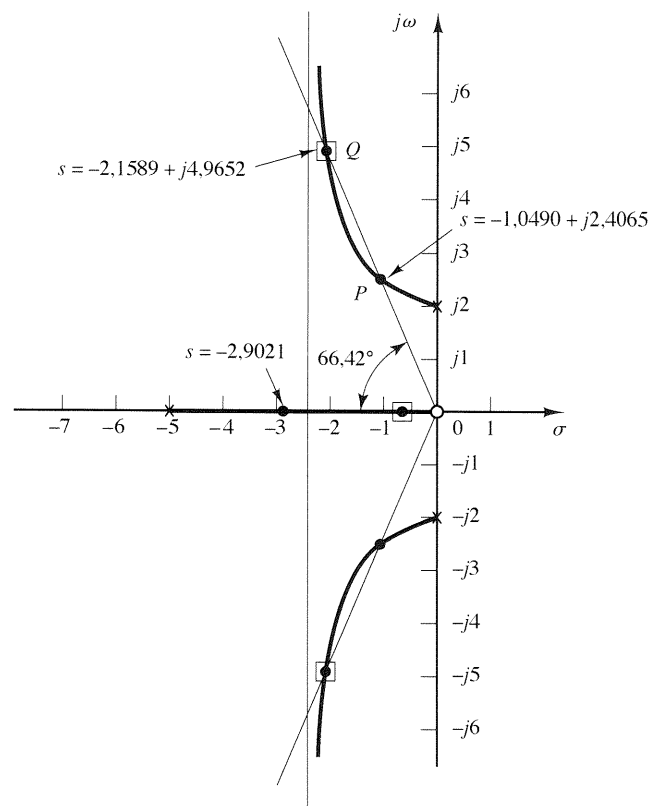


Fig. 6-26 Gráfico do lugar das raízes do sistema mostrado na Fig. 6-25.

Portanto,

$$k = \frac{K}{20} = 1,4130 \quad \text{no ponto } Q$$

Assim, há duas soluções para este problema. Para $k = 0,4490$ os três pólos a malha fechada ficam situados em

$$s = -1,0490 + j2,4065, \quad s = -1,0490 - j2,4065, \quad s = -2,9021$$

Para $k = 1,4130$, os três pólos a malha fechada estão situados em

$$s = -2,1589 + j4,9652, \quad s = -2,1589 - j4,9652, \quad s = -0,6823$$

É importante assinalar que o zero na origem é um zero a malha aberta, mas não é um zero a malha fechada. Isto é evidente, porque o sistema original mostrado na Fig. 6-25 não possui zero a malha fechada, tendo em vista que

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{20}{s(s+1)(s+4) + 20(1+ks)}$$

O zero a malha aberta em $s = 0$ foi introduzido através do processo de modificação da equação característica de modo que a variável ajustável $K = 20k$ aparecesse sob a forma de fator multiplicativo.

Foram obtidos dois valores distintos de k satisfazendo o requisito de coeficiente de amortecimento dos pólos a malha fechada dominantes igual a 0,4. A função de transferência a malha fechada com $k = 0,4490$ é dada por

$$\begin{aligned} \frac{C(s)}{R(s)} &= \frac{20}{s^3 + 5s^2 + 12,98s + 20} \\ &= \frac{20}{(s + 1,0490 + j2,4065)(s + 1,0490 - j2,4065)(s + 2,9021)} \end{aligned}$$

A função de transferência a malha fechada com $k = 1,4130$ é dada por

$$\begin{aligned} \frac{C(s)}{R(s)} &= \frac{20}{s^3 + 5s^2 + 32,26s + 20} \\ &= \frac{20}{(s + 2,1589 + j4,9652)(s + 2,1589 - j4,9652)(s + 0,6823)} \end{aligned}$$

Observe-se que para $k = 0,4490$ o sistema possui dois pólos complexos conjugados a malha fechada na condição de pólos dominantes, enquanto para $k = 1,4130$, o pólo a malha fechada em $s = -0,6823$ é o pólo dominante. Os pólos complexos conjugados deixam de ser pólos a malha fechada dominantes. Neste caso, as características da resposta são determinadas principalmente pelo pólo real a malha fechada.

Seja feita agora uma comparação entre as respostas ao degrau unitário de ambos os sistemas. O Programa MATLAB 6-8 pode ser utilizado para traçar as curvas de resposta ao degrau em um único diagrama. As curvas de resposta ao degrau unitário resultantes [$c_1(t)$ para $k = 0,4490$ e $c_2(t)$ para $k = 1,4130$] são mostradas na Fig. 6-27.

Programa MATLAB 6-8

```
% ----- Resposta ao degrau unitário -----
%*****Entrar com os numeradores e denominadores das funções
%de transferência respectivas para k = 0,4490 e k = 1,4130*****
num1 = [0 0 0 20];
den1 = [1 5 12.98 20];
num2 = [0 0 0 20];
den2 = [1 5 32.26 20];
t = 0:0.1:10;
[c1,x1,t] = step(num1,den1,t);
[c2,x2,t] = step(num2,den2,t);
plot(t,c1,t,c2)
text(2.5,1.12,'k = 0,4490')
text(3.7,0.85,'k = 1,4130')
grid
title('Resposta ao Degrau Unitário dos Dois Sistemas')
xlabel('t s')
ylabel('Respostas c1 e c2')
```

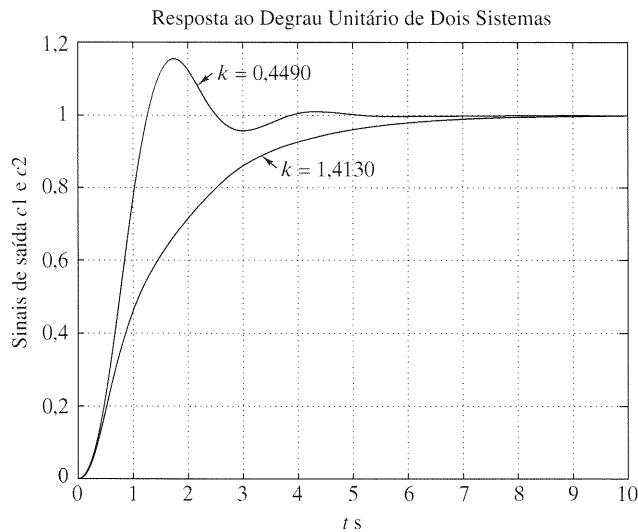


Fig. 6-27 Curvas da resposta ao degrau unitário do sistema mostrado na Fig. 6-25 quando o coeficiente de amortecimento ζ dos pólos a malha fechada dominantes é ajustado em 0,4. (Dois valores possíveis de k fazem o coeficiente de amortecimento ζ igual a 0,4.)

Observa-se, a partir da Fig. 6-27, que a resposta do sistema com $k = 0,4490$ é oscilatória. (O efeito do pólo a malha fechada situado em $s = -2,9021$ sobre a resposta ao degrau unitário é pequeno.) Para $k = 1,4130$, as oscilações devidas aos pólos a malha fechada situados em $s = -2,1589 \pm j4,9652$ desaparecem muito mais rápido que a resposta puramente exponencial devida ao pólo a malha fechada em $s = -0,6823$.

O sistema com $k = 0,4490$ (que apresenta uma resposta mais rápida com um valor relativamente pequeno de ultrapassagem) tem uma resposta com características melhores que as do sistema com $k = 1,4130$ (que apresenta uma resposta lenta superamortecida). Portanto, no presente sistema seria escolhido o valor de $k = 0,4490$.

Lugares das raízes para sistemas com retroação positiva.* Em um sistema de controle complexo pode existir uma malha interna com retroação positiva como mostrado na Fig. 6-28. Tal malha é usualmente estabilizada pela malha externa. No que se segue, o interesse estará focado apenas sobre a malha interna com retroação positiva. A função de transferência a malha fechada desta malha interior é

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{G(s)}{1 - G(s)H(s)}$$

A equação característica é

$$1 - G(s)H(s) = 0 \tag{6-22}$$

Esta equação pode ser resolvida de maneira similar ao desenvolvimento do método do lugar das raízes na Seção 6-2. A condição angular, contudo, deve ser alterada.

A Eq. (6-22) pode ser reescrita como

$$G(s)H(s) = 1$$

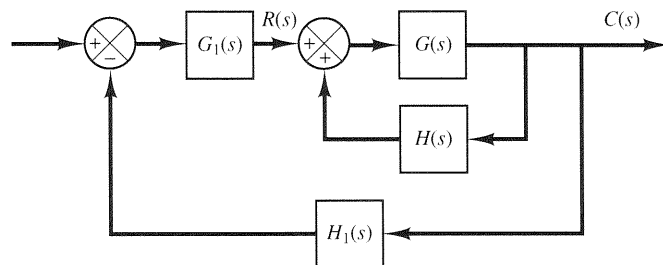


Fig. 6-28 Sistema de controle.

*Ver Referência W-5.

que é equivalente às duas equações seguintes

$$\begin{aligned} \angle G(s)H(s) &= 0^\circ \pm k360^\circ \quad (k = 0, 1, 2, \dots) \\ |G(s)H(s)| &= 1 \end{aligned}$$

A soma algébrica de todos os ângulos dos pólos e dos zeros a malha aberta deve ser igual a $0^\circ \pm k360^\circ$. Assim, o gráfico do lugar das raízes segue o lugar geométrico de 0° em contraste com o lugar geométrico de 180° considerado anteriormente. A condição de módulo permanece inalterada.

Para ilustrar o traçado do lugar das raízes de sistemas com retroação positiva, serão utilizadas as seguintes funções de transferência $G(s)$ e $H(s)$ como exemplo.

$$G(s) = \frac{K(s+2)}{(s+3)(s^2+2s+2)}, \quad H(s) = 1$$

O ganho K será considerado positivo.

As regras gerais para construção dos lugares das raízes apresentadas na Seção 6-3 devem ser modificadas da seguinte maneira:

A Regra 2 é modificada da seguinte maneira: Se o número total de pólos e zeros à direita do ponto de teste sobre o eixo real for par, então este ponto pertence ao lugar das raízes.

A Regra 3 é modificada do seguinte modo:

$$\hat{\text{Ângulos das assíntotas}} = \frac{\pm k360^\circ}{n-m} \quad (k = 0, 1, 2, \dots)$$

onde

$$\begin{aligned} n &= \text{número de pólos finitos de } G(s)H(s) \\ m &= \text{número de zeros finitos de } G(s)H(s) \end{aligned}$$

A Regra 5 é modificada como a seguir: Ao calcular o ângulo de partida (ou o ângulo de chegada) de um pólo complexo conjugado a malha aberta (ou a um zero complexo conjugado a malha aberta), subtrai-se de 0° a soma de todos os ângulos dos vetores com origem nos outros pólos e zeros e terminando no pólo complexo (zero complexo) em questão, incluindo-se os sinais apropriados.

As outras regras para construir os lugares das raízes permanecem as mesmas. Serão aplicadas agora as regras modificadas para construir o gráfico do lugar das raízes.

1. Locação dos pólos a malha aberta ($s = -1 + j$, $s = -1 - j$, $s = -3$) e o zero ($s = -2$) no plano complexo. À medida que o valor de K aumenta de 0 a ∞ , os pólos a malha fechada começam nos pólos a malha aberta e terminam nos zeros a malha aberta (finitos ou infinitos), exatamente como no caso dos sistemas com retroação negativa.
2. Determinação dos lugares das raízes sobre o eixo real. Os lugares das raízes existem entre -2 e $+\infty$ e entre -3 e $-\infty$.
3. Determinação das assíntotas dos lugares das raízes. Para o sistema presente,

$$\hat{\text{Ângulo das assíntota}} = \frac{\pm k360^\circ}{3-1} = \pm 180^\circ$$

Isto implica simplesmente que as assíntotas estão sobre o eixo real.

4. Determinação dos pontos de partida e de chegada sobre o eixo real. Uma vez que a equação característica é

$$(s+3)(s^2+2s+2) - K(s+2) = 0$$

obtém-se

$$K = \frac{(s+3)(s^2+2s+2)}{s+2}$$

Derivando-se K em relação a s , tem-se

$$\frac{dK}{ds} = \frac{2s^3 + 11s^2 + 20s + 10}{(s+2)^2}$$

Observe-se que

$$\begin{aligned} 2s^3 + 11s^2 + 20s + 10 &= 2(s + 0,8)(s^2 + 4,7s + 6,24) \\ &= 2(s + 0,8)(s + 2,35 + j0,77)(s + 2,35 - j0,77) \end{aligned}$$

O ponto $s = -0,8$ está sobre o lugar das raízes. Como este ponto fica situado entre dois zeros (um zero finito e um zero no infinito), ele é realmente um ponto de chegada. Os pontos $s = -2,35 \pm j0,77$ não satisfazem a condição angular e, portanto, não constituem nem pontos de partida nem de chegada.

5. Determinação do ângulo de partida do lugar das raízes a partir de pólos complexos. Para o pólo complexo posicionado em $s = -1 + j$, o ângulo de partida θ é

$$\theta = 0^\circ - 27^\circ - 90^\circ + 45^\circ$$

ou

$$\theta = -72^\circ$$

(O ângulo de partida do pólo complexo situado em $s = -1 - j$ é 72° .)

6. Escolha um ponto de teste numa vizinhança abrangente do eixo $j\omega$ e a origem e aplicação da condição de ângulo. Localização de um número suficiente de pontos, satisfazendo a condição angular.

A Fig. 6-29 mostra os lugares das raízes para o sistema dado, com retroação positiva. Os lugares das raízes estão assinalados com linhas tracejadas.

Note-se que se

$$K > \frac{(s + 3)(s^2 + 2s + 2)}{s + 2} \Big|_{s=0} = 3$$

uma das raízes entra no semiplano s da direita. Portanto, para valores de K maiores que 3, o sistema se torna instável. (Para $K > 3$, o sistema deve ser estabilizado com a malha externa.)

Note-se que a função de transferência a malha fechada do sistema com retroação positiva é dada por

$$\begin{aligned} \frac{C(s)}{R(s)} &= \frac{G(s)}{1 - G(s)H(s)} \\ &= \frac{K(s + 2)}{(s + 3)(s^2 + 2s + 2) - K(s + 2)} \end{aligned}$$

Para comparar este gráfico de lugar das raízes com o correspondente ao de um sistema com retroação negativa, a Fig. 6-30 mostra o lugar das raízes de um sistema com retroação negativa cuja função de transferência a malha aberta é

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{K(s + 2)}{(s + 3)(s^2 + 2s + 2) + K(s + 2)}$$

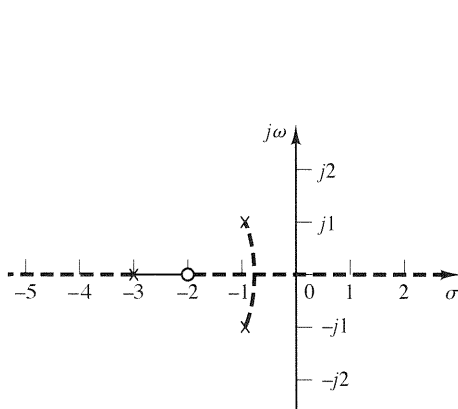


Fig. 6-29 Gráfico do lugar das raízes do sistema com retroação positiva e $G(s) = K(s + 2)/[(s + 3)(s^2 + 2s + 2)]$, $H(s) = 1$.

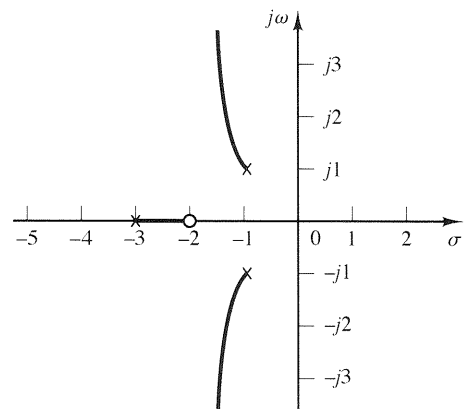


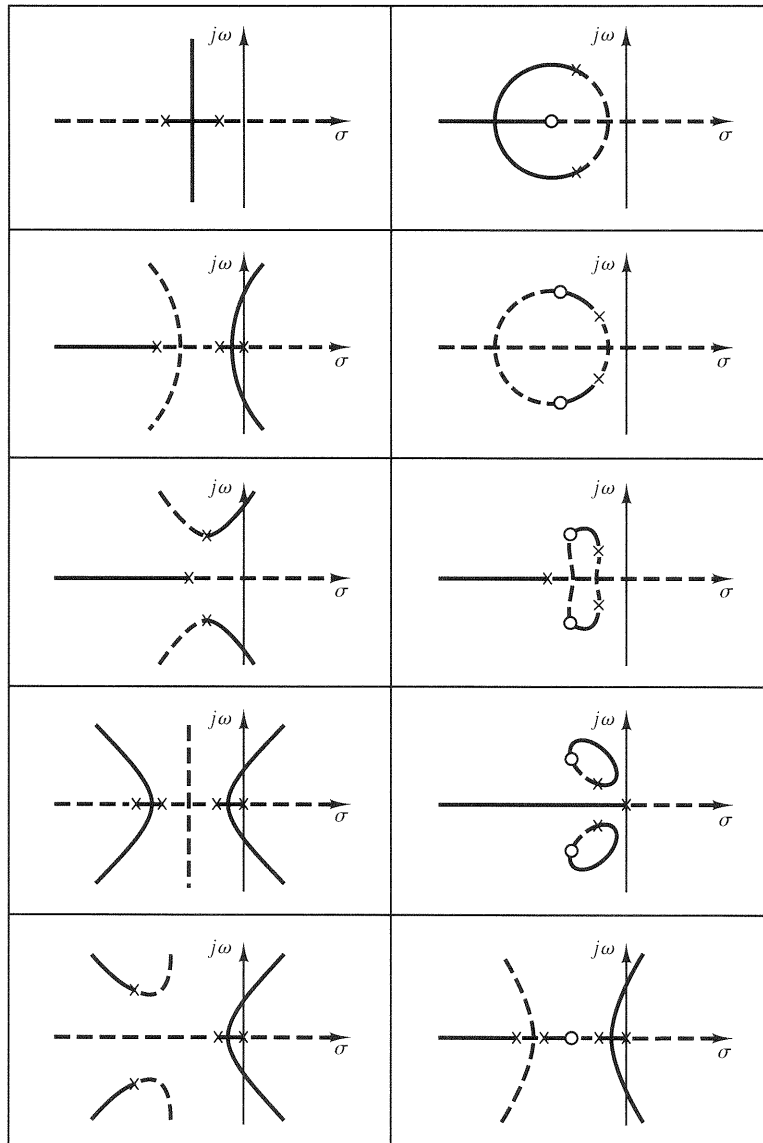
Fig. 6-30 Gráfico do lugar das raízes do sistema com retroação negativa e $G(s) = K(s + 2)/[(s + 3)(s^2 + 2s + 2)]$, $H(s) = 1$.

A Tabela 6-2 apresenta vários diagramas de lugares das raízes de sistemas com retroação negativa e com retroação positiva. As funções de transferência a malha fechada são dadas por

$$\frac{C}{R} = \frac{G}{1 + GH}, \quad \text{para retroação negativa}$$

$$\frac{C}{R} = \frac{G}{1 - GH}, \quad \text{para retroação positiva}$$

Tabela 6-2 Gráficos de lugares das raízes de sistemas com retroação negativa e retroação positiva



Retas e curvas em linha cheia correspondem a sistemas com retroação negativa; retas e curvas em linha tracejada correspondem a sistemas com retroação positiva.

onde GH é a função de transferência a malha aberta. Na Tabela 6-2, os lugares das raízes de sistemas com retroação negativa estão representados com linhas cheias e os lugares das raízes de sistemas com retroação positiva, com linhas tracejadas.

6-6 ANÁLISE DE SISTEMAS DE CONTROLE PELO MÉTODO DO LUGAR DAS RAÍZES

Nesta seção será discutida, primeiro, a ortogonalidade dos lugares das raízes e os lugares de ganho constante para os sistemas a malha fechada. Em seguida, serão discutidos os sistemas condicionalmente estáveis. Finalmente, serão analisados os sistemas de fase não-mínima.

Ortogonalidade entre os lugares das raízes e os lugares de ganho constante. Considere-se o sistema cuja função de transferência a malha aberta seja $G(s)H(s)$. No plano $G(s)H(s)$, os lugares de $|G(s)H(s)| = \text{constante}$ são circunferências com centro na origem, e os lugares correspondentes à condição angular $\angle G(s)H(s) = \pm 180^\circ (2k + 1)$ ($k = 0, 1, 2, \dots$) permanecem sobre o eixo real negativo do plano $G(s)H(s)$, como indicado na Fig. 6-31. [Note-se que o plano complexo aqui empregado não é o plano s , mas o plano $G(s)H(s)$.]

Os lugares das raízes e os lugares de ganho constante no plano s são mapeamentos conformes dos lugares de $\angle G(s)H(s) = \pm 180^\circ (2k + 1)$ e de $|G(s)H(s)| = \text{constante}$ no plano $G(s)H(s)$.

Como os lugares geométricos de fase constante e de ganho constante no plano $G(s)H(s)$ são ortogonais, os lugares das raízes e os lugares de ganho constante no plano s também são ortogonais. A Fig. 6-32(a) mostra os lugares das raízes e os lugares de ganho constante para o seguinte sistema:

$$G(s) = \frac{K(s + 2)}{s^2 + 2s + 3}, \quad H(s) = 1$$

Observe-se que devido à configuração de pólos e zeros ser simétrica em relação ao eixo real, os lugares de ganho constante também são simétricos em relação ao eixo real.

A Fig. 6-32(b) mostra os lugares das raízes e de ganho constante para o sistema:

$$G(s) = \frac{K}{s(s + 1)(s + 2)}, \quad H(s) = 1$$

Note-se que, devido à configuração dos pólos no plano s ser simétrica em relação ao eixo real, e em relação à reta paralela ao eixo imaginário passando pelo ponto ($\sigma = -1, \omega = 0$), os lugares de ganho constantes são simétricos em relação à reta $\omega = 0$ (eixo real) e à reta $\sigma = -1$.

Sistemas condicionalmente estáveis. Seja o sistema indicado na Fig. 6-33(a). Os lugares das raízes para este sistema podem ser construídos aplicando-se as regras e procedimentos gerais para construção dos lugares das raízes. Um gráfico do lugar das raízes para este sistema é mostrado na Fig. 6-33(b). Pode-se constatar que este sistema é estável apenas em intervalos limitados do valor de K , isto é, $0 < K < 14$ e $64 < K < 195$. O sistema torna-se instável para $14 < K < 64$ e para $K > 195$. Se K possuir um valor correspondente à operação instável, o sistema pode deixar de funcionar ou tornar-se não-linear devido à existência de uma não-linearidade por saturação. Um sistema deste tipo é denominado *condicionalmente estável*.

Na prática, sistemas condicionalmente estáveis não são desejados. A estabilidade condicional é perigosa porém ocorre em alguns sistemas, em particular em sistemas que possuem um caminho instável no ramo direto. Este caminho pode ocorrer quando o sistema for dotado de uma malha interna, secundária. É aconselhável evitar esta estabilidade condicional, pois se o ganho cair, por alguma razão, aquém do valor crítico, o sistema se torna instável. Note-se que a adição de

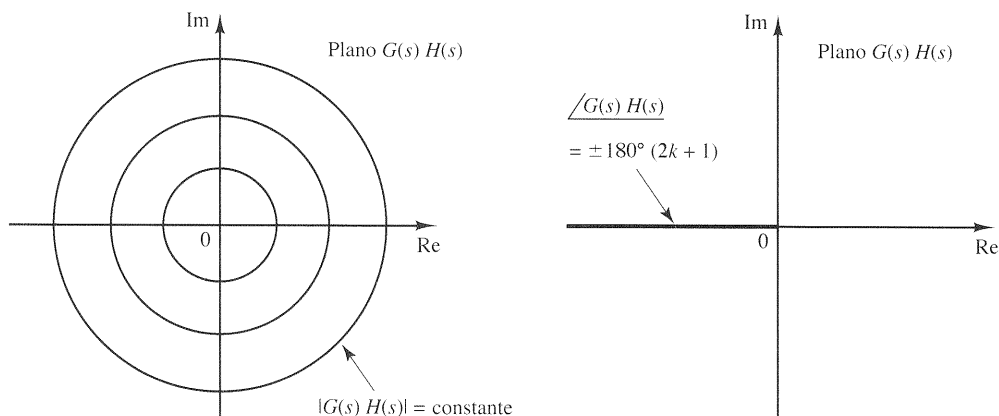


Fig. 6-31 Lugares geométricos de ganho e de fase constantes no plano $G(s)H(s)$.

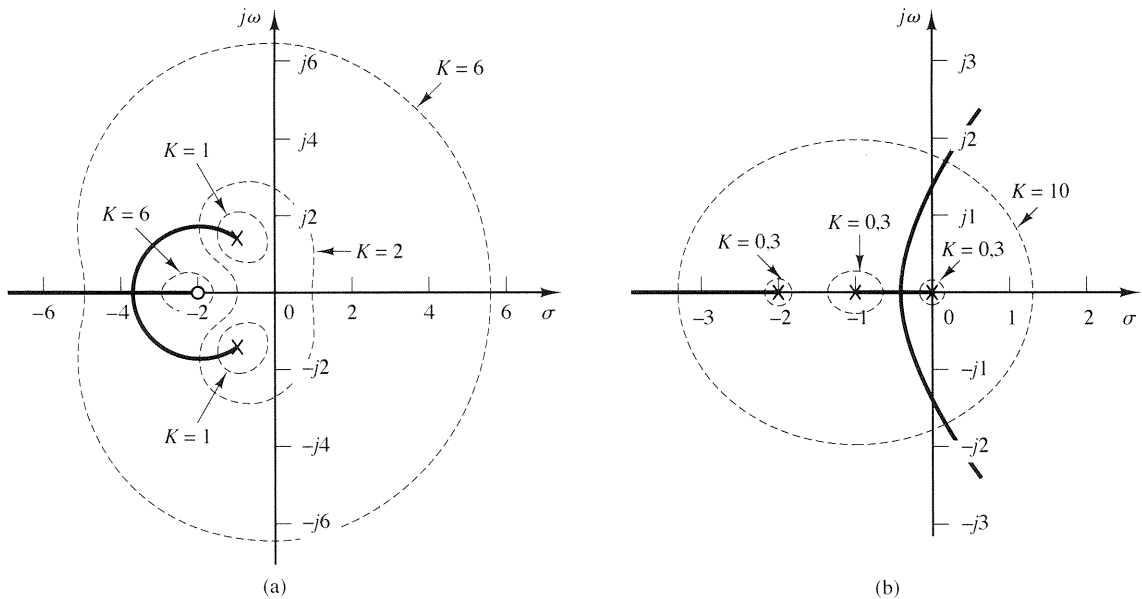


Fig. 6-32 Gráficos dos lugares das raízes e dos lugares geométricos de ganho constante. (a) Sistema com $G(s) = K(s + 2)/(s^2 + 2s + 3)$, $H(s) = 1$; (b) sistema com $G(s) = K/[s(s + 1)(s + 2)]$, $H(s) = 1$.

uma estrutura de compensação apropriada eliminará a estabilidade condicional. [A adição de um zero causará o deslocamento dos lugares das raízes para a esquerda. (Ver Seção 7-2.) Portanto, a estabilidade condicional pode ser eliminada pela adição de uma compensação apropriada.]

Sistemas de fase não-mínima. Se todos os pólos e zeros de um sistema estiverem no semiplano esquerdo do plano s , então o sistema é chamado de *fase mínima*. Se um sistema possui pelo menos um pólo ou um zero no semiplano direito do plano s , então o sistema é denominado sistema de *fase não-mínima*. O termo fase não-mínima provém da característica de deslocamento de fase de tais sistemas quando submetidos a sinais senoidais de entrada.

Considere-se o sistema mostrado na Fig. 6-34(a). Neste sistema

$$G(s) = \frac{K(1 - T_a s)}{s(Ts + 1)} \quad (T_a > 0), \quad H(s) = 1$$

Este é um sistema de fase não-mínima, uma vez que há um zero no semiplano s da direita. Para este sistema, a condição de ângulo resulta

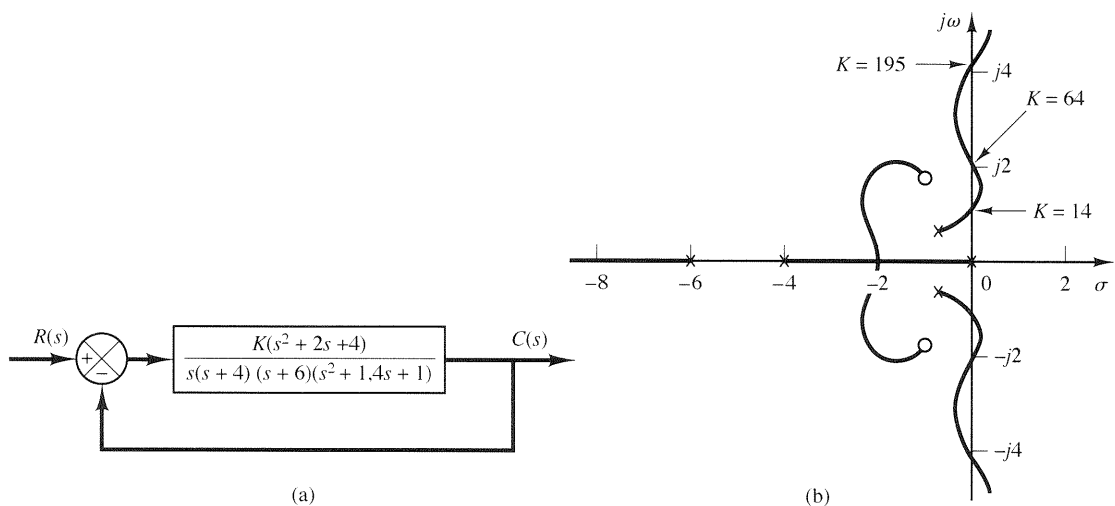


Fig. 6-33 (a) Sistema condicionalmente estável; (b) gráfico do lugar das raízes.

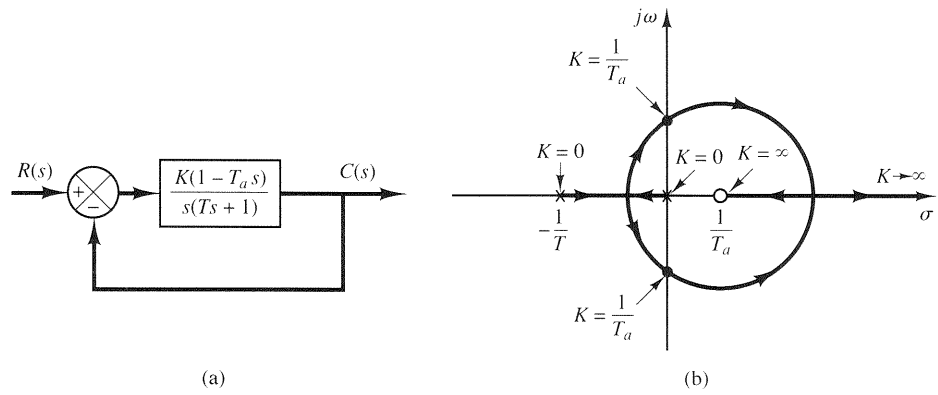


Fig. 6-34 (a) Sistema de fase não-mínima; (b) gráfico do lugar das raízes.

$$\begin{aligned} \angle G(s) &= \angle \left[-\frac{K(T_a s - 1)}{s(Ts + 1)} \right] \\ &= \angle \left[\frac{K(T_a s - 1)}{s(Ts + 1)} \right] + 180^\circ \\ &= \pm 180^\circ(2k + 1) \quad (k = 0, 1, 2, \dots) \end{aligned}$$

ou

$$\angle \frac{K(T_a s - 1)}{s(Ts + 1)} = 0^\circ \quad (6-23)$$

Os lugares das raízes podem ser obtidos da Eq. (6-23). A Fig. 6-34(b) mostra um gráfico do lugar das raízes para este sistema. Consta-se, a partir do diagrama, que o sistema será estável se o ganho K for menor do que $1/T_a$.

6-7 LUGARES DAS RAÍZES PARA SISTEMAS COM RETARDO DE TRANSPORTE

A Fig. 6-35 mostra um sistema térmico no qual se faz circular ar quente a fim de manter constante a temperatura de uma câmara. Neste sistema, o elemento de medida é colocado a jusante do fluxo a uma distância $L(m)$ da fornalha, sendo a velocidade do ar v (m/s) e $T = L/v$ (s) o tempo decorrido, antes de qualquer variação na temperatura do forno ser sentida

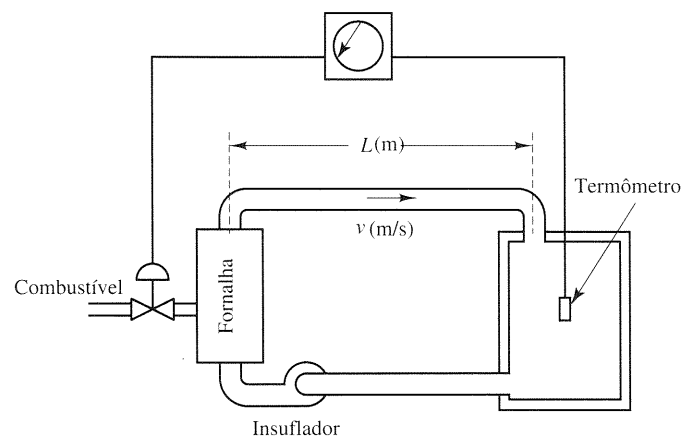


Fig. 6-35 Sistema térmico.

pelo termômetro, considerado T . Um tal retardo na medida, na ação do controlador ou na operação do atuador etc é chamado *tempo morto* ou *retardo de transporte*. O tempo morto existe na maioria dos sistemas de controle de processos.

O sinal de entrada $x(t)$ e o sinal de saída $y(t)$ de um elemento com tempo morto ou retardo de transporte são relacionados por

$$y(t) = x(t - T)$$

onde T é o tempo morto. A função de transferência do tempo morto é dada por

$$\begin{aligned} \text{Função de transferência do tempo morto} \\ \text{ou retardo de transporte} &= \frac{\mathcal{L}[x(t - T)1(t - T)]}{\mathcal{L}[x(t)1(t)]} \\ &= \frac{X(s)e^{-Ts}}{X(s)} = e^{-Ts} \end{aligned}$$

Admita-se que a função de transferência do percurso direto deste sistema térmico possa ser aproximada por

$$G(s) = \frac{Ke^{-Ts}}{s + 1}$$

conforme indicado na Fig. 6-36. Seja, agora, construir um gráfico do lugar das raízes para este sistema. A equação característica deste sistema a malha fechada é

$$1 + \frac{Ke^{-Ts}}{s + 1} = 0 \quad (6-24)$$

Observe-se que nos sistemas com retardo de transporte, as regras de construção apresentadas inicialmente necessitam ser modificadas. Por exemplo, o número de ramos do lugar das raízes é infinito, uma vez que a equação característica tem um número infinito de raízes. O número de assíntotas é infinito. Elas são todas paralelas ao eixo real do plano s .

Da Eq. (6-24) obtém-se

$$\frac{Ke^{-Ts}}{s + 1} = -1$$

Portanto, a condição de ângulo se torna igual a

$$\left\langle \frac{Ke^{-Ts}}{s + 1} \right\rangle = \left\langle e^{-Ts} \right\rangle - \left\langle s + 1 \right\rangle = \pm 180^\circ(2k + 1) \quad (k = 0, 1, 2, \dots) \quad (6-25)$$

Para determinar o ângulo de e^{-Ts} , faz-se $s = \sigma + j\omega$. Obtém-se então

$$e^{-Ts} = e^{-T\sigma - j\omega T}$$

Como $e^{-T\sigma}$ é um número real positivo, o ângulo de $e^{-T\sigma}$ é zero. Portanto,

$$\begin{aligned} \left\langle e^{-Ts} \right\rangle &= \left\langle e^{-j\omega T} \right\rangle = \left\langle \cos \omega T - j \text{sen } \omega T \right\rangle \\ &= -\omega T \quad (\text{radianos}) \\ &= -57,3\omega T \quad (\text{graus}) \end{aligned}$$

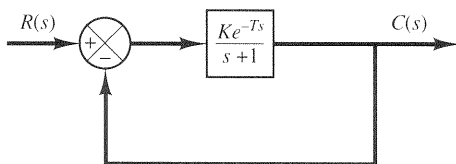


Fig. 6-36 Diagrama de blocos do sistema mostrado na Fig. 6-35.

A condição de ângulo, Eq. (6-25), torna-se

$$- 57,3\omega T - \angle s + 1 = \pm 180^\circ(2k + 1)$$

Uma vez que T é uma constante dada, o ângulo de e^{-Ts} é uma função apenas de ω .

Será determinada, agora, a contribuição angular devida ao termo e^{-Ts} . Para $k = 0$, a condição de ângulo pode ser escrita

$$\angle s + 1 = \pm 180^\circ - 57,3^\circ\omega T \quad (6-26)$$

Como a contribuição angular de e^{-Ts} é zero para $\omega = 0$, o eixo real desde -1 até $-\infty$ constitui uma parte do lugar das raízes. Suponha-se agora um valor ω_1 para ω e seja feito o cálculo de $57,3^\circ\omega_1 T$. No ponto -1 sobre o eixo real negativo, desenhe-se uma reta que faça um ângulo de $180^\circ - 57,3^\circ\omega_1 T$ com o eixo real. Encontre-se a interseção desta reta com a reta horizontal $\omega = \omega_1$. Esta interseção, ponto P na Fig. 6-37(a), é um ponto que satisfaz a Eq. (6-26) e, portanto, está sobre o lugar das raízes. Continuando-se o mesmo processo, obtém-se o gráfico do lugar das raízes indicado na Fig. 6-37(b).

Note-se que conforme s tende a menos infinito, a função de transferência a malha aberta

$$\frac{Ke^{-Ts}}{s + 1}$$

tende a menos infinito, uma vez que

$$\begin{aligned} \lim_{s \rightarrow -\infty} \frac{Ke^{-Ts}}{s + 1} &= \frac{\frac{d}{ds}(Ke^{-Ts})}{\frac{d}{ds}(s + 1)} \bigg|_{s \rightarrow -\infty} \\ &= -KTe^{-Ts} \bigg|_{s \rightarrow -\infty} \\ &= -\infty \end{aligned}$$

Portanto, $s = -\infty$ é um pólo da função de transferência a malha aberta. Conseqüentemente, os lugares das raízes têm início em $s = -1$ ou $s = -\infty$ e terminam em $s = \infty$, conforme K aumenta de zero a infinito. Uma vez que o segundo membro da condição de ângulo dada pela Eq. (6-25) possui um número infinito de valores, há um número infinito de lugares das raízes conforme o valor de k ($k = 0, 1, 2, \dots$) vai de zero a infinito. Por exemplo, se $k = 1$, a condição de ângulo se torna

$$\begin{aligned} \angle s + 1 &= \pm 540^\circ - 57,3^\circ\omega T \quad (\text{graus}) \\ &= \pm 3\pi - \omega T \quad (\text{radianos}) \end{aligned}$$

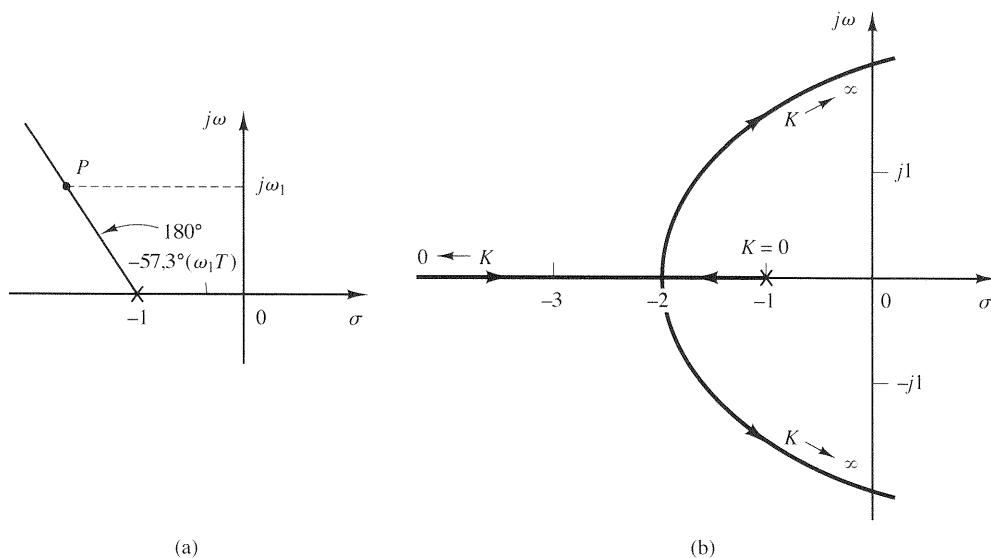


Fig. 6-37 (a) Construção do lugar das raízes; (b) gráfico do lugar das raízes.

A construção dos lugares das raízes para $k = 1$ é a mesma que para $k = 0$. O gráfico dos lugares das raízes para $k = 0, 1,$ e 2 quando $T = 1$ é mostrado na Fig. 6-38.

A condição de módulo estabelece que

$$\left| \frac{Ke^{-Ts}}{s + 1} \right| = 1$$

Como o módulo de e^{-Ts} é igual ao de $e^{-T\sigma}$ ou

$$|e^{-Ts}| = |e^{-T\sigma}| \cdot |e^{-j\omega T}| = e^{-T\sigma}$$

a condição de módulo resulta

$$|s + 1| = Ke^{-T\sigma}$$

Os lugares das raízes mostrados na Fig. 6-38 são graduados em termos de K quando $T = 1$ s.

Embora haja um número infinito de ramos de lugar das raízes, o ramo primário que permanece entre $-j\pi$ e $j\pi$ é o mais importante. Com base na Fig. 6-38, o valor crítico de K no ramo primário é igual a 2, enquanto os valores críticos de K em outros ramos são muito maiores (8, 14,...). Portanto, o valor crítico $K = 2$ no ramo primário é mais significativo do ponto de vista da estabilidade. A resposta transitória do sistema é determinada pelas raízes localizadas mais próximo ao eixo $j\omega$ e que permanecem sobre o ramo primário. Em resumo, o ramo do lugar das raízes correspondente a $k = 0$ é o ramo dominante; outros ramos correspondentes a $k = 1, 2, 3, \dots$ não são tão importantes e podem ser desprezados.

Este exemplo ilustra o fato de que o tempo morto pode causar instabilidade mesmo em sistemas de primeira ordem porque os lugares das raízes entram no semiplano direito do plano s para valores grandes de K . Portanto, embora o ganho K do sistema de primeira ordem possa ser ajustado em um valor alto na ausência de tempo morto, ele não pode ser ajustado muito alto se houver tempo morto. (Para o sistema aqui considerado, o valor do ganho K deve ser consideravelmente menor do que 2 para uma operação satisfatória.)

Aproximação do retardo de transporte ou tempo morto. Se o tempo morto T for muito pequeno, então e^{-Ts} poderá ser aproximado por

$$e^{-Ts} \cong 1 - Ts$$

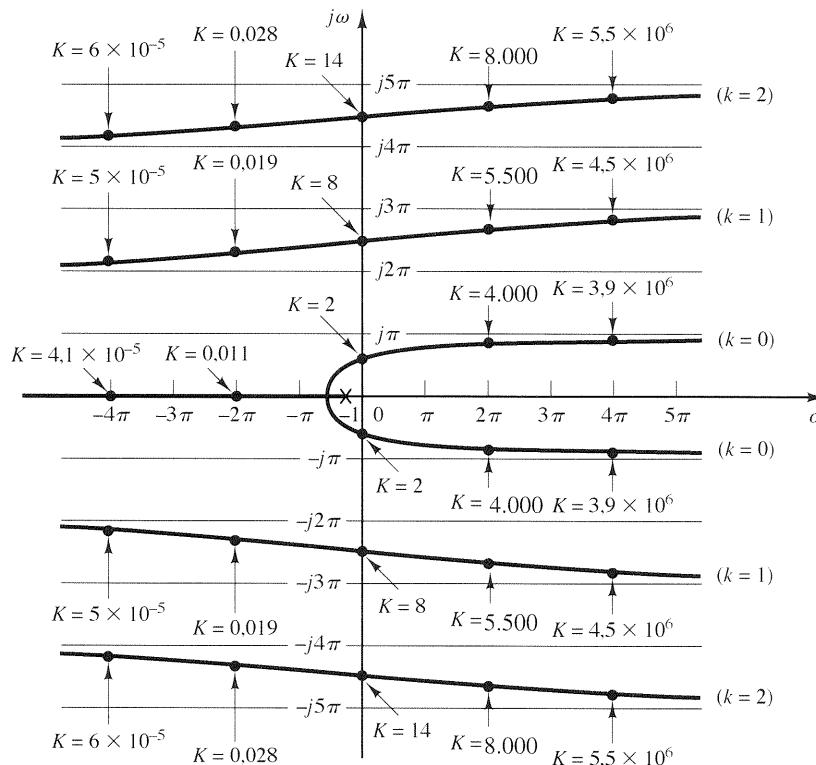


Fig. 6-38 Gráfico do lugar das raízes para o sistema mostrado na Fig. 6-36 ($T = 1$ s).

ou

$$e^{-Ts} \doteq \frac{1}{Ts + 1}$$

Estas aproximações são boas se o tempo morto for muito pequeno e, além disso, a função temporal de entrada $f(t)$ para o elemento com tempo morto for uma função suave e contínua. [Isto significa que as derivadas segunda e de ordens superiores de $f(t)$ são pequenas.]

Dispõe-se de uma expressão mais elaborada para aproximar o valor de e^{-Ts} , a saber

$$e^{-Ts} = \frac{1 - \frac{Ts}{2} + \frac{(Ts)^2}{8} - \frac{(Ts)^3}{48} + \dots}{1 + \frac{Ts}{2} + \frac{(Ts)^2}{8} + \frac{(Ts)^3}{48} + \dots}$$

Se apenas os dois primeiros termos do numerador e do denominador forem considerados, então

$$e^{-Ts} \doteq \frac{1 - \frac{Ts}{2}}{1 + \frac{Ts}{2}} = \frac{2 - Ts}{2 + Ts}$$

Esta aproximação é usada freqüentemente.

6-8 DIAGRAMAS DE CONTORNO DAS RAÍZES

Efeitos das variações dos parâmetros sobre pólos a malha fechada. Em muitos problemas de projeto necessitam ser investigados os efeitos das variações de parâmetros, que não sejam o ganho K , sobre os pólos a malha fechada. Tais efeitos podem ser facilmente investigados pelo método do lugar das raízes. Quando dois (ou mais) parâmetros são variados, os correspondentes lugares das raízes são denominados *contorno das raízes*.

Será utilizado um exemplo para ilustrar a construção dos contornos das raízes quando dois parâmetros são variados, respectivamente, desde zero até infinito.

Considere-se o sistema com retroação tacométrica mostrado na Fig. 6-39(a). Eliminando-se a malha interior secundária, tem-se o diagrama de blocos simplificado [Fig. 6-39(b)]. Definindo-se

$$a = b + KK_h$$

este diagrama de blocos pode ser modificado para a representação mostrada na Fig. 6-39(c). Este sistema envolve duas variáveis — o parâmetro a e o ganho K .

No que se segue serão investigados os efeitos da variação do parâmetro a bem como do ganho K . A função de transferência a malha fechada deste sistema se torna

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{K}{s^2 + as + K}$$

A equação característica é

$$s^2 + as + K = 0 \quad (6-27)$$

que pode ser reescrita

$$1 + \frac{as}{s^2 + K} = 0$$

ou

$$\frac{as}{s^2 + K} = -1 \quad (6-28)$$

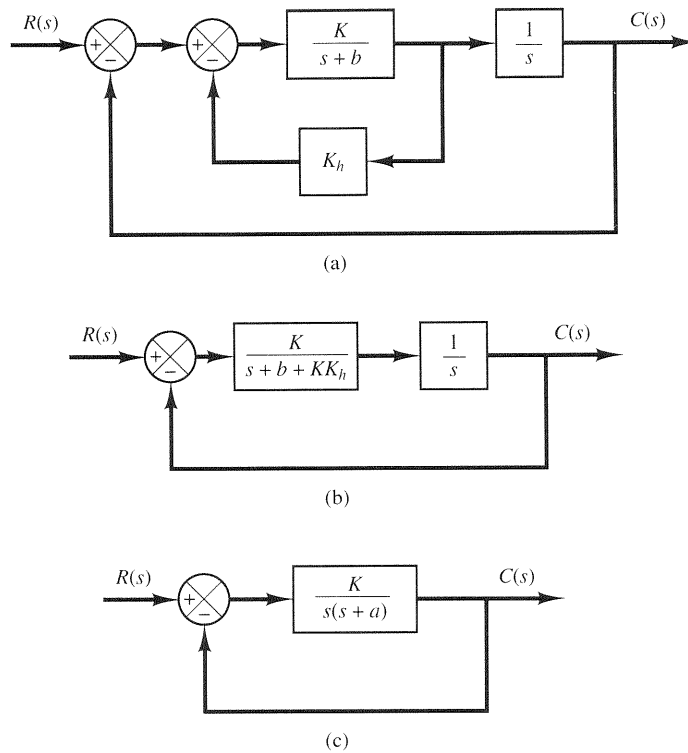


Fig. 6-39 (a) Servossistema com retroação tacométrica; (b), (c) diagramas de blocos simplificados ($a = b + KK_h$).

Na Eq. (6-28), o parâmetro a é escrito como um fator multiplicativo. Para um dado valor de K , o efeito de a nos pólos a malha fechada pode ser investigado a partir da Eq. (6-28). Os contornos das raízes para este sistema podem ser construídos seguindo-se o procedimento usual para a construção dos lugares das raízes.

Serão construídos agora os contornos das raízes conforme K e a variam respectivamente desde zero até infinito. Os contornos das raízes começam nos pólos (em $s = \pm j\sqrt{K}$) e terminam nos zeros (em $s = 0$ e no infinito).

Constroem-se, inicialmente, o lugar das raízes quando $a = 0$. Isto pode ser feito facilmente como a seguir. Substitua-se $a = 0$ na Eq. (6-27). Então

$$s^2 + K = 0$$

ou

$$\frac{K}{s^2} = -1 \quad (6-29)$$

Os pólos a malha aberta, portanto, são pólos duplos na origem. O gráfico do lugar das raízes da Eq. (6-29) é indicado na Fig. 6-40(a).

Para construir os contornos das raízes, iremos supor, inicialmente, que K é uma constante, por exemplo, $K = 4$. A Eq. (6-28) então se torna

$$\frac{as}{s^2 + 4} = -1 \quad (6-30)$$

Os pólos a malha aberta são $s = \pm j2$. O zero a malha aberta finito está na origem. O diagrama do lugar das raízes correspondente à Eq. (6-30) é mostrado na Fig. 6-40(b). Para diferentes valores de K , a Eq. (6-30) fornece lugares das raízes similares.

O contorno das raízes, o diagrama mostrando os lugares das raízes correspondentes a $0 < K < \infty$ e $0 < a < \infty$ pode ser traçado como na Fig. 6-40(c). É claro que os contornos das raízes têm início nos pólos e terminam nos zeros da função de transferência $as/(s^2 + K)$. As setas dos contornos das raízes indicam o sentido do aumento no valor de a .

Os contornos das raízes mostram os efeitos das variações dos parâmetros do sistema nos pólos a malha fechada. Do gráfico do contorno das raízes mostrado na Fig. 6-40(c) verifica-se que, para $0 < K < \infty$ e $0 < a < \infty$, os pólos a malha fechada ficam no semiplano esquerdo do plano s e o sistema é estável.

Note-se que se o valor de K é fixado, por exemplo em $K = 4$, então os contornos das raízes resultam simplesmente nos lugares das raízes como mostrado na Fig. 6-40(b).

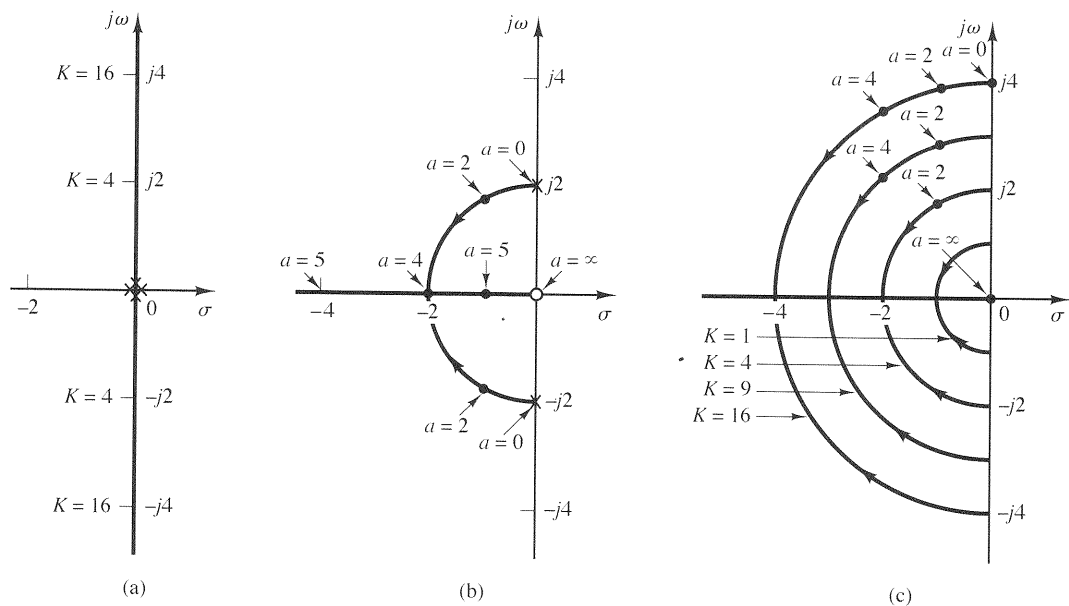


Fig. 6-40 (a) Gráfico do lugar das raízes para o sistema mostrado na Fig. 6-39(c) ($a = 0, 0 \leq K \leq \infty$); (b) gráfico do lugar das raízes ($0 \leq a \leq \infty, K = 4$); (c) gráfico do contorno das raízes.

Ilustrou-se um método de construção dos contornos das raízes quando o ganho K e o parâmetro a são variados, respectivamente, de zero a infinito. Basicamente, atribui-se a um parâmetro um valor constante de cada vez e se varia o outro parâmetro de 0 até ∞ esboçando-se os lugares das raízes. Varia-se, então, o valor do primeiro parâmetro e repete-se o esboço dos lugares das raízes. Repetindo-se este procedimento pode-se esboçar o contorno das raízes.

Um programa em MATLAB para gerar os contornos das raízes é mostrado a seguir, no Programa MATLAB 6-9. O gráfico resultante é mostrado na Fig. 6-41.

```

Programa MATLAB 6-9

% ----- Gráfico do contorno das raízes -----

%*****Traçar o contorno das raízes para o sistema mostrado
%na Fig. 6-39(c), onde a e K são variáveis*****

%*****Na Equação (6-28),  $as/(s^2 + K) = -1$ , admitir  $K = 1, 4, 9,$ 
%16,...e traçar os lugares das raízes quando a varia de zero a infinito*****

%*****Entrar o numerador e os denominadores*****

num = [0 1 0];
den1 = [1 0 1];
den2 = [1 0 4];
den3 = [1 0 9];
den4 = [1 0 16];

%*****Entrar com o comando rlocus(num,den)*****

rlocus(num,den1)
hold
Current plot held
rlocus(num,den2)
rlocus(num,den3)
rlocus(num,den4)
v = [-5 2 -5 5]; axis(v); axis('square');
grid
title('Contorno do Lugar das Raízes')

%*****Remover o comando hold*****

hold
Current plot released

```

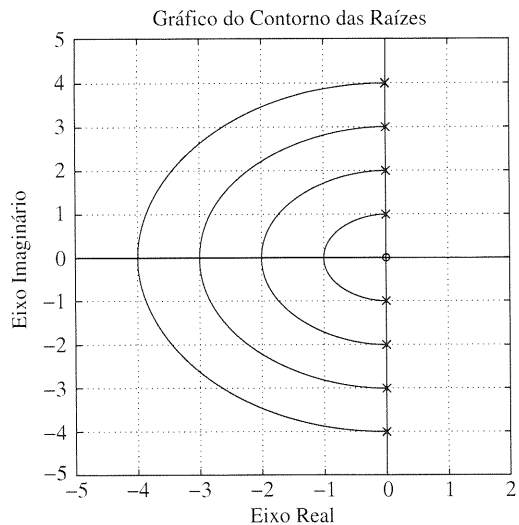


Fig. 6-41 Gráfico do contorno das raízes gerado com o MATLAB.

PROBLEMAS ILUSTRATIVOS E SOLUÇÕES

A-6-1. Esboçar os lugares das raízes para o sistema mostrado na Fig. 6-42(a). (Supõe-se o ganho K positivo.) Observe-se que para valores pequenos e grandes de K o sistema é superamortecido e que para valores intermediários de K ele é subamortecido.

Solução. O procedimento para traçar os lugares das raízes é o seguinte:

1. Localizar os pólos e zeros da malha aberta no plano complexo. Os lugares das raízes existem sobre o semi-eixo real negativo nos segmentos entre 0 e -1 e entre -2 e -3 .
2. O número de pólos da malha aberta e o número de zeros finitos é o mesmo. Isto significa que não há assíntotas na região complexa do plano s .
3. Determinação dos pontos de chegada e de partida. A equação característica do sistema é

$$1 + \frac{K(s+2)(s+3)}{s(s+1)} = 0$$

ou

$$K = -\frac{s(s+1)}{(s+2)(s+3)}$$

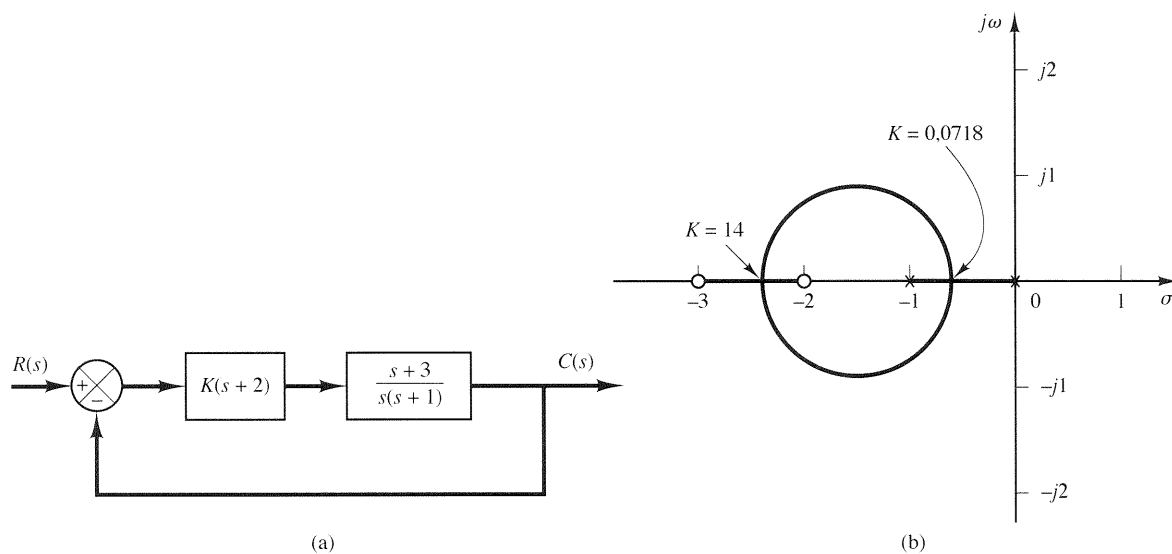


Fig. 6-42 (a) Sistema de controle; (b) gráfico do lugar das raízes.

Os pontos de partida e de chegada são determinados a partir de

$$\begin{aligned}\frac{dK}{ds} &= -\frac{(2s+1)(s+2)(s+3) - s(s+1)(2s+5)}{[(s+2)(s+3)]^2} \\ &= -\frac{4(s+0,634)(s+2,366)}{[(s+2)(s+3)]^2} \\ &= 0\end{aligned}$$

como sendo

$$s = -0,634, \quad s = -2,366$$

Observe-se que ambos os pontos estão sobre os lugares das raízes. Em conseqüência, eles são realmente pontos de partida e de chegada. No ponto $s = -0,634$, o valor de K é

$$K = -\frac{(-0,634)(0,366)}{(1,366)(2,366)} = 0,0718$$

De modo análogo, em $s = -2,366$,

$$K = -\frac{(-2,366)(-1,366)}{(-0,366)(0,634)} = 14$$

(Como o ponto $s = -0,634$ está situado entre dois pólos, é um ponto de partida, e, como $s = -2,366$ fica situado entre dois zeros, este é um ponto de chegada.)

4. Determinação de um número suficiente de pontos satisfazendo a condição angular. (Pode-se descobrir que o lugar das raízes é um círculo com centro em $-1,5$ e que passa pelos pontos de saída e de entrada.) O lugar das raízes do sistema é mostrado na Fig. 6-42(b).

Observe-se que este sistema é estável, quaisquer que sejam os valores positivos de K , uma vez que os lugares das raízes estão situados no semiplano s da esquerda.

Valores pequenos de K ($0 < K < 0,0718$) correspondem a um sistema superamortecido. Valores intermediários de K ($0,0718 < K < 14$) correspondem a um sistema subamortecido. Finalmente, para valores grandes de K ($K > 14$), o sistema é superamortecido. Para valores grandes de K , o estado estacionário pode ser alcançado num tempo muito menor do que com valores pequenos de K .

O valor de K deve ser ajustado de modo que o desempenho do sistema seja ótimo segundo um dado índice de desempenho.

- A-6-2.** Uma forma simplificada da função de transferência de uma aeronave com piloto automático no módulo longitudinal é

$$G(s)H(s) = \frac{K(s+a)}{s(s-b)(s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2)}, \quad a > 0, \quad b > 0$$

Um tal sistema, envolvendo um pólo a malha aberta no semiplano s da direita, pode ser condicionalmente estável. Esboçar os lugares das raízes quando $a = b = 1$, $\zeta = 0,5$ e $\omega_n = 4$. Determinar a faixa de valores de K que corresponde à estabilidade.

Solução. A função de transferência a malha aberta do sistema é

$$G(s)H(s) = \frac{K(s+1)}{s(s-1)(s^2 + 4s + 16)}$$

Para esboçar os lugares das raízes será adotado o seguinte procedimento:

1. Localizar os pólos e zeros a malha aberta no plano complexo. Os lugares das raízes existem, sobre o eixo real, entre 1 e 0 e entre -1 e $-\infty$.
2. Determinar as assíntotas dos lugares das raízes. Há três assíntotas cujas inclinações angulares são determinadas como

$$\hat{\text{Ângulos das assíntotas}} = \frac{180^\circ(2k+1)}{4-1} = 60^\circ, -60^\circ, 180^\circ$$

Com base na Eq (6-15), a abscissa da interseção das assíntotas e do eixo real é

$$\sigma_a = -\frac{(0-1+2+j2\sqrt{3}+2-j2\sqrt{3})-1}{4-1} = -\frac{2}{3}$$

3. Determinar os pontos de partida e de chegada. Como a equação característica é

$$1 + \frac{K(s+1)}{s(s-1)(s^2+4s+16)} = 0$$

obtem-se

$$K = -\frac{s(s-1)(s^2+4s+16)}{s+1}$$

Derivando-se K em relação a s , tem-se

$$\frac{dK}{ds} = -\frac{3s^4 + 10s^3 + 21s^2 + 24s - 16}{(s+1)^2}$$

O numerador pode ser fatorado como a seguir:

$$\begin{aligned} 3s^4 + 10s^3 + 21s^2 + 24s - 16 \\ = 3(s + 0,76 + j2,16)(s + 0,76 - j2,16)(s + 2,26)(s - 0,45) \end{aligned}$$

Os pontos $s = 0,45$ e $s = -2,26$ estão sobre os lugares das raízes e sobre o eixo real. Portanto, estes são, respectivamente, de fato, ponto de partida e ponto de chegada. Os pontos no plano complexo $s = -0,76 \pm j2,16$ não satisfazem a condição angular. Não correspondem, portanto, nem a pontos de partida, nem a pontos de chegada.

4. Utilizando o critério de estabilidade de Routh, determinar os valores de K para os quais os lugares das raízes interceptam o eixo imaginário. Como a equação característica é

$$s^4 + 3s^3 + 12s^2 + (K - 16)s + K = 0$$

o arranjo tabular de Routh se torna

s^4	1	12	K
s^3	3	$K - 16$	0
s^2	$\frac{52 - K}{3}$	K	0
s^1	$\frac{-K^2 + 59K - 832}{52 - K}$	0	
s^0	K		

Os valores de K que fazem o termo s^1 igual a zero são $K = 35,7$ e $K = 23,3$.

Os pontos de interseção com o eixo imaginário podem ser determinados resolvendo-se a equação auxiliar obtida a partir da linha s^2 , isto é, obtendo-se os valores de s na equação

$$\frac{52 - K}{3} s^2 + K = 0$$

Os resultados são

$$s = \pm j2,56, \quad \text{para } K = 35,7$$

$$s = \pm j1,56, \quad \text{para } K = 23,3$$

Os pontos de interseção com o eixo imaginário são, por conseguinte, $s = \pm j2,56$ e $s = \pm j1,56$.

5. Achar os ângulos de partida dos pólos complexos. Para o pólo a malha aberta em $s = -2 + j2\sqrt{3}$, o ângulo de partida θ é igual a

$$\theta = 180^\circ - 120^\circ - 130,5^\circ - 90^\circ + 106^\circ$$

ou

$$\theta = -54,5^\circ$$

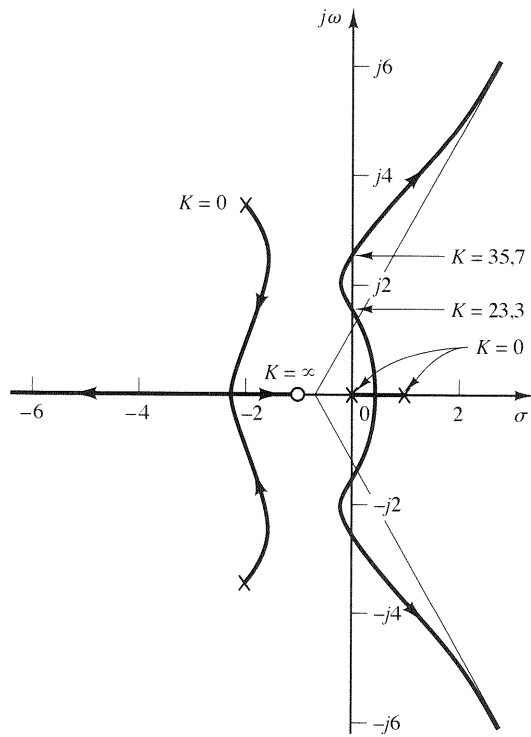


Fig. 6-43 Gráfico do lugar das raízes.

(O ângulo de partida do pólo a malha aberta em $s = -2 - j2\sqrt{3}$ é $54,5^\circ$.)

6. Escolher um ponto de teste numa vizinhança ampla do eixo $j\omega$ e da origem e aplicar a condição de ângulo. Se o ponto de teste não satisfizer a condição angular, escolher um outro ponto de teste até que a condição seja satisfeita. Continuar o mesmo processo e locar um número suficiente de pontos que satisfaçam a condição angular.

A Fig. 6-43 mostra os lugares das raízes deste sistema. Conclui-se, do passo 4, que o sistema é estável para $23,3 < K < 35,7$. Fora desta faixa, é instável.

A-6-3. Esboçar os lugares das raízes para o sistema de controle mostrado na Fig. 6-44(a).

Solução. Os pólos a malha aberta estão localizados em $s = 0$, $s = -3 + j4$ e $s = -3 - j4$. Existe um ramo do lugar das raízes sobre o eixo real entre a origem e $-\infty$. Há três assíntotas para os lugares das raízes. Os ângulos das assíntotas são

$$\hat{\text{Ângulos das assíntotas}} = \frac{\pm 180^\circ(2k + 1)}{3} = 60^\circ, -60^\circ, 180^\circ$$

Com base na Eq. (6-15), a abscissa da interseção das assíntotas e do eixo real é

$$\sigma_a = -\frac{0 + 3 + 3}{3} = -2$$

Em seguida, são testados os pontos de partida e de chegada. Para este sistema tem-se

$$K = -s(s^2 + 6s + 25)$$

Fazendo-se

$$\frac{dK}{ds} = -(3s^2 + 12s + 25) = 0$$

resultam

$$s = -2 + j2,0817, \quad s = -2 - j2,0817$$

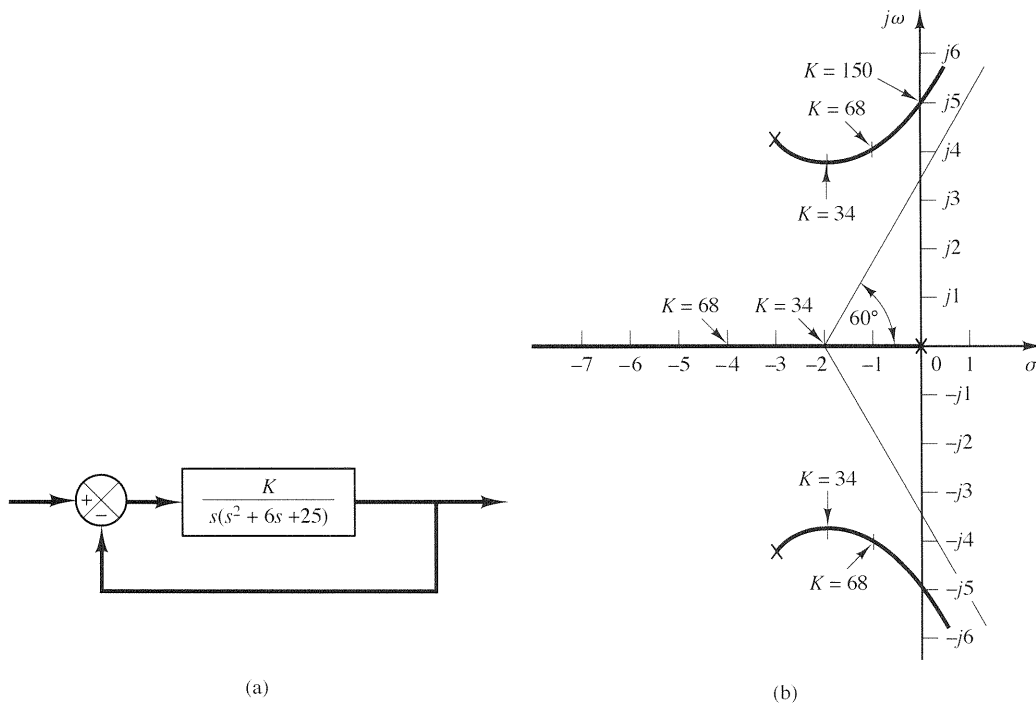


Fig. 6-44 (a) Sistema de controle; (b) gráfico do lugar das raízes.

Observe-se que nos pontos $s = -2 \pm j2,0817$ a condição de ângulo não é satisfeita. Portanto, estes não constituem nem pontos de partida, nem pontos de chegada. Com efeito, calculando-se o valor de K correspondente, obtém-se

$$K = -s(s^2 + 6s + 25) \Big|_{s=-2 \pm j2,0817} = 34 \pm j18,04$$

(Para ser um verdadeiro ponto de partida ou de chegada, o valor de K correspondente deve ser real e positivo.)

O ângulo de partida do pólo complexo situado no semiplano superior de s é

$$\theta = 180^\circ - 126,87^\circ - 90^\circ$$

ou

$$\theta = -36,87^\circ$$

Os pontos onde os ramos do lugar das raízes cruzam o eixo imaginário podem ser encontrados substituindo-se $s = j\omega$ na equação característica e resolvendo-se a equação resultante para K e ω , como a seguir: observando-se que a equação característica do sistema é

$$s^3 + 6s^2 + 25s + K = 0$$

tem-se

$$(j\omega)^3 + 6(j\omega)^2 + 25(j\omega) + K = (-6\omega^2 + K) + j\omega(25 - \omega^2) = 0$$

o que conduz a

$$\omega = \pm 5, \quad K = 150 \quad \text{ou} \quad \omega = 0, \quad K = 0$$

Os lugares das raízes interceptam o eixo imaginário em $\omega = 5$ e $\omega = -5$. O valor de K nestes pontos de interseção é 150. Além disso, o ramo do lugar das raízes sobre o eixo real toca o eixo imaginário em $\omega = 0$. A Fig. 6-44(b) mostra o gráfico do lugar das raízes deste sistema.

Nota-se que se o grau do polinômio em numerador de $G(s)H(s)$ é inferior, em duas ou mais unidades, ao grau do polinômio em denominador, e se algum dos pólos a malha fechada se mover para a direita em função de um aumento no valor de K , então os outros pólos devem se deslocar para a esquerda à medida que seja aumentado o valor de K . Isto pode ser visto claramente neste problema. Se o ganho K aumentar de $K = 34$ para $K = 68$, os pólos complexos conjugados a malha fechada se deslocam de $s = -2 + j3,65$ para $s = -1 \pm j4$; o terceiro pólo se move de $s = -2$ (que corresponde a $K = 34$) para $s = -4$ (que corresponde a $K = 68$). Assim, os

deslocamentos de dois pólos complexos conjugados a malha fechada para a direita, de uma unidade, ocasionam o deslocamento do pólo a malha fechada restante (pólo real, neste caso) de duas unidades, para a esquerda.

A-6-4. Considere-se o sistema mostrado na Fig. 6-45(a). Esboçar os lugares das raízes do sistema. Observe-se que para valores pequenos e grandes de K o sistema é subamortecido e para valores intermediários de K o sistema é superamortecido.

Solução. Um ramo do lugar das raízes existe sobre o eixo real, entre a origem e $-\infty$. Os ângulos das assíntotas dos ramos do lugar das raízes são obtidos a partir de

$$\hat{\text{Ângulos das assíntotas}} = \frac{\pm 180^\circ(2k + 1)}{3} = 60^\circ, -60^\circ, -180^\circ$$

A interseção das assíntotas e do eixo real está situada sobre o eixo real em

$$\sigma_a = -\frac{0 + 2 + 2}{3} = -1,3333$$

Os pontos de entrada e de saída são encontrados a partir de $dK/ds = 0$. Como a equação característica é

$$s^3 + 4s^2 + 5s + K = 0$$

tem-se

$$K = -(s^3 + 4s^2 + 5s)$$

Fazendo-se

$$\frac{dK}{ds} = -(3s^2 + 8s + 5) = 0$$

que conduz a

$$s = -1, \quad s = -1,6667$$

Como os pontos se encontram sobre o lugar das raízes, são realmente pontos de partida ou pontos de chegada. (No ponto $s = -1$, o valor de K é 2 e, no ponto $s = -1,667$, o valor de K é 1,852.)

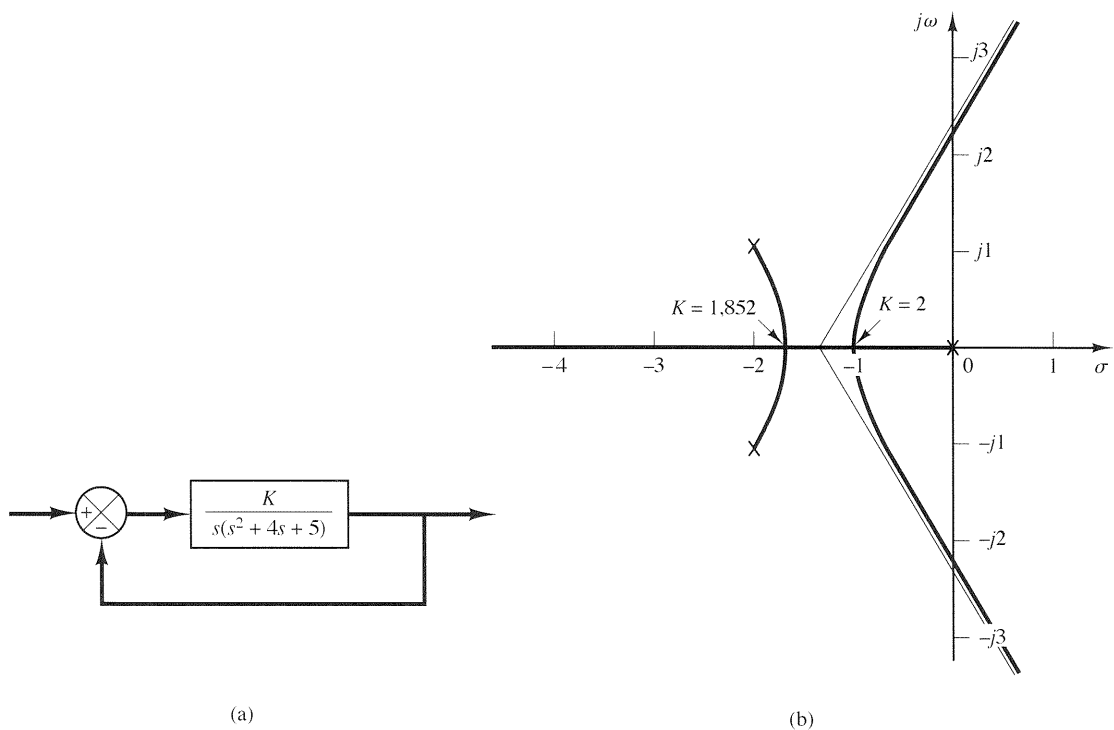


Fig. 6-45 (a) Sistema de controle; (b) gráfico do lugar das raízes.

O ângulo de partida de um pólo complexo situado no semiplano superior de s é obtido a partir de

$$\theta = 180^\circ - 153,43^\circ - 90^\circ$$

ou

$$\theta = -63,43^\circ$$

O ramo do lugar das raízes, originado no pólo complexo situado no semiplano superior de s , entra no eixo real em $s = -1,6667$.

Em seguida, são determinados os pontos onde os ramos do lugar das raízes cruzam o eixo imaginário. Substituindo-se $s = j\omega$ na equação característica, tem-se

$$(j\omega)^3 + 4(j\omega)^2 + 5(j\omega) + K = 0$$

ou

$$(K - 4\omega^2) + j\omega(5 - \omega^2) = 0$$

de que se obtém

$$\omega = \pm\sqrt{5}, \quad K = 20 \quad \text{ou} \quad \omega = 0, \quad K = 0$$

Os ramos do lugar das raízes cruzam o eixo imaginário em $\omega = \sqrt{5}$ e $\omega = -\sqrt{5}$. O ramo do lugar das raízes sobre o eixo real toca o eixo $j\omega$ em $\omega = 0$. Um esboço dos lugares das raízes deste sistema é mostrado na Fig. 6-45(b).

Note-se que, como este sistema é de terceira ordem, há três pólos a malha fechada. A natureza da resposta do sistema a uma dada excitação depende da localização dos pólos a malha fechada.

Para $0 < K < 1,852$, há um conjunto de dois pólos complexos conjugados e um pólo real a malha fechada. Para $1,852 \leq K \leq 2$, há três pólos reais a malha fechada. Por exemplo, os pólos a malha fechada são localizados em

$$\begin{aligned} s = -1,667, \quad s = -1,667, \quad s = -0,667, \quad \text{para } K = 1,852 \\ s = -1, \quad s = -1, \quad s = -2, \quad \text{para } K = 2 \end{aligned}$$

Para $K > 2$, há um conjunto de dois pólos complexos e um pólo real a malha fechada. Assim, pequenos valores de K ($0 < K < 1,852$) correspondem a um sistema subamortecido. (Uma vez que o pólo real é dominante, apenas uma pequena ondulação poderá estar presente na resposta transitória.) Valores intermediários de K ($1,852 \leq K \leq 2$) correspondem a um sistema superamortecido. Para valores elevados de K o sistema responde mais rápido do que para valores pequenos de K .

A-6-5. Esboçar os lugares das raízes para o sistema mostrado na Fig. 6-46(a).

Solução. Os pólos a malha aberta estão localizados em $s = 0$, $s = -1$, $s = -2 + j3$ e $s = -2 - j3$. Existe um ramo do lugar das raízes no eixo real entre os pontos $s = 0$ e $s = -1$. As assíntotas são determinadas como a seguir:

$$\hat{\text{Ângulos das assíntotas}} = \frac{\pm 180^\circ(2k + 1)}{4} = 45^\circ, -45^\circ, 135^\circ, -135^\circ$$

A interseção das assíntotas e do eixo real é encontrada a partir de

$$\sigma_a = -\frac{0 + 1 + 2 + 2}{4} = -1,25$$

Os pontos de entrada e de saída são encontrados a partir de $dK/ds = 0$. Observando-se que

$$K = -s(s + 1)(s^2 + 4s + 13) = -(s^4 + 5s^3 + 17s^2 + 13s)$$

tem-se

$$\frac{dK}{ds} = -(4s^3 + 15s^2 + 34s + 13) = 0$$

de onde

$$s = -0,467, \quad s = -1,642 + j2,067, \quad s = -1,642 - j2,067$$

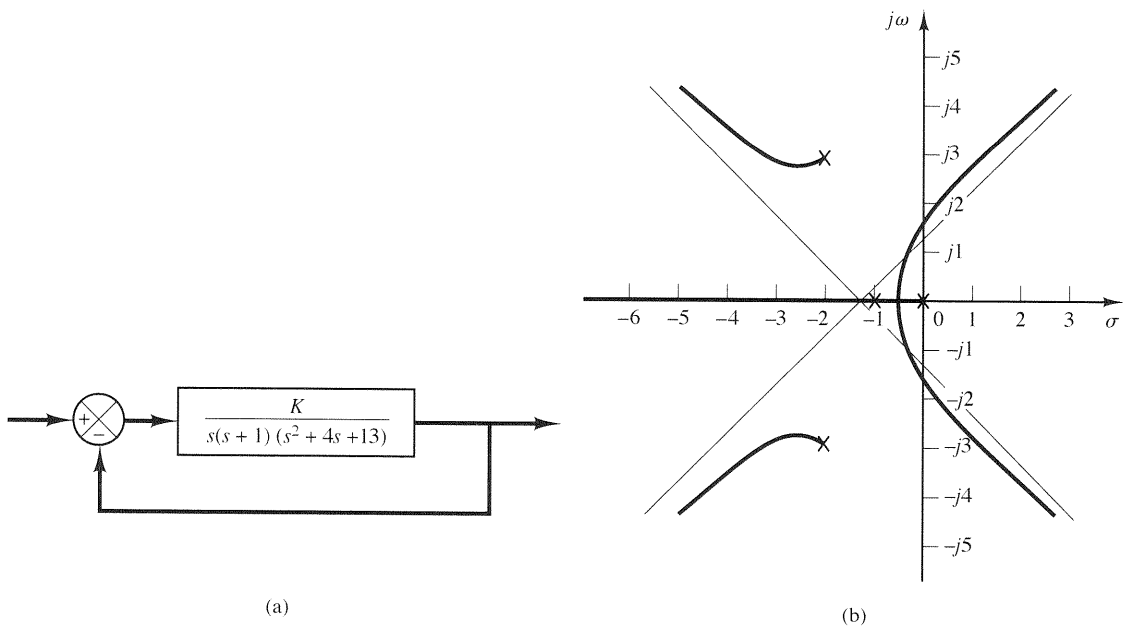


Fig. 6-46 (a) Sistema de controle; (b) gráfico do lugar das raízes.

O ponto $s = -0,467$ está sobre o lugar das raízes. Em conseqüência, é um ponto de partida real. Os valores do ganho K correspondentes aos pontos $s = -1,642 \pm j2,067$ são grandezas complexas. Como os valores de ganho não são reais positivos, estes pontos não são pontos de entrada nem de partida.

O ângulo de partida do pólo complexo situado no semiplano superior de s é

$$\theta = 180^\circ - 123,69^\circ - 108,44^\circ - 90^\circ$$

ou

$$\theta = -142,13^\circ$$

Em seguida serão determinados os pontos onde os ramos do lugar das raízes cruzam o eixo $j\omega$. Como a equação característica é

$$s^4 + 5s^3 + 17s^2 + 13s + K = 0$$

substituindo-se $s = j\omega$ nesta equação, tem-se

$$(j\omega)^4 + 5(j\omega)^3 + 17(j\omega)^2 + 13(j\omega) + K = 0$$

ou

$$(K + \omega^4 - 17\omega^2) + j\omega(13 - 5\omega^2) = 0$$

de onde se obtém

$$\omega = \pm 1,6125, \quad K = 37,44 \quad \text{ou} \quad \omega = 0, \quad K = 0$$

Os ramos dos lugares das raízes que se estendem para o semiplano s da direita cruzam o eixo imaginário em $\omega = \pm 1,6125$. Além disso, o ramo do lugar das raízes sobre o eixo real toca o eixo imaginário em $\omega = 0$. A Fig. 6-46(b) mostra um esboço dos lugares das raízes deste sistema. Observe-se que cada um dos ramos do lugar das raízes que se estende no semiplano da direita atravessa a própria assíntota.

A-6-6. Esboçar os lugares das raízes do sistema mostrado na Fig. 6-47(a).

Solução. Existe um ramo do lugar das raízes no eixo real entre os pontos $s = -1$ e $s = -3,6$. As assíntotas são determinadas como a seguir:

$$\hat{\text{Ângulos das assíntotas}} = \frac{\pm 180^\circ(2k + 1)}{3 - 1} = 90^\circ, -90^\circ$$

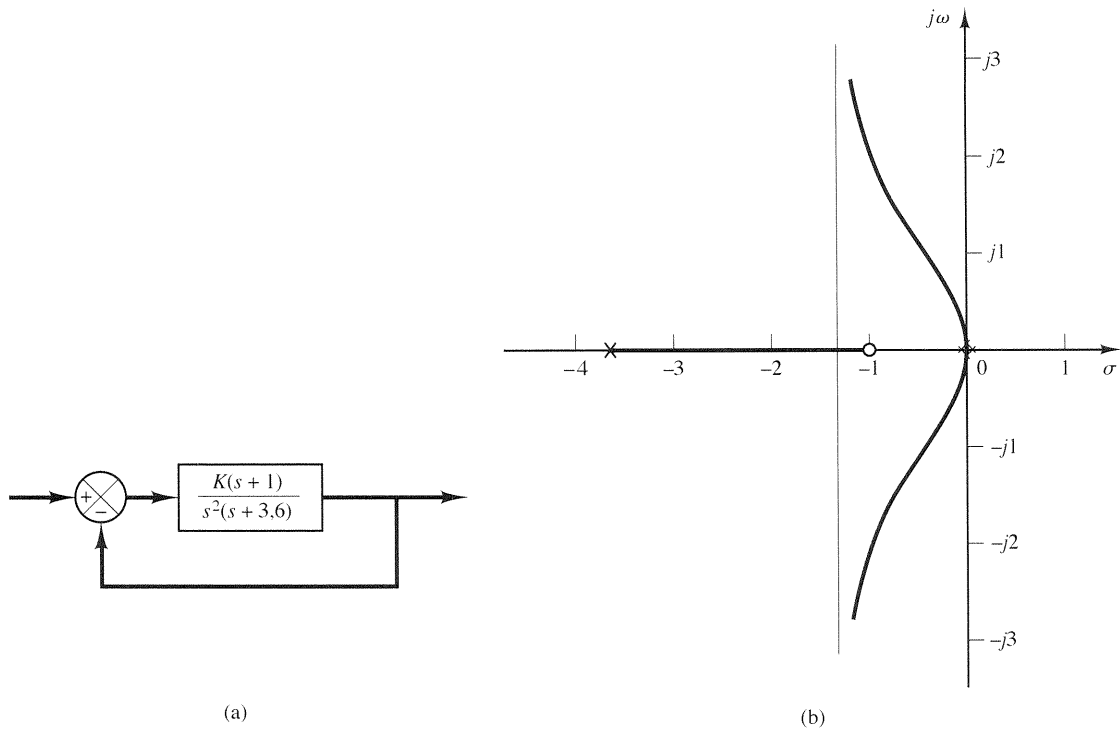


Fig. 6-47 (a) Sistema de controle; (b) gráfico do lugar das raízes.

A interseção das assíntotas e do eixo real é encontrada a partir de

$$\sigma_a = -\frac{0 + 0 + 3,6 - 1}{3 - 1} = -1,3$$

Como a equação característica é

$$s^3 + 3,6s^2 + K(s + 1) = 0$$

tem-se

$$K = -\frac{s^3 + 3,6s^2}{s + 1}$$

Os pontos de partida e de chegada serão obtidos a partir de

$$\frac{dK}{ds} = -\frac{(3s^2 + 7,2s)(s + 1) - (s^3 + 3,6s^2)}{(s + 1)^2} = 0$$

ou

$$s^3 + 3,3s^2 + 3,6s = 0$$

de onde se tem

$$s = 0, \quad s = -1,65 + j0,9367, \quad s = -1,65 - j0,9367$$

O ponto $s = 0$ corresponde a um real ponto de partida. Porém, os pontos $s = -1,65 \pm j0,9367$ não correspondem nem a pontos de partida nem a pontos de chegada porque os valores correspondentes do ganho K são grandezas complexas.

Para verificar os pontos onde os ramos dos lugares das raízes possam cortar o eixo imaginário, substitui-se $s = j\omega$ na equação característica.

$$(j\omega)^3 + 3,6(j\omega)^2 + Kj\omega + K = 0$$

ou

$$(K - 3,6\omega^2) + j\omega(K - \omega^2) = 0$$

Observe-se que esta equação só pode ser satisfeita se $\omega = 0$ e $K = 0$. Devido à presença de um pólo duplo na origem, o lugar das raízes é tangente ao eixo $j\omega$ em $\omega = 0$. Os ramos dos lugares das raízes não cruzam o eixo $j\omega$. A Fig. 6-47(b) é um esboço dos lugares das raízes deste sistema.

A-6-7. Esboçar os lugares das raízes do sistema mostrado na Fig. 6-48(a).

Solução. Existe um ramo do lugar das raízes no eixo real entre os pontos $s = -0,4$ e $s = -3,6$. As assíntotas são determinadas como a seguir:

$$\hat{\text{Ângulos das assíntotas}} = \frac{\pm 180^\circ(2k + 1)}{3 - 1} = 90^\circ, -90^\circ$$

A interseção das assíntotas e do eixo real é encontrada a partir de

$$\sigma_a = -\frac{0 + 0 + 3,6 - 0,4}{3 - 1} = -1,6$$

Em seguida, são determinados os pontos de partida. Como a equação característica é

$$s^3 + 3,6s^2 + Ks + 0,4K = 0$$

tem-se

$$K = -\frac{s^3 + 3,6s^2}{s + 0,4}$$

Os pontos de partida e de chegada serão obtidos a partir de

$$\frac{dK}{ds} = -\frac{(3s^2 + 7,2s)(s + 0,4) - (s^3 + 3,6s^2)}{(s + 0,4)^2} = 0$$

resultando

$$s^3 + 2,4s^2 + 1,44s = 0$$

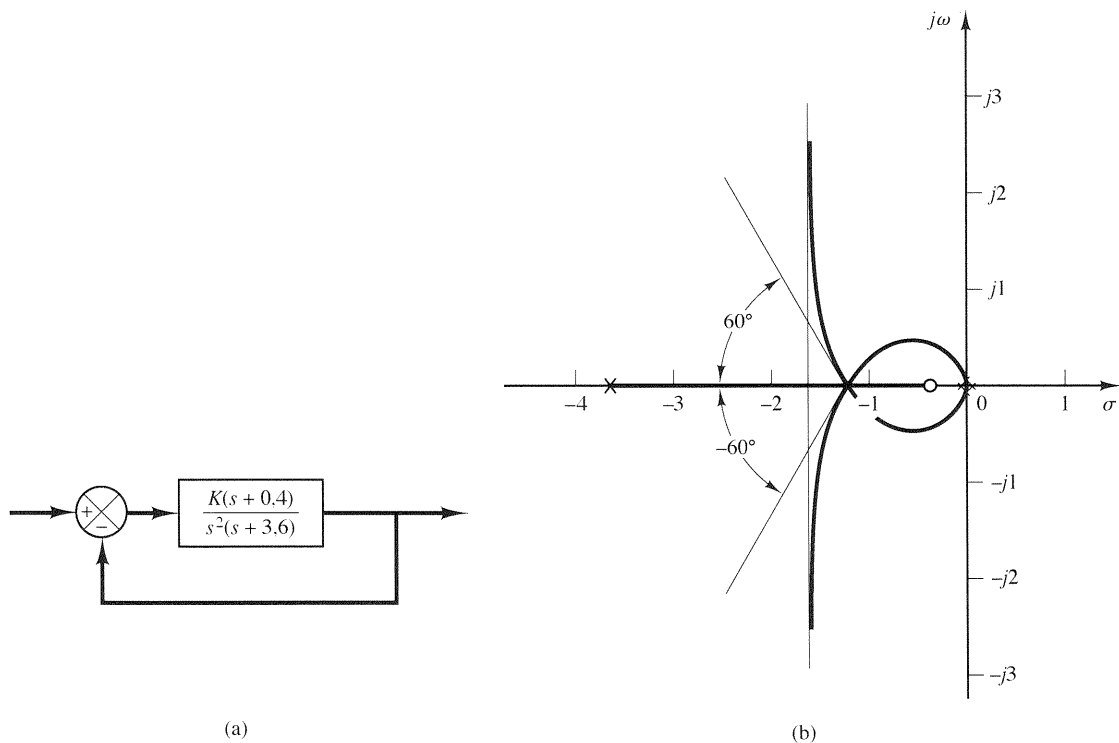


Fig. 6-48 (a) Sistema de controle; (b) gráfico do lugar das raízes.

ou

$$s(s + 1,2)^2 = 0$$

Assim, os pontos de partida ou de chegada estão situados em $s = 0$ e $s = -1,2$. Observe-se que $s = -1,2$ é uma raiz dupla. Quando ocorre uma raiz dupla em $dK/ds = 0$ no ponto $s = -1,2$, $d^2K/(ds^2) = 0$ neste ponto. O valor do ganho K no ponto $s = -1,2$ é

$$K = \left. -\frac{s^3 + 3,6s^2}{s + 0,4} \right|_{s=-1,2} = 4,32$$

Isto significa que com $K = 4,32$ a equação característica possui um pólo triplo em $s = -1,2$. Isto pode ser facilmente comprovado como a seguir:

$$s^3 + 3,6s^2 + 4,32s + 1,728 = (s + 1,2)^3 = 0$$

Portanto, os três ramos do lugar das raízes se encontram no ponto $s = -1,2$. Os ângulos de partida do ponto $s = -1,2$ dos ramos que tendem para as assíntotas são $\pm 180^\circ/3$, isto é, 60° e -60° . (Ver Problema A-6-8.)

Finalmente, será examinado se os ramos do lugar das raízes cruzam o eixo imaginário. Substituindo-se $s = j\omega$ na equação característica, tem-se

$$(j\omega)^3 + 3,6(j\omega)^2 + K(j\omega) + 0,4K = 0$$

ou

$$(0,4K - 3,6\omega^2) + j\omega(K - \omega^2) = 0$$

Esta equação só pode ser satisfeita se $\omega = 0$ e $K = 0$. No ponto $\omega = 0$, o lugar das raízes é tangente ao eixo $j\omega$ devido à presença de um pólo duplo na origem. Não há pontos onde os ramos dos lugares das raízes cruzem o eixo imaginário.

A Fig. 6-48(b) mostra um esboço dos lugares das raízes deste sistema.

A-6-8. Com base no Problema A-6-7, obter as equações dos ramos do lugar das raízes para o sistema mostrado na Fig. 6-48(a). Mostrar que os ramos do lugar das raízes cruzam o eixo real no ponto de partida segundo ângulos de $\pm 60^\circ$.

Solução. As equações dos ramos dos lugares das raízes podem ser obtidas a partir da condição de ângulo

$$\left/ \frac{K(s + 0,4)}{s^2(s + 3,6)} \right. = \pm 180^\circ(2k + 1)$$

que pode ser reescrita como

$$\left/ s + 0,4 \right. - 2 \left/ s \right. - \left/ s + 3,6 \right. = \pm 180^\circ(2k + 1)$$

Substituindo-se $s = \sigma + j\omega$, obtém-se

$$\left/ \sigma + j\omega + 0,4 \right. - 2 \left/ \sigma + j\omega \right. - \left/ \sigma + j\omega + 3,6 \right. = \pm 180^\circ(2k + 1)$$

ou

$$\tan^{-1} \left(\frac{\omega}{\sigma + 0,4} \right) - 2 \tan^{-1} \left(\frac{\omega}{\sigma} \right) - \tan^{-1} \left(\frac{\omega}{\sigma + 3,6} \right) = \pm 180^\circ(2k + 1)$$

Rearranjando-se os termos, vem

$$\tan^{-1} \left(\frac{\omega}{\sigma + 0,4} \right) - \tan^{-1} \left(\frac{\omega}{\sigma} \right) = \tan^{-1} \left(\frac{\omega}{\sigma} \right) + \tan^{-1} \left(\frac{\omega}{\sigma + 3,6} \right) \pm 180^\circ(2k + 1)$$

Tomando-se a tangente de ambos os membros desta última equação e observando-se que

$$\tan \left[\tan^{-1} \left(\frac{\omega}{\sigma + 3,6} \right) \pm 180^\circ(2k + 1) \right] = \frac{\omega}{\sigma + 3,6}$$

obtem-se

$$\frac{\frac{\omega}{\sigma + 0,4} - \frac{\omega}{\sigma}}{1 + \frac{\omega}{\sigma + 0,4} \frac{\omega}{\sigma}} = \frac{\frac{\omega}{\sigma} + \frac{\omega}{\sigma + 3,6}}{1 - \frac{\omega}{\sigma} \frac{\omega}{\sigma + 3,6}}$$

que pode ser simplificado para

$$\frac{\omega\sigma - \omega(\sigma + 0,4)}{(\sigma + 0,4)\sigma + \omega^2} = \frac{\omega(\sigma + 3,6) + \omega\sigma}{\sigma(\sigma + 3,6) - \omega^2}$$

ou

$$\omega(\sigma^3 + 2,4\sigma^2 + 1,44\sigma + 1,6\omega^2 + \sigma\omega^2) = 0$$

que pode ser simplificado adicionalmente para

$$\omega[\sigma(\sigma + 1,2)^2 + (\sigma + 1,6)\omega^2] = 0$$

Para $\sigma \neq -1,6$, pode-se escrever esta última equação como

$$\left[\omega - (\sigma + 1,2) \sqrt{\frac{-\sigma}{\sigma + 1,6}} \right] \left[\omega + (\sigma + 1,2) \sqrt{\frac{-\sigma}{\sigma + 1,6}} \right] = 0$$

que fornece as equações para o lugar das raízes, como a seguir

$$\omega = 0$$

$$\omega = (\sigma + 1,2) \sqrt{\frac{-\sigma}{\sigma + 1,6}}$$

$$\omega = -(\sigma + 1,2) \sqrt{\frac{-\sigma}{\sigma + 1,6}}$$

A equação $\omega = 0$ representa o eixo real. O lugar das raízes para $0 \leq K \leq \infty$ está situado entre os pontos $s = -0,4$ e $s = -3,6$. (A parte do eixo real que difere deste segmento e da origem $s = 0$ corresponde ao lugar das raízes para $-\infty \leq K < 0$.)

As equações

$$\omega = \pm(\sigma + 1,2) \sqrt{\frac{-\sigma}{\sigma + 1,6}} \quad (6-31)$$

representam os ramos complexos para $0 \leq K \leq \infty$. Estes dois ramos estão localizados entre $\sigma = -1,6$ e $\sigma = 0$. [Ver Fig. 6-48(b).] A inclinação dos ramos complexos do lugar das raízes no ponto de partida ($\sigma = -1,2$) pode ser encontrada calculando-se $d\omega/d\sigma$ da Eq. (6-31), no ponto $\sigma = -1,2$.

$$\left. \frac{d\omega}{d\sigma} \right|_{\sigma=-1,2} = \pm \left. \sqrt{\frac{-\sigma}{\sigma + 1,6}} \right|_{\sigma=-1,2} = \pm \sqrt{\frac{1,2}{0,4}} = \pm \sqrt{3}$$

Como $\tan^{-1} \sqrt{3} = 60^\circ$ os ramos do lugar das raízes interceptam o eixo real seguindo um ângulo de $\pm 60^\circ$.

A-6-9. Considere-se o sistema mostrado na Fig. 6-49, que possui uma função de transferência instável no percurso direto. Esboçar o gráfico do lugar das raízes e local os pólos a malha fechada. Mostrar que, embora os pólos a malha fechada estejam situados sobre o semi-eixo real negativo e o sistema seja não-oscilatório, a resposta a um degrau unitário apresentará uma ultrapassagem.

Solução. O lugar das raízes para este sistema é mostrado na Fig. 6-50. Os pólos a malha fechada estão localizados em $s = -2$ e $s = -5$.

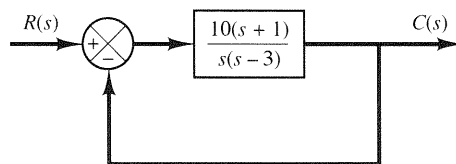


Fig. 6-49 Sistema de controle.

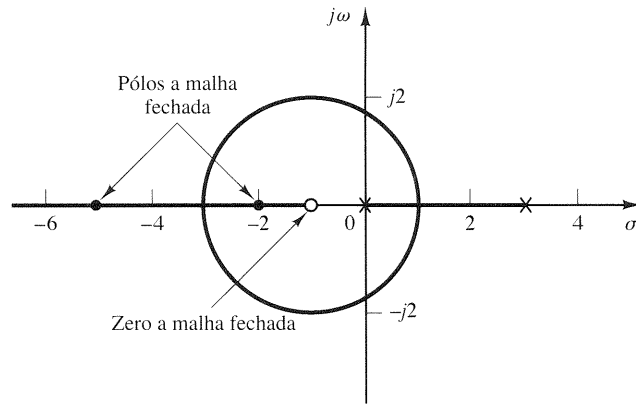


Fig. 6-50 Gráfico do lugar das raízes para o sistema mostrado na Fig. 6-49.

A função de transferência a malha fechada se torna

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{10(s + 1)}{s^2 + 7s + 10}$$

A resposta ao degrau unitário deste sistema é

$$C(s) = \frac{10(s + 1)}{s(s + 2)(s + 5)}$$

A transformada de Laplace inversa de $C(s)$ fornece

$$c(t) = 1 + 1,666e^{-2t} - 2,666e^{-5t}, \quad \text{para } t \geq 0$$

A curva da resposta ao degrau unitário é apresentada na Fig. 6-51. Embora o sistema seja não-oscilatório, a curva de resposta ao degrau unitário apresenta ultrapassagem. (Isto é devido à presença do zero em $s = -1$.)

A-6-10. Esboçar os lugares das raízes do sistema de controle mostrado na Fig. 6-52(a). Determinar a faixa de valores do ganho K que assegura estabilidade.

Solução. Os pólos a malha aberta estão localizados em $s = 1$, $s = -2 + j\sqrt{3}$ e $s = -2 - j\sqrt{3}$. Um ramo do lugar das raízes se encontra sobre o eixo real entre os pontos $s = 1$ e $s = -\infty$. As assíntotas dos ramos do lugar das raízes são encontradas como a seguir:

$$\hat{\text{Ângulos das assíntotas}} = \frac{\pm 180^\circ(2k + 1)}{3} = 60^\circ, -60^\circ, 180^\circ$$

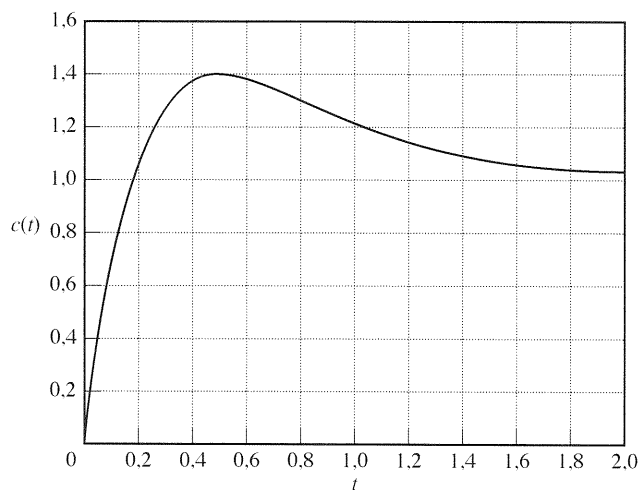


Fig. 6-51 Curva da resposta ao degrau unitário do sistema mostrado na Fig. 6-49.

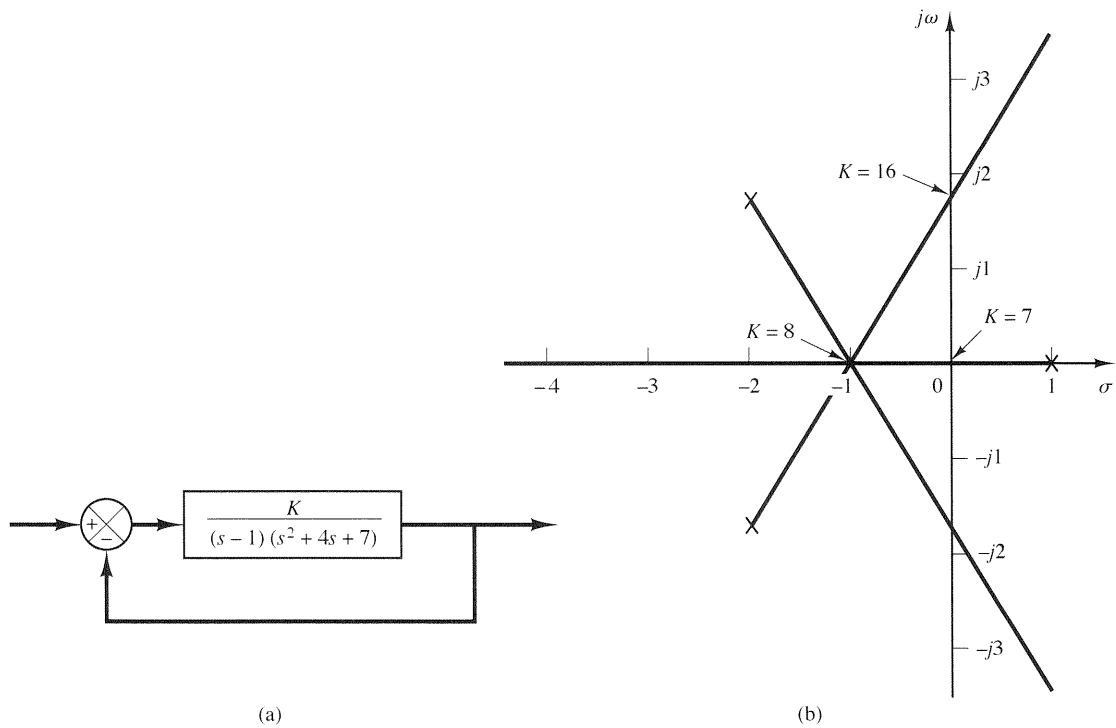


Fig. 6-52 (a) Sistema de controle; (b) gráfico do lugar das raízes.

A interseção das assíntotas com o eixo real é obtida a partir de

$$\sigma_a = -\frac{-1 + 2 + 2}{3} = -1$$

Os pontos de partida e de chegada podem ser localizados com base em $dK/ds = 0$. Como

$$K = -(s - 1)(s^2 + 4s + 7) = -(s^3 + 3s^2 + 3s - 7)$$

tem-se

$$\frac{dK}{ds} = -(3s^2 + 6s + 3) = 0$$

o que conduz a

$$(s + 1)^2 = 0$$

Assim a equação $dK/ds = 0$ possui uma raiz dupla em $s = -1$. O ponto de partida está localizado em $s = -1$. Os três ramos do lugar das raízes se encontram neste ponto de partida. Os ângulos de partida dos ramos no ponto de partida são $\pm 180^\circ/3$, isto é, 60° e -60° .

A seguir serão determinados os pontos onde os ramos do lugar das raízes podem interceptar o eixo imaginário. Observando-se que a equação característica é

$$(s - 1)(s^2 + 4s + 7) + K = 0$$

ou

$$s^3 + 3s^2 + 3s - 7 + K = 0$$

substitui-se aí $s = j\omega$ resultando

$$(j\omega)^3 + 3(j\omega)^2 + 3(j\omega) - 7 + K = 0$$

Reescrevendo-se esta última equação, tem-se

$$(K - 7 - 3\omega^2) + j\omega(3 - \omega^2) = 0$$

Esta equação é satisfeita quando

$$\omega = \pm\sqrt{3}, \quad K = 7 + 3\omega^2 = 16 \quad \text{ou} \quad \omega = 0, \quad K = 7$$

Os ramos do lugar das raízes cortam o eixo imaginário em $\omega = \pm\sqrt{3}$ (onde $K = 16$) e $\omega = 0$ (onde $K = 7$). Como o valor do ganho K na origem é 7, a faixa de valores para se ter estabilidade é

$$7 < K < 16$$

A Fig. 6-52(b) mostra um esboço dos lugares das raízes. Observe-se que todos os ramos consistem em segmentos de retas.

O fato de que todos os ramos do lugar das raízes são retas pode ser verificado como a seguir: uma vez que a condição de ângulo é

$$\angle \frac{K}{(s-1)(s+2+j\sqrt{3})(s+2-j\sqrt{3})} = \pm 180^\circ(2k+1)$$

tem-se

$$-\angle s-1 - \angle s+2+j\sqrt{3} - \angle s+2-j\sqrt{3} = \pm 180^\circ(2k+1)$$

Substituindo-se $s = \sigma + j\omega$ nesta última equação,

$$\angle \sigma-1+j\omega + \angle \sigma+2+j\omega+j\sqrt{3} + \angle \sigma+2+j\omega-j\sqrt{3} = \pm 180^\circ(2k+1)$$

ou

$$\angle \sigma+2+j(\omega+j\sqrt{3}) + \angle \sigma+2+j(\omega-j\sqrt{3}) = -\angle \sigma-1+j\omega \pm 180^\circ(2k+1)$$

que pode ser reescrita como

$$\tan^{-1}\left(\frac{\omega+\sqrt{3}}{\sigma+2}\right) + \tan^{-1}\left(\frac{\omega-\sqrt{3}}{\sigma+2}\right) = -\tan^{-1}\left(\frac{\omega}{\sigma-1}\right) \pm 180^\circ(2k+1)$$

Tomando-se a tangente de ambos os membros desta última equação, obtém-se

$$\frac{\frac{\omega+\sqrt{3}}{\sigma+2} + \frac{\omega-\sqrt{3}}{\sigma+2}}{1 - \left(\frac{\omega+\sqrt{3}}{\sigma+2}\right)\left(\frac{\omega-\sqrt{3}}{\sigma+2}\right)} = -\frac{\omega}{\sigma-1}$$

ou

$$\frac{2\omega(\sigma+2)}{\sigma^2+4\sigma+4-\omega^2+3} = -\frac{\omega}{\sigma-1}$$

que pode ser simplificado para

$$2\omega(\sigma+2)(\sigma-1) = -(\sigma^2+4\sigma+7-\omega^2)$$

ou

$$\omega(3\sigma^2+6\sigma+3-\omega^2) = 0$$

Simplificações adicionais desta equação conduzem a

$$\omega\left(\sigma+1+\frac{1}{\sqrt{3}}\omega\right)\left(\sigma+1-\frac{1}{\sqrt{3}}\omega\right) = 0$$

definindo-se três retas

$$\omega = 0, \quad \sigma+1+\frac{1}{\sqrt{3}}\omega = 0, \quad \sigma+1-\frac{1}{\sqrt{3}}\omega = 0$$

Assim, os ramos do lugar das raízes consistem em três retas. Observe-se que os lugares das raízes para $K > 0$ compõem-se de segmentos de retas como mostrado na Fig. 6-52(b). (Note-se que cada um dos segmentos de reta começa a partir de um pólo a malha aberta e se estende ao infinito segundo as direções de 180° , 60° , ou -60° , medidos a partir do eixo real.) As partes restantes de cada reta correspondem a lugares das raízes para $K < 0$.

A-6-11. Considere-se o sistema mostrado na Fig. 6-53(a). Esboçar os lugares das raízes.

Solução. Os zeros a malha aberta do sistema estão localizados em $s = \pm j$. Os pólos a malha aberta estão localizados em $s = 0$ e $s = -2$. Este sistema envolve dois pólos e dois zeros. Assim, existe a possibilidade de ocorrerem ramos circulares. Na realidade, existem neste caso lugares das raízes circulares conforme será mostrado adiante. A condição angular é

$$\angle \frac{K(s+j)(s-j)}{s(s+2)} = \pm 180^\circ(2k+1)$$

ou

$$\angle s + j + \angle s - j - \angle s - \angle s + 2 = \pm 180^\circ(2k+1)$$

Substituindo-se $s = \sigma + j\omega$ nesta última equação, obtém-se

$$\angle \sigma + j\omega + j + \angle \sigma + j\omega - j - \angle \sigma + j\omega - \angle \sigma + 2 + j\omega = \pm 180^\circ(2k+1)$$

ou

$$\tan^{-1}\left(\frac{\omega+1}{\sigma}\right) + \tan^{-1}\left(\frac{\omega-1}{\sigma}\right) = \tan^{-1}\left(\frac{\omega}{\sigma}\right) + \tan^{-1}\left(\frac{\omega}{\sigma+2}\right) \pm 180^\circ(2k+1)$$

Tomando-se a tangente de ambos os membros desta última equação e observando-se que

$$\tan\left[\tan^{-1}\left(\frac{\omega}{\sigma+2}\right) \pm 180^\circ\right] = \frac{\omega}{\sigma+2}$$

obtém-se

$$\frac{\frac{\omega+1}{\sigma} + \frac{\omega-1}{\sigma}}{1 - \frac{\omega+1}{\sigma} \frac{\omega-1}{\sigma}} = \frac{\frac{\omega}{\sigma} + \frac{\omega}{\sigma+2}}{1 - \frac{\omega}{\sigma} \frac{\omega}{\sigma+2}}$$

ou

$$\omega\left[\left(\sigma - \frac{1}{2}\right)^2 + \omega^2 - \frac{5}{4}\right] = 0$$

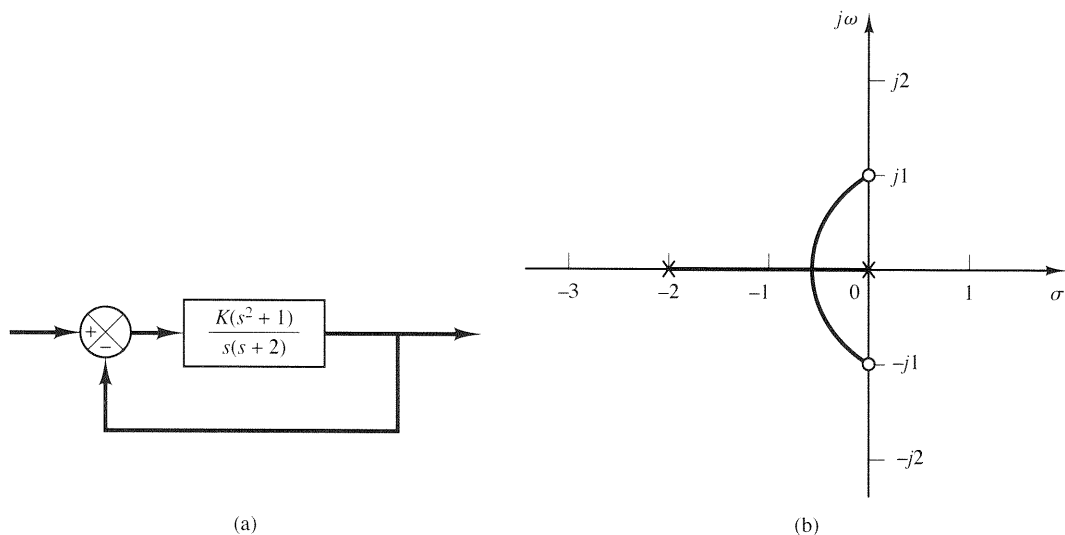


Fig. 6-53 (a) Sistema de controle; (b) gráfico do lugar das raízes.

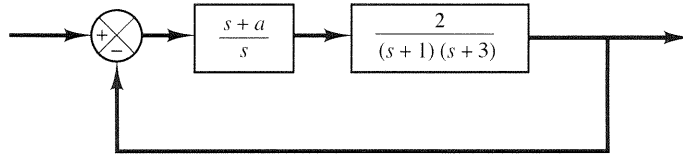


Fig. 6-54 Sistema de controle.

o que é equivalente a

$$\omega = 0 \quad \text{ou} \quad \left(\sigma - \frac{1}{2}\right)^2 + \omega^2 = \frac{5}{4}$$

Estas duas expressões são as equações dos lugares das raízes. A primeira equação corresponde ao lugar das raízes sobre o eixo real. (O segmento entre $s = 0$ e $s = -2$ corresponde ao lugar das raízes para $0 \leq K < \infty$. O restante da reta corresponde ao lugar das raízes para $K < 0$). A segunda equação é uma equação de um círculo. Assim, há um lugar das raízes circular com centro em $\sigma = \frac{1}{2}$, $\omega = 0$ e raio igual a $\sqrt{5}/2$. Os lugares das raízes estão esboçados na Fig. 6-53(b). [A parte do lugar circular à esquerda dos zeros imaginários corresponde a $K > 0$. A parte do lugar circular não mostrado na Fig. 6-53(b) corresponde a $K < 0$.]

- A-6-12.** Considere-se o sistema mostrado na Fig. 6-54. Determinar o valor de d tal que o coeficiente de amortecimento ζ dos pólos a malha fechada dominantes seja igual a 0,5.

Solução. Neste sistema a equação característica é

$$1 + \frac{2(s+a)}{s(s+1)(s+3)} = 0$$

Note-se que a variável a não é um fator multiplicativo. Portanto, é necessário reescrever a equação característica

$$s(s+1)(s+3) + 2s + 2a = 0$$

sob a forma

$$1 + \frac{2a}{s^3 + 4s^2 + 5s} = 0$$

Seja, por definição

$$2a = K$$

Resulta, então, a equação característica sob a forma

$$1 + \frac{K}{s(s^2 + 4s + 5)} = 0 \quad (6-32)$$

No Problema A-6-4 foi construído o lugar das raízes para o sistema definido pela Eq. (6-32). Em consequência, a solução para este problema está disponível no Problema A-6-4. Com base na Fig. 6-45(b), os pólos a malha fechada que possuem um coeficiente de amortecimento $\zeta = 0,5$ podem ser localizados em $s = -0,63 \pm j1,09$. O valor de K no ponto $s = -0,63 + j1,09$ é igual a 4,32. Assim, o valor de a neste problema pode ser obtido da seguinte forma:

$$a = \frac{K}{2} = 2,16$$

- A-6-13.** Considere-se o sistema mostrado na Fig. 6-55(a). Determinar o valor de a tal que o coeficiente de amortecimento ζ dos pólos a malha fechada dominantes seja igual a 0,5.

Solução. A equação característica é

$$1 + \frac{10(s+a)}{s(s+1)(s+8)} = 0$$

A variável a não é um fator multiplicativo. Portanto, é necessário modificar a forma da equação característica. Uma vez que ela pode ser escrita como

$$s^3 + 9s^2 + 18s + 10a = 0$$

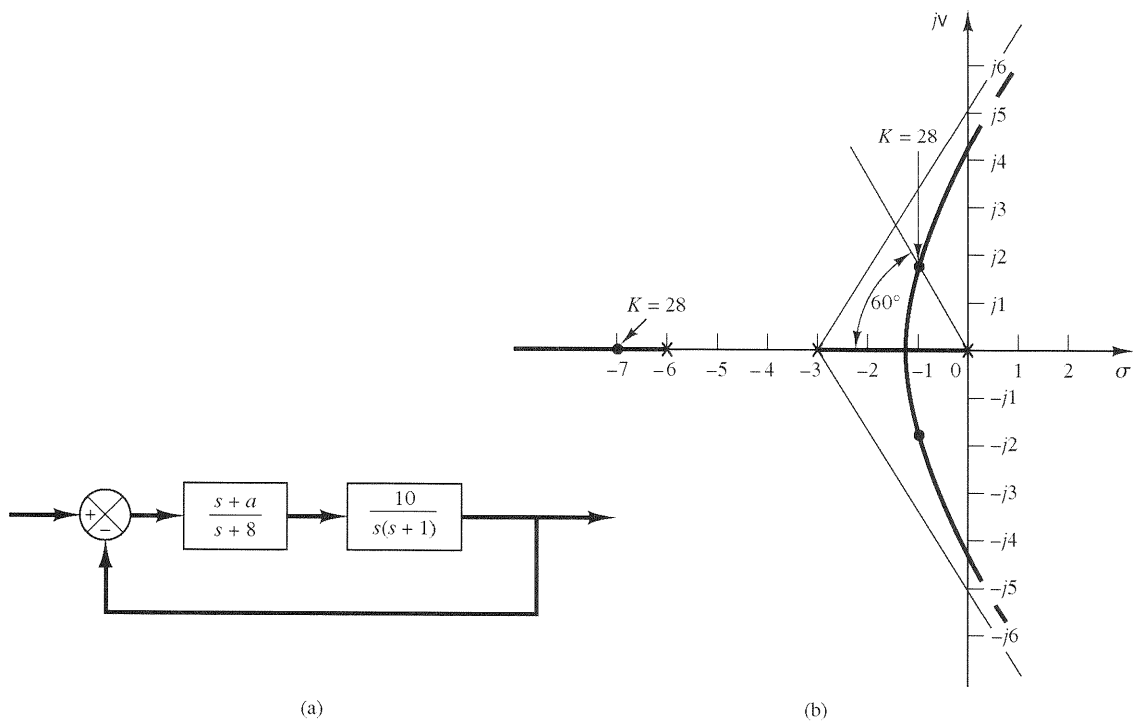


Fig. 6-55 (a) Sistema de controle; (b) gráfico do lugar das raízes, onde $K = 10a$.

é possível reescrevê-la, a seguir, com a aparecendo como fator multiplicativo:

$$1 + \frac{10a}{s(s^2 + 9s + 18)} = 0$$

Seja, por definição

$$10a = K$$

A equação característica se torna

$$1 + \frac{K}{s(s^2 + 9s + 18)} = 0$$

Observe-se que a equação característica está numa forma conveniente para a construção dos lugares das raízes.

Este sistema envolve três pólos e não possui zeros. Os três pólos estão localizados em $s = 0$, $s = -3$ e $s = -6$. Um ramo do lugar das raízes se encontra sobre o eixo real entre os pontos $s = 0$ e $s = -3$. Além disso, existe um outro ramo entre os pontos $s = -6$ e $s = -\infty$.

As assíntotas dos ramos do lugar das raízes são encontradas como a seguir:

$$\hat{\text{Ângulos das assíntotas}} = \frac{\pm 180^\circ(2k + 1)}{3} = 60^\circ, -60^\circ, 180^\circ$$

A interseção das assíntotas com o eixo real é obtida a partir de

$$\sigma_a = -\frac{0 + 3 + 6}{3} = -3$$

Os pontos de partida e de chegada podem ser determinados a partir de $dK/ds = 0$, onde

$$K = -(s^3 + 9s^2 + 18s)$$

Fazendo-se, agora,

$$\frac{dK}{ds} = -(3s^2 + 18s + 18) = 0$$

o que conduz a

$$s^2 + 6s + 6 = 0$$

ou

$$s = -1,268, \quad s = -4,732$$

O ponto $s = -1,268$ está sobre um dos ramos do lugar das raízes. Por conseguinte, $s = -1,268$ é um real ponto de partida. O ponto $s = -4,732$, porém, não está situado em nenhum ramo do lugar das raízes e, assim, nem é ponto de partida nem é ponto de chegada.

A seguir serão determinados os pontos onde os ramos do lugar das raízes cruzam o eixo imaginário. Substituindo-se $s = j\omega$ na equação característica, que é

$$s^3 + 9s^2 + 18s + K = 0$$

como se segue

$$(j\omega)^3 + 9(j\omega)^2 + 18(j\omega) + K = 0$$

ou

$$(K - 9\omega^2) + j\omega(18 - \omega^2) = 0$$

da qual se obtém

$$\omega = \pm 3\sqrt{2}, \quad K = 9\omega^2 = 162 \quad \text{ou} \quad \omega = 0, \quad K = 0$$

Os pontos de cruzamento estão situados em $\omega = \pm 3\sqrt{2}$ e correspondem a um valor de ganho K igual a 162. Além disso, um ramo do lugar das raízes toca o eixo imaginário em $\omega = 0$. A Fig. 6-55(b) mostra um esboço dos lugares das raízes do sistema.

Como foi especificado em 0,5 o valor do coeficiente de amortecimento dos pólos dominantes a malha fechada, o pólo desejado no semiplano superior de s deve estar na interseção do lugar das raízes com uma reta fazendo um ângulo de 60° com o eixo real negativo. Os pólos dominantes a malha fechada desejados estarão em

$$s = -1 + j1,732, \quad s = -1 - j1,732$$

Nestes pontos o valor de K é 28. Assim,

$$a = \frac{K}{10} = 2,8$$

Como o sistema envolve dois ou mais pólos que zeros (na realidade, três pólos e nenhum zero), o terceiro pólo pode ser localizado sobre o semi-eixo real negativo a partir do fato de que a soma dos três pólos a malha fechada é igual a -9 . Assim, o terceiro pólo é encontrado em

$$s = -9 - (-1 + j1,732) - (-1 - j1,732)$$

ou

$$s = -7$$

- A-6-14.** Considere-se o sistema mostrado na Fig. 6-56(a). Esboçar os lugares das raízes do sistema à medida que o ganho k da retroação de velocidade varia de zero a infinito. Determinar o valor de k tal que o coeficiente de amortecimento ζ dos pólos a malha fechada seja igual a 0,7.

Solução. A função de transferência a malha aberta é

$$\text{Função de transferência a malha aberta} = \frac{10}{(s + 1 + 10k)s + 10}$$

Como k não é um fator multiplicativo, modifica-se a equação de modo a fazê-lo multiplicativo. Como a equação característica é

$$s^2 + s + 10ks + 10 = 0$$

pode-se reescrevê-la como a seguir:

$$1 + \frac{10ks}{s^2 + s + 10} = 0 \quad (6-33)$$

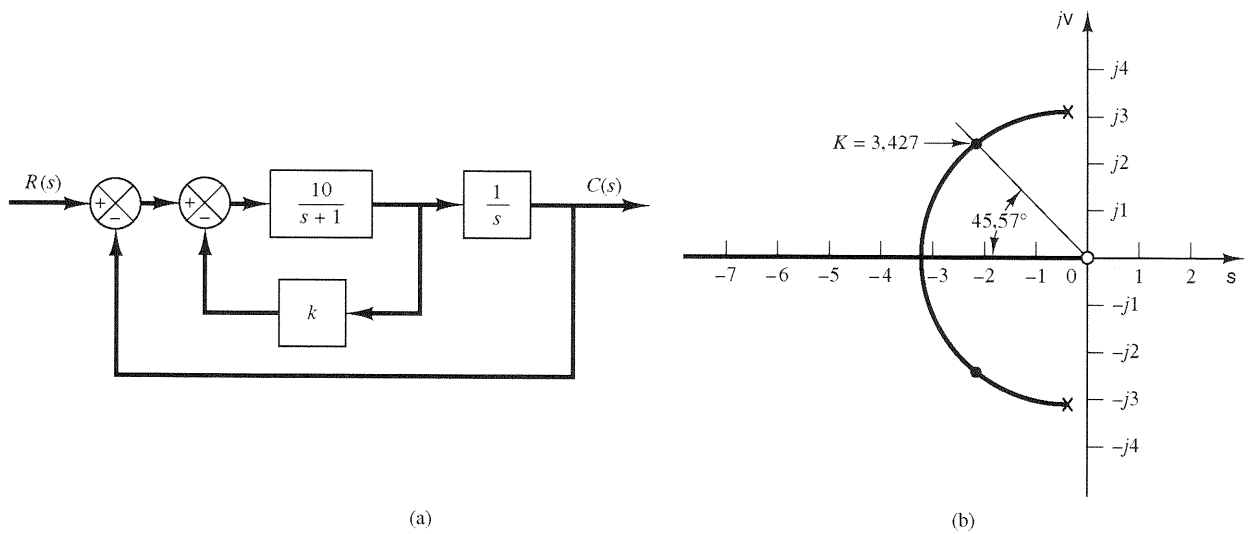


Fig. 6-56 (a) Sistema de controle; (b) gráfico do lugar das raízes, onde $K = 10k$.

Seja, por definição,

$$10k = K$$

Então a Eq. (6-33) se torna

$$1 + \frac{Ks}{s^2 + s + 10} = 0$$

Observe-se que o sistema possui um zero em $s = 0$ e dois pólos em $s = -0,5 \pm j3,1225$. Como este sistema envolve dois pólos e um zero, há possibilidade de existir um lugar das raízes circular. Na verdade, este sistema possui um lugar das raízes com ramo circular, como será mostrado. Uma vez que a condição de ângulo é

$$\angle \frac{Ks}{s^2 + s + 10} = \pm 180^\circ(2k + 1)$$

tem-se

$$\angle s - \angle s + 0,5 + j3,1225 - \angle s + 0,5 - j3,1225 = \pm 180^\circ(2k + 1)$$

Substituindo-se $s = \sigma + j\omega$ nesta última equação, obtém-se

$$\angle \sigma + 0,5 + j(\omega + 3,1225) + \angle \sigma + 0,5 + j(\omega - 3,1225) = \angle \sigma + j\omega \pm 180^\circ(2k + 1)$$

que pode ser reescrito como

$$\tan^{-1} \left(\frac{\omega + 3,1225}{\sigma + 0,5} \right) + \tan^{-1} \left(\frac{\omega - 3,1225}{\sigma + 0,5} \right) = \tan^{-1} \left(\frac{\omega}{\sigma} \right) \pm 180^\circ(2k + 1)$$

Tomando-se a tangente de ambos os membros desta última equação, obtém-se

$$\frac{\frac{\omega + 3,1225}{\sigma + 0,5} + \frac{\omega - 3,1225}{\sigma + 0,5}}{1 - \left(\frac{\omega + 3,1225}{\sigma + 0,5} \right) \left(\frac{\omega - 3,1225}{\sigma + 0,5} \right)} = \frac{\omega}{\sigma}$$

que pode ser simplificado para

$$\frac{2\omega(\sigma + 0,5)}{(\sigma + 0,5)^2 - (\omega^2 - 3,1225^2)} = \frac{\omega}{\sigma}$$

ou

$$\omega(\sigma^2 - 10 + \omega^2) = 0$$

que conduz a

$$\omega = 0 \quad \text{ou} \quad \sigma^2 + \omega^2 = 10$$

Observe-se que $\omega = 0$ corresponde ao eixo real. O semi-eixo real negativo (entre $s = 0$ e $s = -\infty$) corresponde a $K \geq 0$ e o semi-eixo real positivo corresponde a $K < 0$. A equação

$$\sigma^2 + \omega^2 = 10$$

é uma equação de um círculo com centro em $\sigma = 0$, $\omega = 0$ e raio igual a $\sqrt{10}$. Uma parte deste círculo que permanece à esquerda dos pólos complexos corresponde ao lugar das raízes para $K > 0$. A porção do círculo que permanece à direita dos pólos complexos corresponde ao lugar das raízes para $K < 0$. Assim, esta porção não é lugar das raízes para o presente sistema, em que $K > 0$. A Fig. 6-56(b) mostra um esboço dos lugares das raízes.

Como se requer $\zeta = 0,7$ para os pólos a malha fechada, encontra-se a interseção do lugar das raízes circular com a reta que faz um ângulo de $45,57^\circ$ (note-se que $\cos 45,57^\circ = 0,7$) com o eixo real negativo. A interseção é em $s = -2,214 + j2,258$. O ganho K correspondente a este ponto é 3,427. Por conseguinte, o valor desejado para o ganho k de retroação de velocidade é

$$k = \frac{K}{10} = 0,3427$$

A-6-15. Considere-se o sistema de controle mostrado na Fig. 6-57. Traçar os lugares das raízes com o MATLAB.

Solução. O Programa MATLAB 6-10 gera o traçado do lugar das raízes conforme mostrado na Fig. 6-58. Os lugares das raízes devem ser simétricos em relação ao eixo real. Contudo, a Fig. 6-58 mostra o contrário.

O MATLAB fornece seu próprio conjunto de valores de ganho que é usado para calcular os pontos do gráfico do lugar das raízes. Isto é feito por meio de uma rotina interna adaptativa do passo de cálculo. Para certos sistemas, contudo, pequenas variações no valor do ganho, numa certa faixa de valores, ocasionam mudanças drásticas na localização das raízes. Assim, o MATLAB, ao calcular as raízes, fez saltos muito grandes na variação de valores de ganho, e a localização das raízes sofreu mudanças relativamente grandes. Ao traçar as curvas, o MATLAB conecta estes pontos e ocasiona um aspecto estranho na região de ganhos sensíveis. Tais gráficos errados do lugar das raízes ocorrem geralmente quando os ramos do lugar das raízes se aproximam de um pólo duplo (triplo ou de maior multiplicidade), uma vez que nestas regiões o lugar das raízes é muito sensível a pequenas variações de ganho.

No problema considerado aqui, a região crítica de ganho K é entre 4,2 e 4,4. Assim, torna-se necessário escolher um passo de cálculo suficientemente pequeno nesta região. Pode-se dividir a região de valores de K como se segue:

```
K1 = [0:0.2:4.2];
K2 = [4.2:0.002:4.4];
K3 = [4.4:0.2:10];
K4 = [10:5:200];
K = [K1 K2 K3 K4];
```

Executando-se o Programa MATLAB 6-11 em computador, obtém-se o gráfico mostrado na Fig. 6-59. Trocando-se o comando `plot(r,'o')` do Programa MATLAB 6-11 pelo comando `plot(r,'-')`, obtém-se a Fig. 6-60. As Figs. 6-59 e 6-60 mostram gráficos satisfatórios dos lugares das raízes.

```
Programa MATLAB 6-10
% ----- Gráfico do lugar das raízes -----
num = [0 0 1 0.4];
den = [1 3.6 0 0];
rlocus(num,den);
v = [-5 1 -3 3]; axis(v)
grid
title('Lugar das Raízes de G(s) = K(s + 0,4)/[s^2(s + 3,6)]')
```

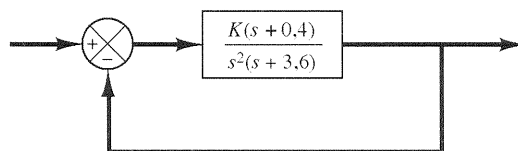


Fig. 6-57 Sistema de controle.

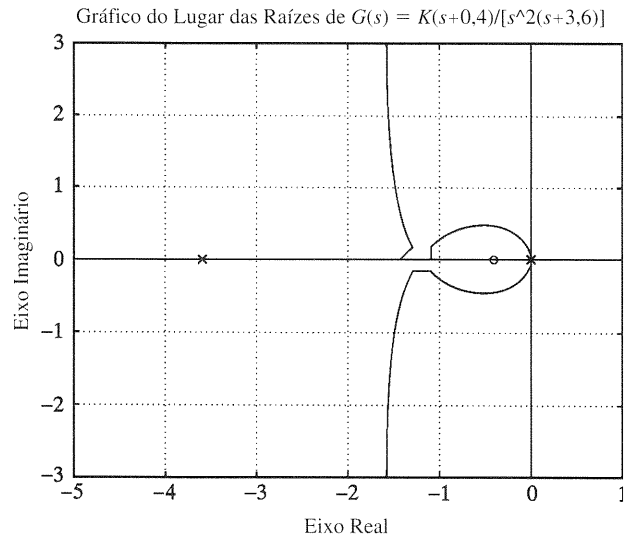


Fig. 6-58 Gráfico do lugar das raízes.

A-6-16. Considere-se o sistema cuja função de transferência a malha aberta $G(s)H(s)$ é dada por

$$G(s)H(s) = \frac{K}{s(s+1)(s+2)}$$

Utilizando o MATLAB, traçar os lugares das raízes e suas assíntotas.

```

Programa MATLAB 6-11

% ----- Gráfico do lugar das raízes -----

num = [0 0 1 0.4];
den = [1 3.6 0 0];
K1 = [0:0.2:4.2];
K2 = [4.2:0.002:4.4];
K3 = [4.4:0.02:10];
K4 = [10:5:200];
K = [K1 K2 K3 K4];
r = rlocus(num,den,K);
plot(r,'o')
v = [-5 1 -5 5]; axis(v)
grid
title('Lugar das Raízes de G(s) = K(s + 0,4)/[s^2(s + 3,6)]')
xlabel('Eixo Real')
ylabel('Eixo Imaginário')

```

Solução. Serão traçados os lugares das raízes e as assíntotas num único diagrama. Como a função de transferência a malha aberta é dada por

$$G(s)H(s) = \frac{K}{s(s+1)(s+2)}$$

$$= \frac{K}{s^3 + 3s^2 + 2s}$$

as equações das assíntotas podem ser obtidas como a seguir: observando-se que

$$\lim_{s \rightarrow \infty} \frac{K}{s^3 + 3s^2 + 2s} \doteq \lim_{s \rightarrow \infty} \frac{K}{s^3 + 3s^2 + 3s + 1} = \frac{K}{(s+1)^3}$$

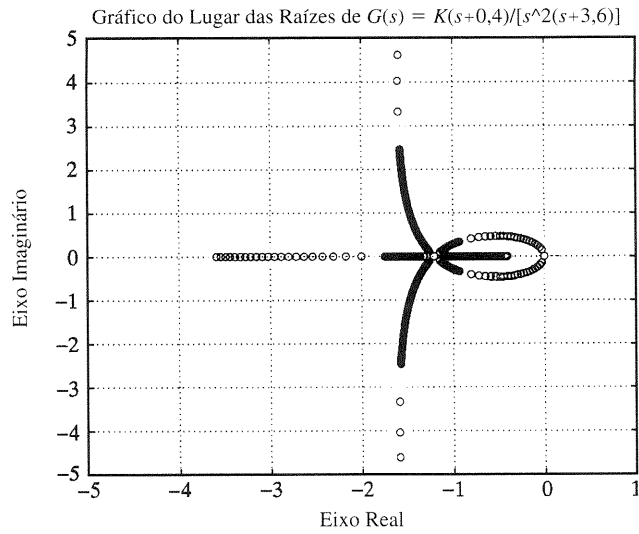


Fig. 6-59 Gráfico do lugar das raízes.

as equações das assíntotas podem ser dadas por

$$G_a(s)H_a(s) = \frac{K}{(s + 1)^3}$$

Assim, para o sistema, tem-se

$$\begin{aligned} \text{num} &= [0 \ 0 \ 0 \ 1] \\ \text{den} &= [1 \ 3 \ 2 \ 0] \end{aligned}$$

e, para as assíntotas,

$$\begin{aligned} \text{numa} &= [0 \ 0 \ 0 \ 1] \\ \text{dena} &= [1 \ 3 \ 3 \ 1] \end{aligned}$$

Ao utilizar os comandos rlocus e plot

$$\begin{aligned} r &= \text{rlocus}(\text{num}, \text{den}) \\ a &= \text{rlocus}(\text{numa}, \text{dena}) \\ \text{plot}(r \ a) \end{aligned}$$

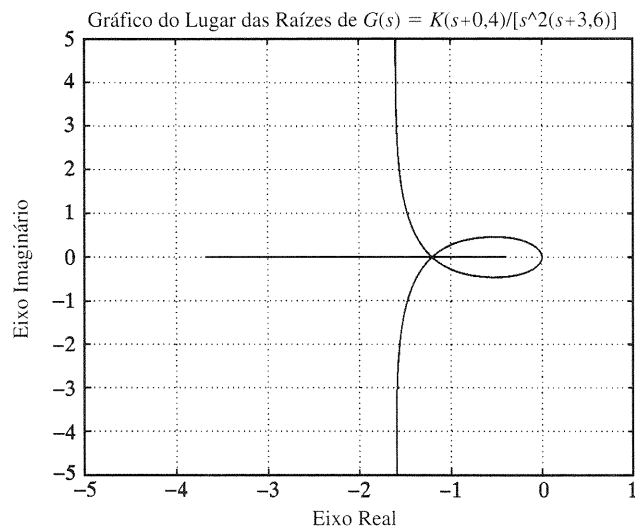


Fig. 6-60 Gráfico do lugar das raízes.

o número de linhas de r e de a deve ser o mesmo. Para assegurar isto inclui-se nos comandos a constante de ganho K. Por exemplo,

```
K1 = 0:0.1:0.3;
K2 = 0.3:0.005:0.5;
K3 = 0.5:0.5:10;
K4 = 10:5:100;
K = [K1 K2 K3 K4]
r = rlocus(num,den,K)
a = rlocus(numa,dena,K)
y = [r a]
plot(y, 'l')
```

Incluindo-se o ganho K no comando rlocus, fica assegurado que as matrizes r e a possuem o mesmo número de linhas. O Programa MATLAB 6-12 produzirá o gráfico do lugar das raízes e de suas assíntotas. Ver a Fig. 6-61.

```
Programa MATLAB 6-12

% ----- Gráfico do Lugar das Raízes -----
num = [0 0 0 1];
den = [1 3 2 0];
numa = [0 0 0 1];
dena = [1 3 3 1];
K1 = 0:0.1:0.3;
K2 = 0.3:0.005:0.5;
K3 = 0.5:0.5:10;
K4 = 10:5:100;
K = [K1 K2 K3 K4];
r = rlocus(num,den,K);
a = rlocus(numa,dena,K);
y = [r a];
plot(y, 'l')
v = [-4 4 -4 4];axis(v)
grid
title('Lugar das Raízes de  $G(s) = K/[s(s+1)(s+2)]$  e Assíntotas')
xlabel('Eixo Real')
ylabel('Eixo Imaginário')

%***** Assinalar manualmente na cópia em papel a localização dos pólos a malha aberta*****
```

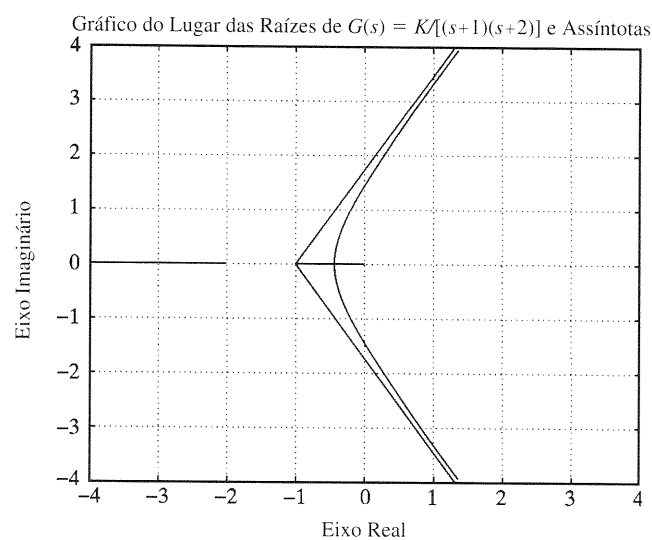


Fig. 6-61 Gráfico do lugar das raízes.

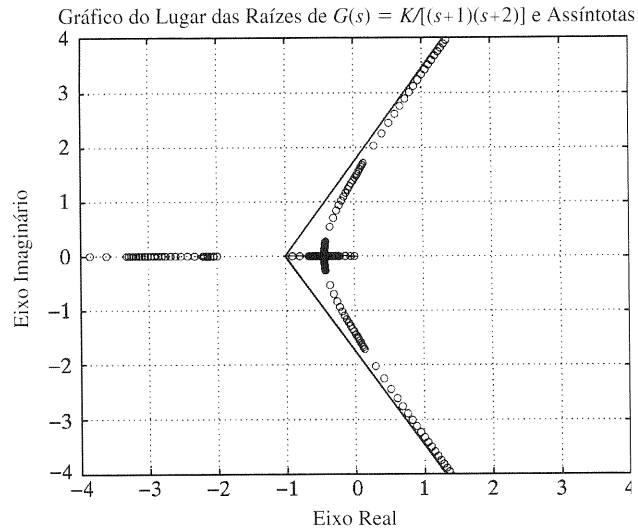


Fig. 6-62 Gráfico do lugar das raízes.

O desenho de dois ou mais gráficos num único diagrama pode ser realizado por meio do comando hold. O Programa MATLAB 6-13 usa o comando hold. O gráfico dos lugares das raízes resultantes é mostrado na Fig. 6-62.

```

Programa MATLAB 6-13

% ----- Gráfico do Lugar das Raízes -----
num = [0 0 0 1];
den = [1 3 2 0];
numa = [0 0 0 1];
dena = [1 3 3 1];
K1 = 0:0.1:0.3;
K2 = 0.3:0.005:0.5;
K3 = 0.5:0.5:10;
K4 = 10:5:100;
K = [K1 K2 K3 K4];
r = rlocus(num,den,K);
a = rlocus(numa,dena,K);
plot(r,'o')
hold
Current plot held
plot(a,'-')
v = [-4 4 -4 4]; axis(v)
grid
title('Lugar das Raízes de G(s) = K/[s(s + 1)(s + 2)] e Assíntotas')
xlabel('Eixo Real')
ylabel('Eixo Imaginário')

%*****Assinalar manualmente na cópia em papel a localização dos pólos a malha
aberta*****

%*****Remover o comando hold*****

hold
Current plot released

```

A-6-17. Considere-se o sistema com retroação unitária com a seguinte função de transferência do percurso direto $G(s)$

$$G(s) = \frac{K(s + 2)^2}{(s^2 + 4)(s + 5)^2}$$

Traçar os lugares das raízes com o MATLAB.

Solução. Um programa em MATLAB para traçar os lugares das raízes é dado como Programa MATLAB 6-14. O gráfico resultante dos lugares das raízes é mostrado na Fig. 6-63.

Observe-se que este é um caso especial onde não há ramos do lugar das raízes sobre o eixo real. Isto significa que, para qualquer valor de $K > 0$, os pólos a malha fechada do sistema serão dois conjuntos de pólos complexos conjugados. (Não há pólos a malha fechada reais.) Como não há pólos a malha fechada no semiplano s da direita, o sistema é estável para todos os valores de $K > 0$.

```

Programa MATLAB 6-14

% ----- Gráfico do Lugar das Raízes -----
num = [0 0 1 4 4];
den = [1 10 29 40 100];
r = rlocus(num,den);
plot(r,'o')
hold
plot(r,'-')
v = [-8 4 -6 6]; axis(v); axis('square')
grid
title('Lugar das Raízes G(s) = (s + 2)^2/[(s^2 + 4)(s + 5)^2]')
xlabel('Eixo Real')
ylabel('Eixo Imaginário')

```

A-6-18. Considere-se o sistema com retardo de transporte mostrado na Fig. 6-64(a). Esboçar os lugares das raízes e achar os dois pares de pólos a malha fechada mais próximos do eixo $j\omega$.

Utilizando apenas os pólos a malha fechada dominantes, obter a resposta ao degrau unitário e esboçar a curva de resposta.

Solução. A equação característica é

$$\frac{2e^{-0,3s}}{s + 1} + 1 = 0$$

que é equivalente às seguintes condições de ângulo e de módulo:

$$\angle \frac{2e^{-0,3s}}{s + 1} = \pm 180^\circ(2k + 1)$$

$$\left| \frac{2e^{-0,3s}}{s + 1} \right| = 1$$

A condição de ângulo se reduz a

$$\angle s + 1 = \pm \pi(2k + 1) - 0,3\omega \quad (\text{radianos})$$

Gráfico do Lugar das Raízes de $G(s) = (s+2)^2/[(s^2+4)(s+5)^2]$

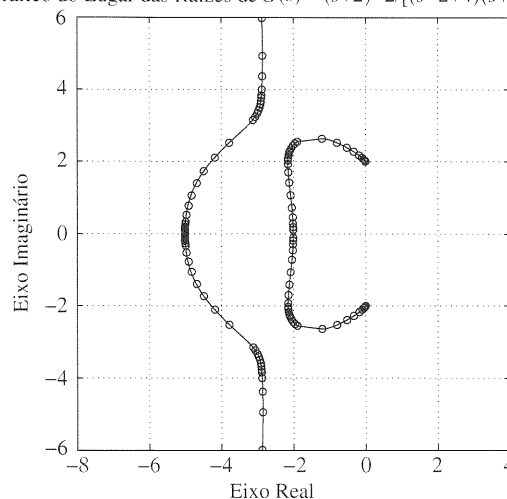


Fig. 6-63 Gráfico do lugar das raízes.

Para $k = 0$,

$$\begin{aligned} \angle s + 1 &= \pm\pi - 0,3\omega \quad (\text{radianos}) \\ &= \pm 180^\circ - 17,2^\circ \omega \quad (\text{graus}) \end{aligned}$$

Para $k = 1$,

$$\begin{aligned} \angle s + 1 &= \pm 3\pi - 0,3\omega \quad (\text{radianos}) \\ &= \pm 540^\circ - 17,2^\circ \omega \quad (\text{graus}) \end{aligned}$$

O gráfico do lugar das raízes deste sistema é mostrado na Fig. 6-64(b).

Na condição de módulo seja feito $s = \sigma + j\omega$ e a mudança de 2 por K . Obtém-se, então

$$\frac{\sqrt{(1 + \sigma)^2 + \omega^2}}{e^{-0,3\sigma}} = K$$

Calculando-se o valor de K em diferentes pontos dos lugares das raízes, pode-se achar os pontos para os quais $K = 2$. Estes pontos são os pólos a malha fechada. O par de pólos a malha fechada dominantes é

$$s = -2,5 \pm j3,9$$

O próximo par de pólos a malha fechada é

$$s = -8,6 \pm j25,1$$

Utilizando-se o par de pólos a malha fechada dominantes é possível aproximar a função de transferência a malha fechada como a seguir: observando-se que

$$\begin{aligned} \frac{C(s)}{R(s)} &= \frac{2e^{-0,3s}}{1 + s + 2e^{-0,3s}} \\ &= \frac{2e^{-0,3s}}{1 + s + 2\left(1 - 0,3s + \frac{0,09s^2}{2} + \dots\right)} \\ &= \frac{2e^{-0,3s}}{3 + 0,4s + 0,09s^2 + \dots} \end{aligned}$$

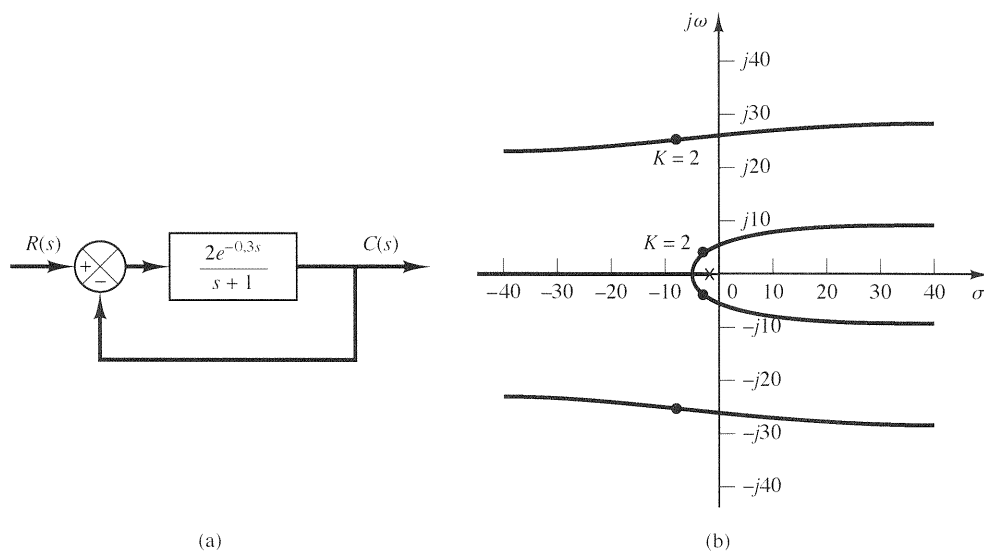


Fig. 6-64 (a) Sistema de controle com retardo de transporte; (b) gráfico do lugar das raízes.

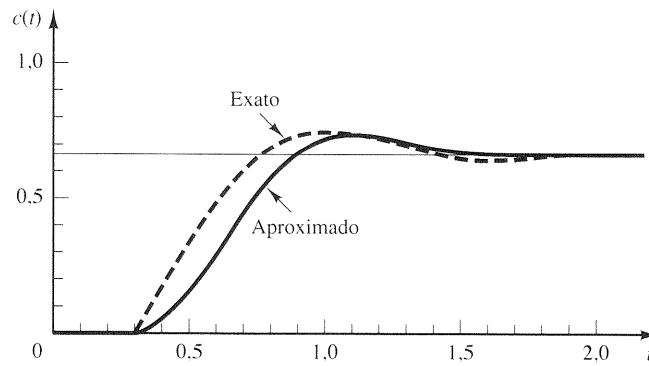


Fig. 6-65 Curvas da resposta ao degrau unitário do sistema mostrado na Fig. 6-64(a).

e

$$(s + 2,5 + j3,9)(s + 2,5 - j3,9) = s^2 + 5s + 21,46$$

é possível aproximar $C(s)/R(s)$ por

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{\frac{2}{3}(21,46)e^{-0,3s}}{s^2 + 5s + 21,46}$$

ou

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{14,31e^{-0,3s}}{(s + 2,5)^2 + 3,9^2}$$

Para uma excitação em degrau unitário,

$$C(s) = \frac{14,31e^{-0,3s}}{[(s + 2,5)^2 + 3,9^2]s}$$

Observe-se que

$$\frac{14,31}{[(s + 2,5)^2 + 3,9^2]s} = \frac{\frac{2}{3}}{s} + \frac{-\frac{2}{3}s - \frac{10}{3}}{(s + 2,5)^2 + 3,9^2}$$

Assim,

$$C(s) = \left(\frac{2}{3}\right)e^{-0,3s} + \left[\frac{-\frac{2}{3}s - \frac{10}{3}}{(s + 2,5)^2 + 3,9^2}\right]e^{-0,3s}$$

A transformada de Laplace inversa de $C(s)$ fornece

$$c(t) = \frac{2}{3}[1 - e^{-2,5(t-0,3)} \cos 3,9(t - 0,3) - 0,641e^{-2,5(t-0,3)} \text{sen } 3,9(t - 0,3)]1(t - 0,3)$$

onde $1(t - 0,3)$ é a função degrau unitário aplicada no instante $t = 0,3$.

A Fig. 6-65 mostra a curva de resposta aproximada assim obtida, com a curva exata da resposta ao degrau unitário, resultante de simulação em computador. Note-se que neste sistema é possível obter uma aproximação razoavelmente boa usando-se apenas os pólos dominantes a malha fechada.

PROBLEMAS

B-6-1. Traçar os lugares das raízes para o sistema de controle a malha fechada com

$$G(s) = \frac{K}{s(s+1)(s^2+4s+5)}, \quad H(s) = 1$$

B-6-2. Traçar os lugares das raízes para o sistema de controle a malha fechada com

$$G(s) = \frac{K(s+9)}{s(s^2+4s+11)}, \quad H(s) = 1$$

Assinalar sobre o lugar das raízes os pólos a malha fechada dominantes tais que possuam um coeficiente de amortecimento igual a 0,5. Determinar o valor correspondente do ganho K .

B-6-3. Traçar os lugares das raízes para o sistema de controle a malha fechada com

$$G(s) = \frac{K}{s(s + 0,5)(s^2 + 0,6s + 10)}, \quad H(s) = 1$$

B-6-4. Traçar os lugares das raízes para o sistema de controle a malha fechada com

$$G(s) = \frac{K}{(s^2 + 2s + 2)(s^2 + 2s + 5)}, \quad H(s) = 1$$

Determinar os pontos exatos onde os lugares das raízes cruzam o eixo $j\omega$.

B-6-5. Mostrar que os lugares das raízes para um sistema de controle com

$$G(s) = \frac{K(s^2 + 6s + 10)}{s^2 + 2s + 10}, \quad H(s) = 1$$

são arcos do círculo centrado na origem com raio igual a $\sqrt{10}$.

B-6-6. Traçar os lugares das raízes para o sistema de controle a malha fechada com

$$G(s) = \frac{K(s + 0,2)}{s^2(s + 3,6)}, \quad H(s) = 1$$

B-6-7. Traçar os lugares das raízes para o sistema de controle a malha fechada com

$$G(s) = \frac{K(s + 0,5)}{s^3 + s^2 + 1}, \quad H(s) = 1$$

B-6-8. Traçar os lugares das raízes para o sistema mostrado na Fig. 6-66. Determinar a faixa de valores de K para a estabilidade do sistema.

B-6-9. Considere-se o sistema de controle com retroação unitária dotado da seguinte função de transferência no percurso direto:

$$G(s) = \frac{K}{s(s^2 + 4s + 8)}$$

Traçar os lugares das raízes para o sistema. Se o valor do ganho K for ajustado em 2, qual a localização dos pólos a malha fechada?

B-6-10. Considere-se o sistema mostrado na Fig. 6-67. Determinar os valores de ganho K e do coeficiente de retroação em velocidade K_h tais que os pólos a malha fechada estejam localizados em $s = -1 \pm j\sqrt{3}$. Em seguida, usando o valor determinado para K_h , traçar os lugares das raízes.

B-6-11. Considere-se o sistema mostrado na Fig. 6-68. O sistema envolve retroação de velocidade. Determinar o valor de ganho K tal que os pólos a malha fechada tenham um coeficiente de amortecimento igual a 0,5. Usando o valor de K assim determinado, obter a resposta do sistema a uma excitação em degrau unitário.

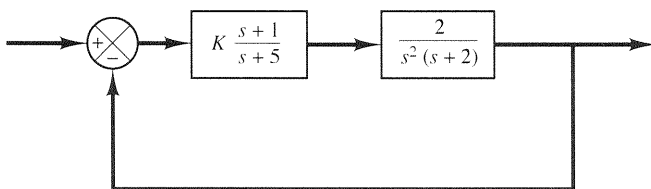


Fig. 6-66 Sistema de controle.

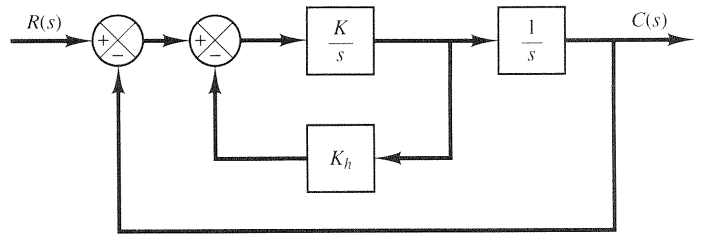


Fig. 6-67 Sistema de controle.

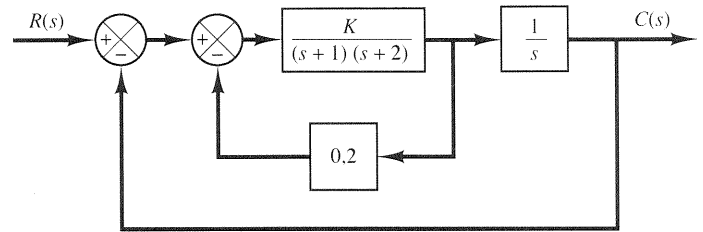


Fig. 6-68 Sistema de controle.

B-6-12. Considere-se o sistema cuja função de transferência a malha aberta $G(s)H(s)$ é dada por

$$G(s)H(s) = \frac{K}{(s^2 + 2s + 2)(s^2 + 2s + 5)} = \frac{K}{s^4 + 4s^3 + 11s^2 + 14s + 10}$$

Traçar um diagrama do lugar das raízes com o MATLAB.

B-6-13. Considere-se o sistema cuja função de transferência a malha aberta é dada por

$$G(s)H(s) = \frac{K(s - 0,6667)}{s^4 + 3,340s^3 + 7,0325s^2}$$

Mostrar que a equação das assíntotas é dada por

$$G_a(s)H_a(s) = \frac{K}{s^3 + 4,0068s^2 + 5,3515s + 2,3825}$$

Usando o MATLAB, traçar os lugares das raízes e as assíntotas para o sistema.

B-6-14. Considere-se o sistema com retroação unitária cuja função de transferência do percurso direto é

$$G(s) = \frac{K}{s(s + 1)}$$

O lugar geométrico de ganho constante do sistema para um dado valor de K é definido pela seguinte equação:

$$\left| \frac{K}{s(s + 1)} \right| = 1$$

Mostrar que os lugares geométricos de ganho constante para $0 \leq K \leq \infty$ podem ser dados por

$$[\sigma(\sigma + 1) + \omega^2]^2 + \omega^2 = K^2$$

Esboçar, no plano s , os lugares geométricos de ganho constante para $K = 1, 2, 5, 10$ e 20 .

B-6-15. Considere-se o sistema mostrado na Fig. 6-69. Traçar os lugares das raízes. Assinalar os pólos a malha fechada quando o ganho K for ajustado no valor igual a 2.

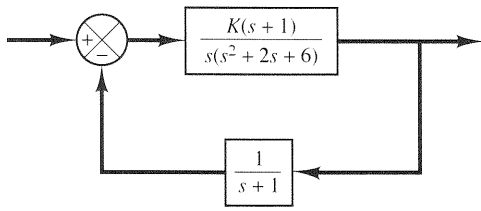


Fig. 6-69 Sistema de controle.

B-6-16. Considere-se o sistema mostrado na Fig. 6-70. Traçar os lugares das raízes quando a varia de 0 a ∞ . Determinar o valor de a tal que o coeficiente de amortecimento dos pólos a malha fechada dominantes seja igual a 0,5.

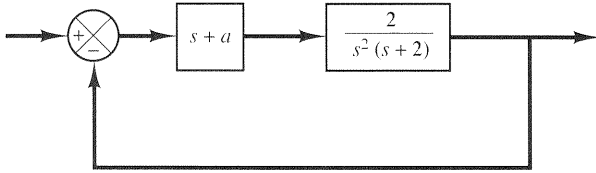


Fig. 6-70 Sistema de controle.

B-6-17. Considere-se o sistema mostrado na Fig. 6-71. Traçar os lugares das raízes quando k varia de 0 a ∞ . Que valor de k faz o coeficiente de amortecimento dos pólos a malha fechada dominantes ser igual a 0,5? Achar a constante de erro estático de velocidade para este valor de k .

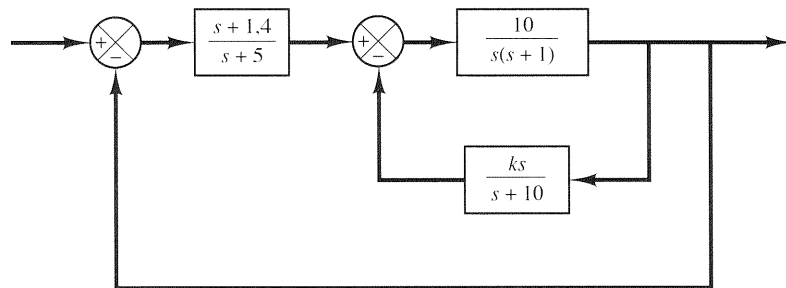


Fig. 6-71 Sistema de controle.

B-6-18. Traçar os lugares das raízes para o sistema mostrado na Fig. 6-72. Mostrar que o sistema pode se tornar instável para grandes valores de K .

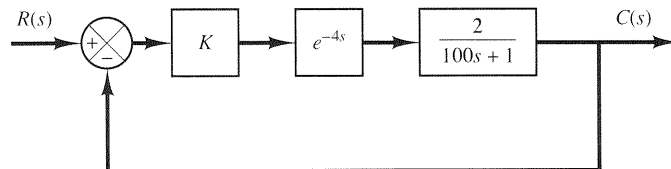


Fig. 6-72 Sistema de controle.

B-6-19. Traçar os contornos das raízes para o sistema mostrado na Fig. 6-73 quando o ganho K e o parâmetro a variam, cada um deles, de zero a infinito.

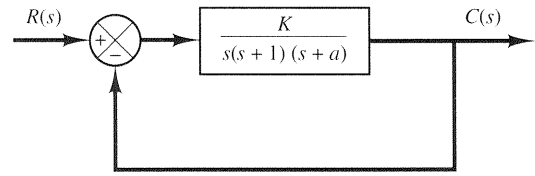


Fig. 6-73 Sistema de controle.

B-6-20. Considere-se o sistema mostrado na Fig. 6-74. Admitindo-se que o valor do ganho K varie de 0 a ∞ , traçar os lugares das raízes quando $K_h = 0,5$. Esboçar, em seguida, o contorno das raízes para $0 \leq K < \infty$ e $0 \leq K_h < \infty$. Assinalar os pólos a malha fechada sobre o contorno das raízes quando $K = 10$ e $K_h = 0,5$.

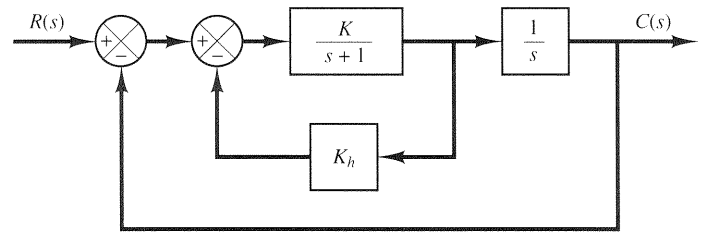


Fig. 6-74 Sistema de controle.