

Eletromagnetismo

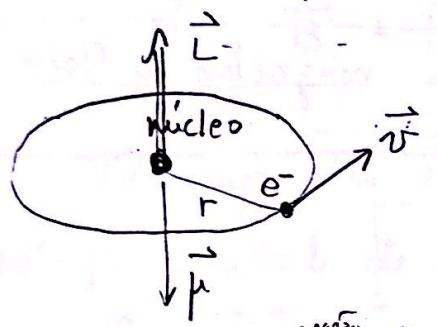
Física III para a Engenharia (4323203)

Notas de Aula - 2015

Carlos E. I. Carneiro

Materiais Magnéticos

Modelo semi-clássico : os átomos possuem elétrons que se movem e estes elétrons formam espiras de corrente microscópicas que produzem campos magnéticos.



$$\mu = IA = \frac{e}{T} \cdot \pi r^2 v = \frac{e v \pi r^2}{2 \pi r} = \frac{e v r}{2}$$

$$L = m v r$$

Relação giro magnética

$$\Rightarrow \mu = \left(\frac{e}{2m} \right) L$$

Da mecânica quântica vem que $L = n \hbar$; $n = 0, 1, 2, \dots$

$\hbar = h/2\pi$ e $h = \text{cte de Planck}$

$$\Rightarrow \mu = \left(\frac{e}{2m} \right) n \hbar$$

O menor valor de $\mu \neq 0$ é

$$\mu_B = \frac{e \hbar}{2m}$$

← unidade fundamental de momento magnético chamada magneton de Bohr

$$\mu_B = 9,274 \times 10^{-24} \text{ A} \cdot \text{m}^2 = 9,274 \times 10^{-24} \text{ J/T} \quad \text{tesla}$$

Existe ainda um momento magnético intrínseco associado ao spin S do elétron (quântico)

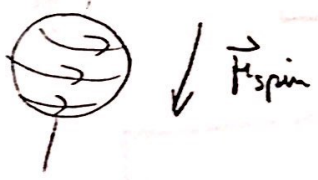
$$S = \frac{\hbar}{2} = 5,2729 \times 10^{-35} \text{ J}\cdot\text{s}$$

$$\mu_s = \left(\frac{e}{m}\right) S = \frac{e \hbar}{2m} = \text{magneton de Bohr}$$

associado a S

$$\mu_{sz} = \pm \frac{e\hbar}{2m}$$

Este momento magnético é um efeito quântico e não está associado à rotação do elétron em torno do seu eixo.
(mesmo porque o elétron até ^{onde} se conhece é uma partícula puntiforme sem estrutura).



Os núcleos (próton e nêutron) também têm μ_{spin} , mas muito menores do que o do elétron, ($\mu_{spin} \propto \frac{1}{m}$).

Os momentos magnéticos orbitais e de spin geralmente se anulam. Porém, alguns materiais possuem um momento magnético resultante não nulo. Quando estes materiais são

colocados em um campo magnético \vec{B}_0 seus momentos magnéticos se alinham com B_0 . O campo \vec{B}_m gerado pelos momentos magnéticos soma-se a \vec{B}_0 . O novo campo \vec{B} é dado por

$$\vec{B} = \vec{B}_0 + \vec{B}_m$$

O campo \vec{B}_m é proporcional ao momento de dipolo por unidade de volume \vec{M} (vetor magnetização)

$$\vec{B}_m = \mu_0 \vec{M}$$

$$[M] = \left[\frac{Am^2}{m^3} \right] = \frac{A}{m} = \frac{\text{ampère}}{\text{metro}}$$

Portanto,

$$\vec{B} = \vec{B}_0 + \mu_0 \vec{M}$$

↑
permeabilidade do vácuo

É conveniente introduzir uma outra grandeza \vec{H} (intensidade do campo magnético)

$$\vec{H} = \frac{\vec{B}_0}{\mu_0} \Rightarrow \vec{B}_0 = \mu_0 \vec{H}$$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{B} = \mu_0 (\vec{H} + \vec{M})} ; \quad [H] = [M] = \frac{A}{m}$$

Para uma grande quantidade de materiais $\vec{M} \propto \vec{H}$
(ou, o que é equivalente, $\vec{M} \propto \vec{B}_0$)

$$\vec{M} = \chi_m \vec{H}$$

↑ susceptibilidade magnética

$$\Rightarrow \boxed{\vec{B} = \mu_0 (1 + \chi_m) \vec{H} = \underbrace{(1 + \chi_m)}_{\chi_m} \vec{B}_0}$$

$\chi_m \rightarrow$ permeabilidade relativa

Os efeitos dos momentos de dipolo estão contidos em χ_m .

É costume definir

$$\mu_0 (1 + \chi_m) = \chi_m \mu_0 \equiv \mu \rightarrow \text{permeabilidade da substância}$$

$$\boxed{\vec{B} = \chi_m \vec{B}_0 = \mu \vec{H}}$$

Podemos usar χ_m para classificar as substâncias magnéticas.

$$\mu = \mu_0(1 + \chi_m)$$

Substância paramagnética : $\mu > \mu_0$ ($\Rightarrow \chi_m > 0$)

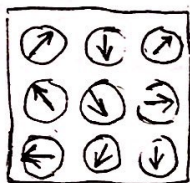
Substância diamagnética : $\mu < \mu_0$ ($\Rightarrow \chi_m < 0$)

Substância ferromagnética : $\mu \gg \mu_0$ ($\Rightarrow \chi_m \gg 0$)

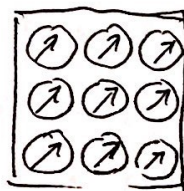
SUBSTÂNCIA	χ_m
Al	$2,3 \times 10^{-5}$
Li	$2,1 \times 10^{-5}$
Bi	$-1,66 \times 10^{-5}$
Cu	$-9,8 \times 10^{-6}$

Paramagnetismo

Substâncias paramagnéticas têm suscetibilidade positiva, embora pequena ($0 < \chi_m \ll 1$). Seus átomos têm momentos de dipolo magnético permanentes. Sem campo externo, estes momentos estão orientados aleatoriamente. Na presença de um campo eles se alinham. Porém, este efeito compete com os movimentos térmicos que tendem a desalinhar os momentos magnéticos.



$$\vec{B} = \vec{0}$$



$$\vec{B} \neq 0$$

Experimentalmente verifica-se que

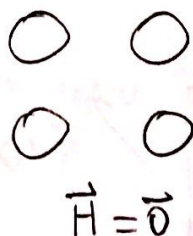
$$M = C \frac{B}{T}$$

Esta equação é chamada lei de Curie, C é a cte de Curie. Ela não vale em temperaturas muito baixas ou para campos muito fortes. Nestas duas situações M se aproxima de um valor de saturação que corresponde a um alinhamento completo dos dipolos.

Diamagnetismo

Em substâncias diamagnéticas os átomos não têm momento de dipolo magnéticos permanentes. Quando se aplica um campo há a indução de um fraco momento de dipolo magnético na direção oposta à do campo aplicado, devido à mudança do movimento orbital dos elétrons.

O diamagnetismo ocorre em todos os materiais mas é um efeito fraco comparado com o paramagnetismo e o ferromagnetismo.



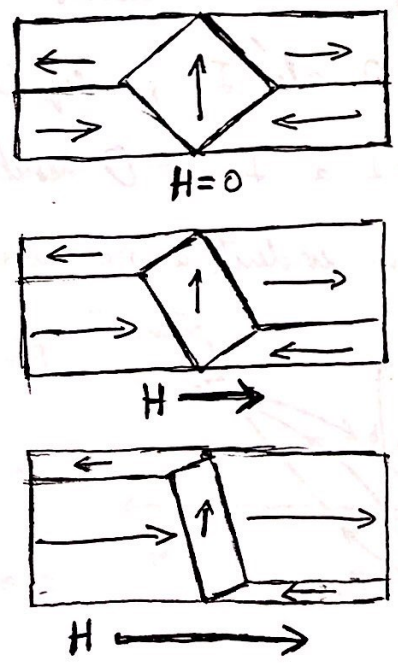
Ferromagnetismo

Em substâncias como o ferro, cobalto, gadolínio e disprósio a relação entre \vec{M} e \vec{H} não é linear. Os átomos destas substâncias possuem momentos magnéticos permanentes que se alinham mesmo em campos externos muito fracos (efeito quântico - interação de troca). Uma vez alinhados eles ficam neste estado mesmo se o campo for nulo, desde que a temperatura esteja abaixo de uma temperatura crítica T_c , chamada temperatura de Curie

Substância	T_c (K)
Fe	1.043
Co	1.394
Ni	631
terra rara → Gd	317

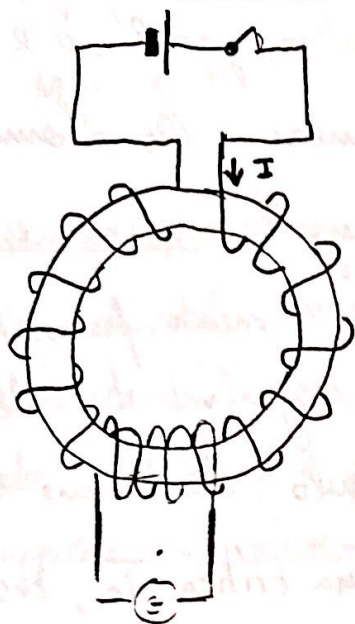
terra rara →

Usualmente não se observa esta magnetização porque do ponto de vista energético é mais interessante para a substância se dividir em domínios.



Dentro de cada domínio os momentos magnéticos apontam em uma direção. Assim, o momento total é nulo, apesar de cada domínio ter um momento não nulo. Quando se aplica um campo H , os domínios que estão favoravelmente alinhados em relação ao campo crescem.

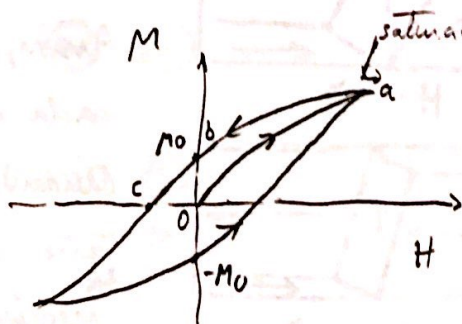
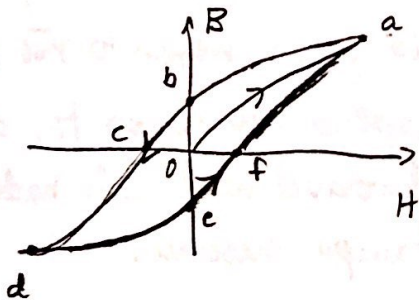
Histerese



Variando-se a corrente I na bobina toroidal varia-se o fluxo através da bobina secundária que tem um galvanômetro. A variação do fluxo leva ao aparecimento de uma força eletromotriz na bobina secundária que pode

ser medida pelo galvanômetro. Podem-se calibrar o galvanômetro de modo a associar a cada valor da corrente o valor do campo B correspondente.

Para medir H , fazem-se as medidas de B no núcleo de ferro ($H = B_0/\mu_0$). Pode-se plotar os valores $B \times H$ quando se aumenta a corrente de 0 até I , depois de I até $-I$, e finalmente de $-I$ a I . O resultado é uma curva de histerese, onde fica evidente a não linearidade entre M e H .



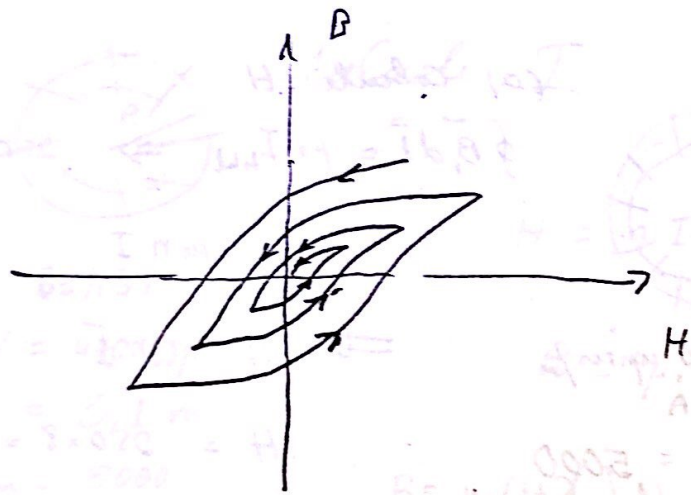
$$B = \mu_0(H + M)$$

$$M_0 = \text{magn. saturação}$$

$c \rightarrow$ força coerciva

Em materiais "doux" a histerese é mais estreita e bem larga em materiais "durs" (estes são usados na confecção de ímãs permanentes porque não se desmagnetizam facilmente).

Para desmagnetizar uma substância ferromagnética ou esquentamo-la acima de T_c a campo nulo ou se usa uma sequência de ciclos de histerese decrescentes



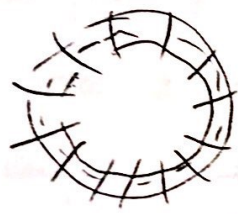
30.45 Calcule permeabilidade relativa K_m de um material com suscetibilidade magnética $\chi_m = 10^{-4}$

$$B = B_0 + B_m = \mu_0 H + \mu_0 M = \mu_0 H + \mu_0 \chi H$$

$$= \mu_0 \underbrace{(1 + \chi_m)}_{\text{"}K_m\text{"}} H$$

$$\Rightarrow K_m = 1 + \chi_m = 1,0001$$

30.46



$n = 250$ espiras/m
 $I = 8$ A
 Fe : $K_m = 5000$

(a) Calcule H

$$\oint \vec{B}_0 \cdot d\vec{l} = \mu_0 I_{total} \Rightarrow 2\pi r B_0 = \mu_0 N I$$

$$B_0 = \mu_0 n I$$

$$\Rightarrow H = n I$$

$$H = 250 \times 8 = 2000 \text{ A} \frac{\text{sp}}{\text{m}}$$

(b) Calcule B

$$B = \mu_0 K_m H = \frac{5000 \mu_0 \cdot 2000}{4\pi \times 10^{-7}} \approx 12.6 \text{ T}$$

Bobina Toroidal

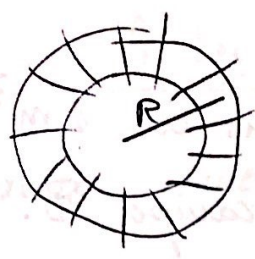
Amperic : $\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 I_{total}$

$$B \cdot 2\pi R = \mu_0 N I \Rightarrow B = \mu_0 \left(\frac{N}{2\pi R} \right) I = \mu_0 n I$$

$R \rightarrow$ novo núcleo de bobina toroidal

coloca-se $B = \mu_0 n I$ em todos os pts dentro da bobina

30.47



R = 20 cm
N = 630 esp.

núcleo $\chi_m = 100$
I = 3 A

Calcule B no interior da bobina toroidal

$$H = nI = \frac{N}{2\pi R} \cdot I$$

$$B = \mu_0(1 + \chi_m) H$$

$$B = \frac{2}{4\pi \cdot 10^{-7}} \times 101 \times \frac{630 \times 3}{2\pi \cdot 0,2} = 0,191 T$$

Com núcleo de Fe, $\chi_m = 5000$

$$B_{Fe} \approx 50 B = 9,45 T$$

30.49



B = 1,3 T
N = 470 esp.
R = 0,1 m
 $\chi_m = 5000$

Calcule I

$$\left. \begin{aligned} H &= nI = \frac{N}{2\pi R} I \\ B &= \mu_0(1 + \chi) H \end{aligned} \right\} \Rightarrow$$

$$B = \mu_0(1 + \chi_m) \frac{N}{2\pi R} I \Rightarrow I = \frac{2\pi R B}{\mu_0(1 + \chi_m) N}$$

$$I = \frac{2\pi \times 10^{-1} \cdot 1,3}{470 \times \frac{4\pi}{2} \times 10^{-7} \times 5 \times 10^3} = 0,277 A$$

30.57 Na saturação, os spins em 1 m^3 de Fe contribuem com 2 T para o campo B . Cada elétron contribui com $9,27 \times 10^{-24}\text{ A}\cdot\text{m}^2$ (1 magnéton de Bohr). Quantos elétrons por átomo contribuem para o campo saturado do Fe? (Dado: Há $8,5 \times 10^{28}$ átomos de Fe $\frac{\text{átomos de Fe}}{\text{m}^3}$)

$$B = B_0 + B_m = \mu_0 H + \mu_0 M$$

$$B_m = \mu_0 M = 2\text{ T} \Rightarrow M = \frac{2}{4\pi \times 10^{-7}} \approx 1,6 \times 10^6 \frac{\text{A}}{\text{m}}$$

$$M = \alpha n \mu_B = \alpha (8,5 \times 10^{28}) (9,27 \times 10^{-24})$$

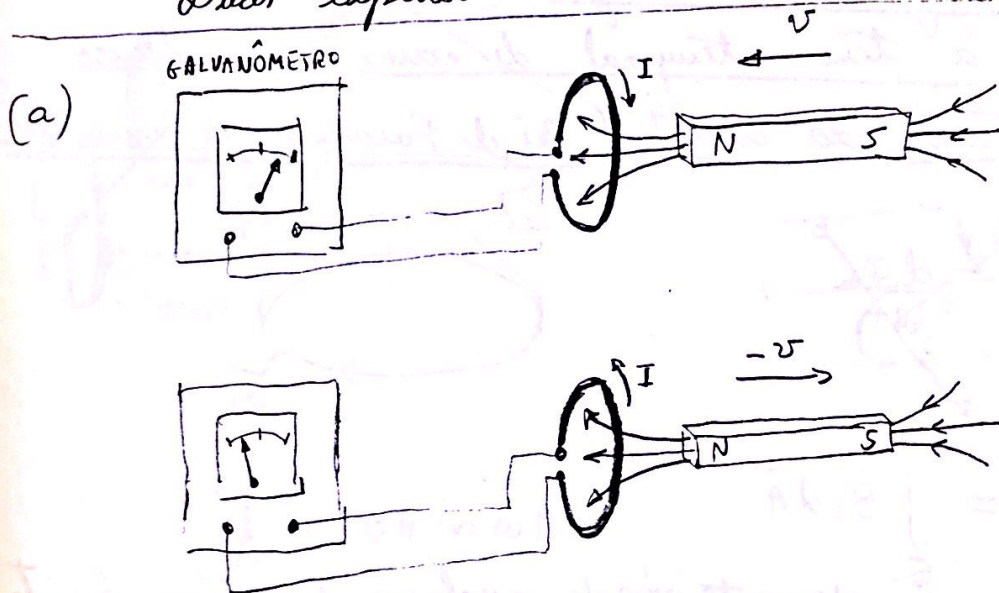
\swarrow átomos de Fe / m^3
 \nwarrow nº de elétrons por átomo que contribuem p/ M
 \swarrow magnéton de Bohr

$$\alpha = \frac{1,6 \times 10^6}{(8,5 \times 10^{28}) (9,27 \times 10^{-24})} \approx 2$$

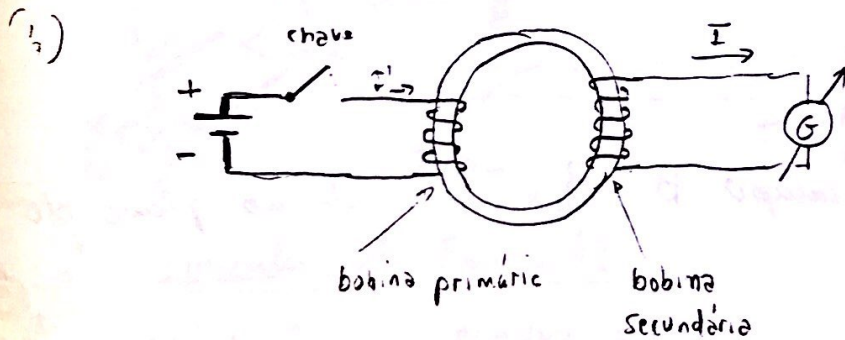
A Lei de Faraday

Mostraremos como campos magnéticos variáveis podem dar origem a campos elétricos.

Duas experiências



Quando o ímã se aproxima surge uma corrente na espira. Se o ímã se afasta a corrente tem o sentido oposto. Pode também deixar o polo parado e aproximar ou afastar a espira.



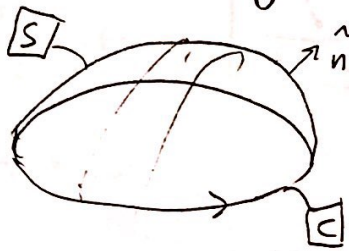
Quando a chave é fechada no circuito da bobina primária surge uma corrente no circuito da bobina secundária. Depois de um tempo certo a corrente no secundário desaparece. Volta a aparecer novamente quando se desliga a chave no primário.

de um tempo certo a corrente no secundário desaparece. Volta a aparecer novamente quando se desliga a chave no primário

Faraday concluiu que uma corrente elétrica pode ser produzida por um campo magnético variável.

De uma forma mais precisa podemos dizer que a força eletromotriz (fem) induzida num circuito é diretamente proporcional à taxa temporal de variação do fluxo magnético através do circuito (lei de Faraday da indução)

$$\mathcal{E} = - \frac{d\Phi_m}{dt}$$



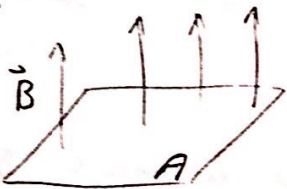
onde

$$\Phi_m = \int_S \vec{B} \cdot d\vec{A}$$

é o fluxo magnético através de qualquer superfície S limitada pelo circuito C.

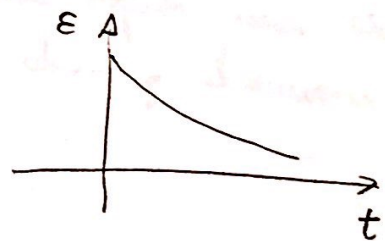
Exemplo

Espira em um campo $B = B_0 e^{-\alpha t}$ + ao plano da espira

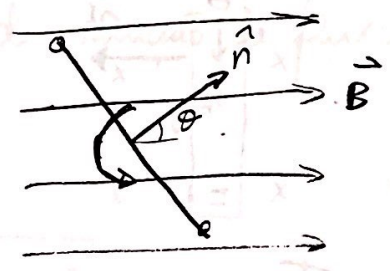
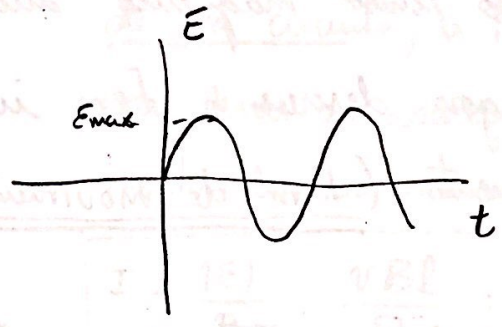
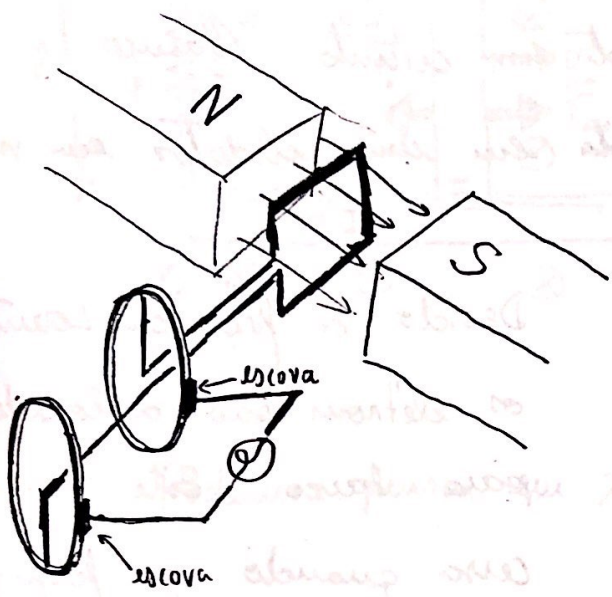


$$\Phi_m = BA \Rightarrow \mathcal{E} = - \frac{d(BA)}{dt}$$

$$\mathcal{E} = - A B_0 (-\alpha) e^{-\alpha t} = \alpha A B_0 e^{-\alpha t}$$



Gerador

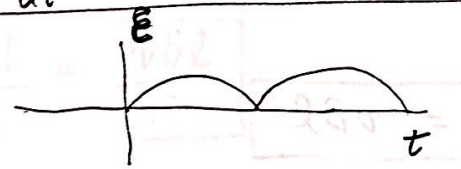
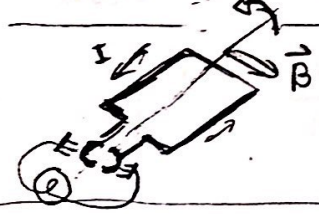


$\theta = \omega t$

$\phi_m = BA \cos \omega t$

para N espiras

$\mathcal{E} = -\frac{d\phi_m}{dt} = NAB\omega \sin \omega t \Rightarrow E_{max} = NAB\omega$



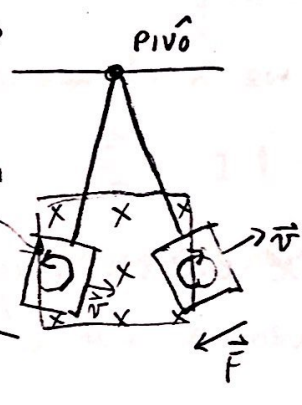
gerador de

Para produzir $\mathcal{E} \approx \text{cte}$ colocam mais espiras

Correntes de Foucault



disco \vec{v}



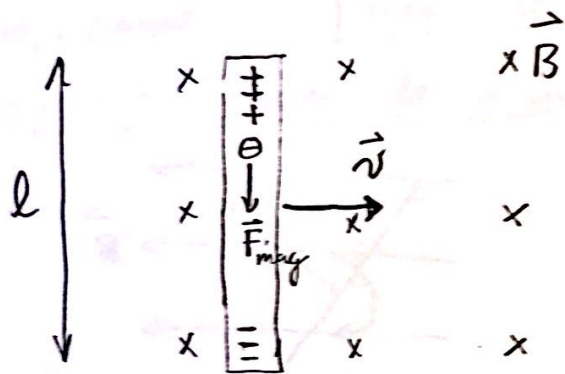
loops de corrente de cargas positivas

produzindo as correntes cortadas a chapa



As correntes de Foucault são loops fechados de corrente que se formam no interior do metal para se opor à variação do fluxo magnético

Acabamos de descrever a fem gerada à variação do fluxo magnético através de um circuito. Vamos agora descrever a fem induzida em um condutor em movimento (fem de movimento).



Devido à força de Lorentz, os elétrons são deslocados para baixo. Este movimento cessa quando a força elétrica é igual à força

de Lorentz:

$$qE = qvB \Rightarrow \boxed{E = vB}$$

O campo no interior do condutor é aproximadamente constante

$$\Rightarrow \boxed{\mathcal{E} = El = vBl}$$

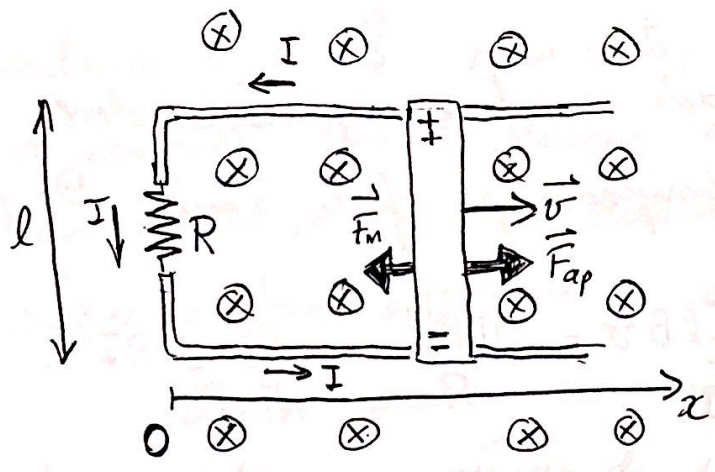
Note que se $\vec{v} \rightarrow -\vec{v}$, então $\mathcal{E} \rightarrow -\mathcal{E}$.

De um modo geral

$$\boxed{d\mathcal{E} = (\vec{v} \times \vec{B}) \cdot d\vec{\ell}}$$

Para um circuito fechado movendo-se em um campo \vec{B}

$$\boxed{\mathcal{E} = \oint \vec{v} \times \vec{B} \cdot d\vec{\ell}}$$



Se a barra é parte de um circuito, a fem vai levar ao aparecimento de uma corrente

$$I = \frac{|\mathcal{E}|}{R} = \frac{vBl}{R}$$

Podemos pensar em termos de variação de fluxo

$$\Phi_m = Blx,$$

$$\Rightarrow \left[\mathcal{E} = -\frac{d\Phi_m}{dx} = -Bl \frac{dx}{dt} = vBl \right]$$

É o mesmo resultado obtido analisando-se apenas a barra. A corrente é dada por

$$\left[I = \frac{|\mathcal{E}|}{R} = \frac{vBl}{R} \right]$$

Energia

Vimos que um condutor por onde passa uma corrente I, deslocando-se em um campo magnético, sofre uma força

$$\vec{F}_m = I \vec{l} \times \vec{B} = -I l B \vec{e} \quad (\vec{e} \text{ tem o sentido de } I)$$

No nosso caso, $F_m = IlB$ e para manter a velocidade constante é necessário aplicar uma força $\vec{F}_{ap} = -\vec{F}_m$.

A potência associada à força aplicada deve compensar a energia dissipada por efeito Joule. De fato,

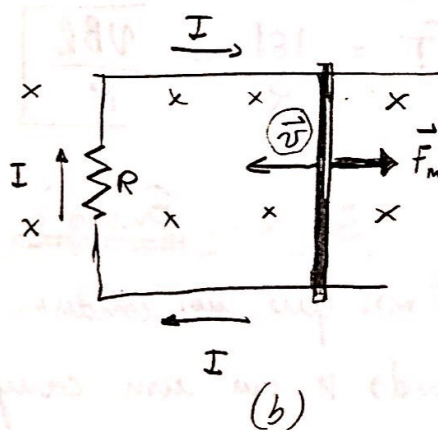
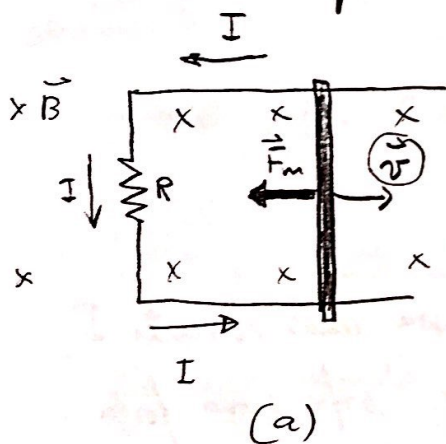
$$P = F_{ap} v = \frac{I l B v}{\frac{v B l}{R}} = \frac{v^2 B^2 l^2}{R} = \frac{\mathcal{E}^2}{R} = R I^2$$

A lei de Lenz

Permite calcular a direção da fem e da corrente induzidas. Sua formulação é a seguinte:

"A polaridade da fem induzida é tal que ela provoca uma corrente que gera um fluxo magnético que se opõe à variação do fluxo magnético através do circuito fechado."

No exemplo da barra temos duas situações

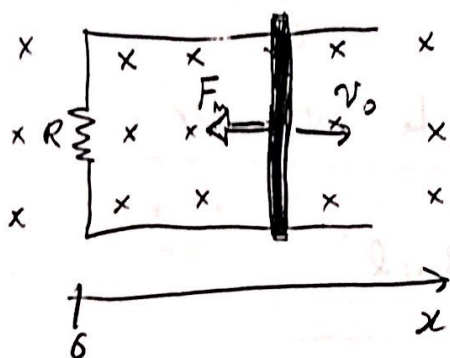


Em (a) o fluxo através do circuito aumenta com o tempo (a área aumenta) a fem induzida gera uma corrente no sentido anti-horário que produz um campo \vec{B}' com direção

contrária à de \vec{B} . Além disto, \vec{F}_m , devida à corrente no condutor tem a direção contrária a de \vec{v} .

Caso contrário, a barra aceleraria cada vez mais. Uma análise semelhante aplica-se ao caso (b).

Vamos analisar em mais detalhe o movimento do condutor na ausência de uma força aplicada.



$$F_z = m \frac{dv}{dt} = - I l B$$

$$\text{Mas, } I = \frac{v B l}{R}$$

$$m \frac{dv}{dt} = - \frac{B^2 l^2}{R} v$$

$$\frac{dv}{v} = - \frac{B^2 l^2}{m R} dt$$

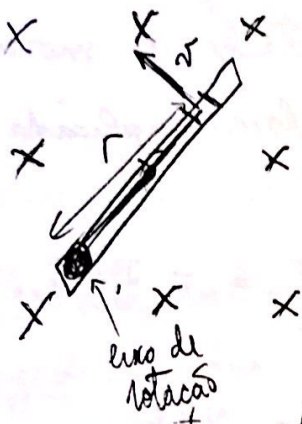
$$\int_{v_0}^v \frac{dv}{v} = - \frac{B^2 l^2}{m R} \int_0^t dt$$

$$\ln\left(\frac{v}{v_0}\right) = - \frac{B^2 l^2}{m R} t$$

$$\Rightarrow v = v_0 e^{-\frac{t}{\tau}}$$

$$\Rightarrow I = \frac{v B l}{R} = \frac{v_0 B l}{R} e^{-\frac{t}{\tau}}$$

$$e \quad \mathcal{E} = IR = v_0 B l e^{-\frac{t}{\tau}}$$

Barras girante

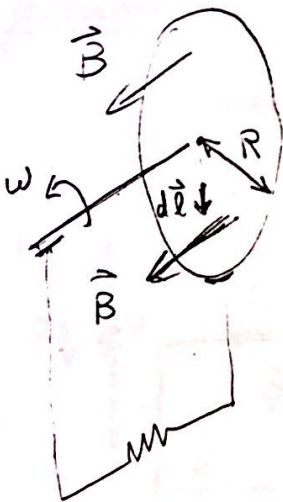
$$d\mathcal{E} = \mathcal{E} dr$$

$$d\mathcal{E} = B v dr$$

$$\mathcal{E} = \int d\mathcal{E} = \int_0^l B v dr$$

$$B = \text{cte} \quad v = \omega r$$

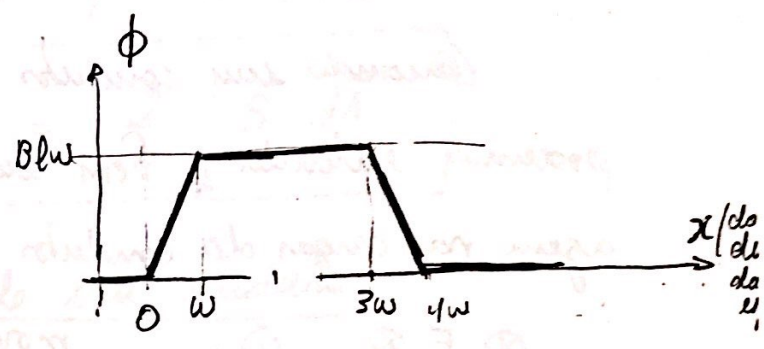
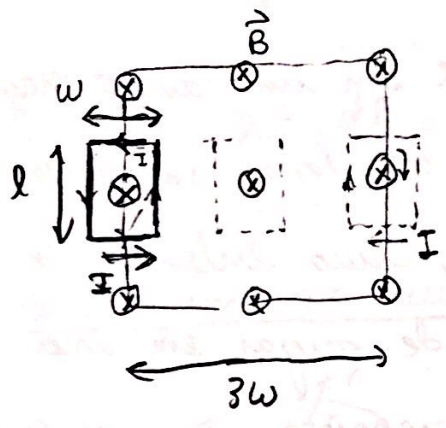
$$\mathcal{E} = B \omega \int_0^l r dr = \frac{1}{2} B \omega l^2$$

Disco girante

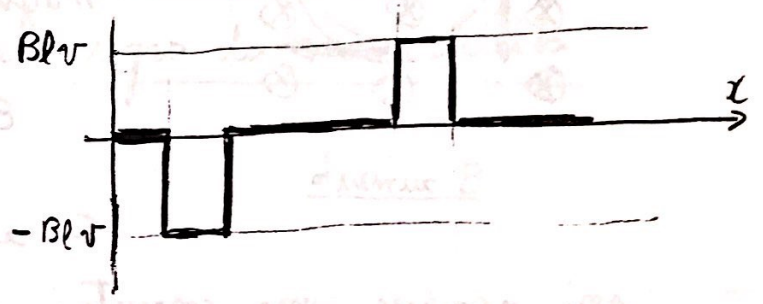
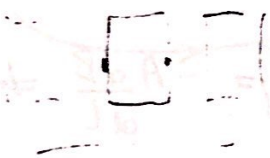
$$d\mathcal{E} = B v dr$$

$$\mathcal{E} = \int_0^R B v dr = \frac{1}{2} B \omega R^2$$

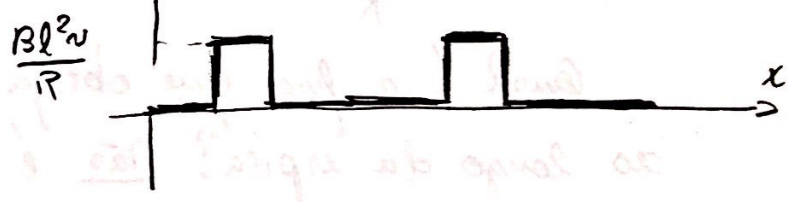
Espira em movimento através de um campo



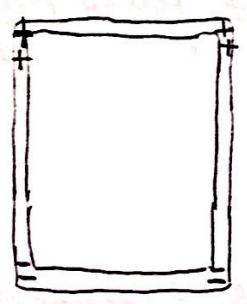
$\mathcal{E} = -\frac{d\phi_m}{dt}$



$|F_x| = \frac{B^2 l^2 v}{R} = \frac{|\mathcal{E}| l}{R}$

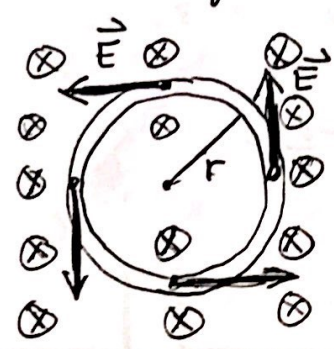


Quando a espira está totalmente dentro da região com campo não há corrente. As d.d.p.s dos lados direito e esquerdo da espira são iguais e impedem qualquer corrente.



Campos elétricos induzidos

Quando um condutor se move em um campo magnético, podemos entender a fem em termos das forças magnéticas que agem nas cargas do condutor. Porém, como entender o



B aumenta

movimento de cargas em uma espira em repouso em um campo magnético variável? Como B varia

$$\epsilon = -\frac{d\phi_m}{dt} = -A \frac{dB}{dt} \neq 0$$

Se a espira tem resistência R, vai aparecer uma corrente

$$I = \frac{|\epsilon|}{R}$$

Qual é a força que obriga as cargas a se moverem ao longo da espira? Não é uma força magnética porque a espira não está em movimento. Somos forçados a concluir que se trata de um campo elétrico induzido no condutor produzido pela variação do fluxo magnético.

Note que

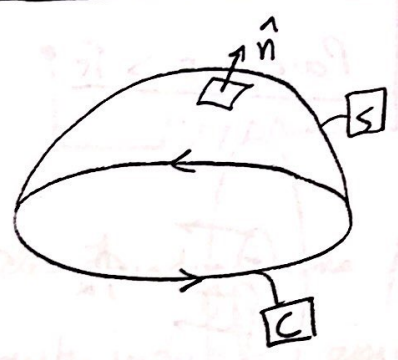
$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{l} = \epsilon \neq 0$$

portanto o campo elétrico induzido não é conservativo.

É importante enfatizar que a expressão

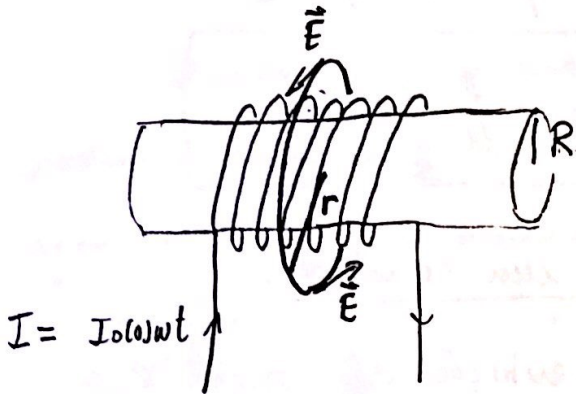
$$\mathcal{E} = \oint_C \vec{E} \cdot d\vec{l} = -\frac{d\phi_m}{dt} = -\frac{d}{dt} \int_S \vec{B} \cdot d\vec{A}$$

vale mesmo na ausência de um condutor.



A orientação da normal e o sentido do percurso são dados pela regra da mão direita.

Campo elétrico em um solenoide



Vimos que no interior do solenoide $B = \mu_0 n I$, e $B = 0$ fora dele

(a) Para $r > R$

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{l} = -\frac{d}{dt} \phi_m$$

$$2\pi r E = -\frac{d}{dt} (B \pi R^2)$$



$$\phi_m = \pi R^2 B$$

$$2\pi r E = -\frac{d}{dt} (\mu_0 n I_0 \cos(\omega t) \pi R^2)$$

$$E = \frac{\mu_0 n I_0 \omega \sin(\omega t) R^2}{2r} \quad r > R$$

(b) Para $r < R$

$$2\pi r E = -\frac{d}{dt} (\mu_0 n I_0 \cos(\omega t) \pi r^2)$$

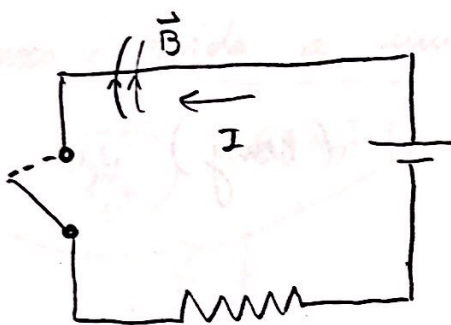


$$\phi_m = \pi r^2 B$$

$$\Rightarrow E = \frac{\mu_0 n I_0 \omega r \sin(\omega t)}{2} \quad r < R$$

Indutância

Auto-indutância



Quando se fecha a chave a corrente I varia. Conseqüentemente \vec{B} e o fluxo através do circuito também variam.

Aparece, de acordo com a lei de Faraday, uma fem no circuito. Este efeito é a auto-indução, assim chamada porque o fluxo variável ocorre no próprio circuito. Quando a variação do fluxo é devida a um outro circuito o efeito é chamado indução mútua.

Como $B \propto I \Rightarrow \Phi_m \propto I$, ou seja

$$\Phi_m = L I$$

a cte L é chamada indutância

$$\mathcal{E} = - \frac{d\Phi_m}{dt} = -L \frac{dI}{dt}$$

Assim,

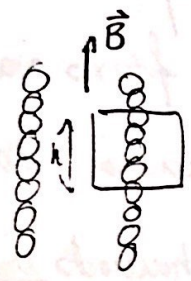
$$L = \frac{\Phi_m}{I} = - \frac{\mathcal{E}}{\frac{dI}{dt}}$$

Note que a indutância é uma medida da oposição à variação da corrente.

Unidades

$$[L] = \left[-\frac{\epsilon}{\frac{dI}{dt}} \right] = \frac{V \cdot s}{A} \equiv H \text{ (henry)}$$

Exemplo: indutância de um solenóide. (N espiras, comp. l)



$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 I_{total} \Rightarrow B h = \mu_0 n h I$$
$$\Rightarrow B = \frac{\mu_0 N I}{l}$$

$$\Phi_{1\text{esp.}} = \frac{\mu_0 N I A}{l}$$

$$\Phi_m = N \Phi_{1\text{esp.}} = \frac{\mu_0 N^2 A I}{l}$$

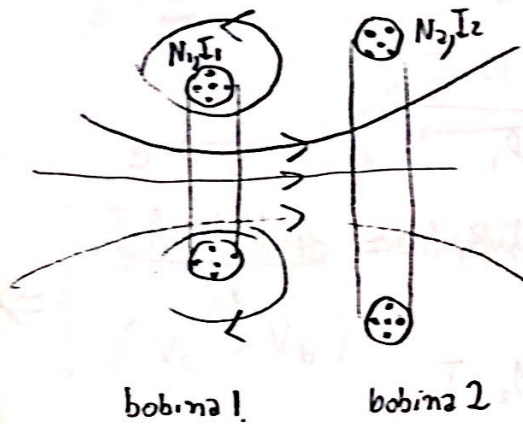
$$\Phi_m = L I$$

$$\Rightarrow L = \frac{\mu_0 N^2 A}{l}$$

Indutância Mútua

136

Vamos considerar agora o caso em que a variação do fluxo i' devida a um outro circuito.



Definimos a indutância mútua M_{21} da bobina 2 em relação à bobina 1 como

$$\boxed{\Phi_{21} = M_{21} I_1},$$

onde

$\Phi_{21} \equiv$ fluxo magnético total através da bobina 2, provocada pela bobina 1.

ESTA DEFINIÇÃO É LIGEIRAMENTE DIFERENTE DA ENCONTRADA NO LIVRO DO SERWAY, QUE ESCREVE $\Phi_{21} = N_2 \phi_{21}$, ONDE ϕ_{21} É O FLUXO ATRAVÉS DE UMA ESPIRA DA BOBINA 2.

A lei de Faraday fornece

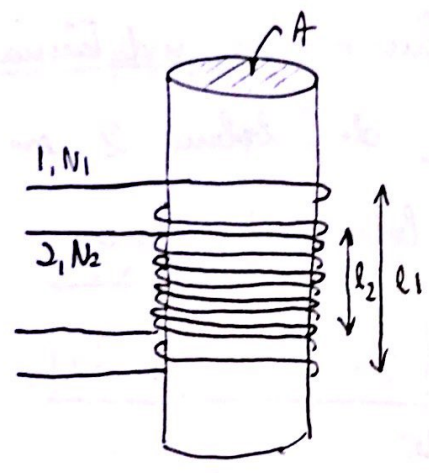
$$\boxed{\mathcal{E}_2 = -\frac{d\Phi_{21}}{dt} = -M_{21} \frac{dI_1}{dt}}$$

Analogamente, podemos definir para a bobina 1 uma quantidade M_{12} através de

$$\Phi_{12} = M_{12} I_2 \quad \Rightarrow \quad \mathcal{E}_1 = -M_{12} \frac{dI_2}{dt}$$

Pode-se mostrar que $M_{21} = M_{12} \equiv M$

Exemplo: Indutância mútua de dois solenóides



$$B_1 = \frac{\mu_0 N_1 I_1}{l_1}$$

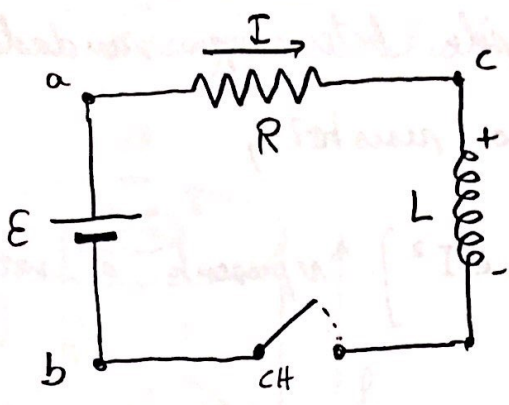
$$\Phi_{21} = N_2 B_1 A = \frac{\mu_0 N_1 N_2 A I_1}{l_1} \Rightarrow$$

$$\Phi_{21} = M_{21} I_1$$

$$\Rightarrow M_{21} = \frac{\mu_0 N_1 N_2 A}{l_1}$$

Ex. Mostre que $M_{21} = M_{12}$.

Circuito RL



Ao se fechar a chave CH o indutor vai se opor ao aumento da corrente (lei de Lenz). Assim, percorrendo

o circuito no sentido da corrente a ddp deve diminuir ($V_c > V_b$).

Equação do circuito RL

$$V_a - V_b = V_a - V_c + V_c - V_b$$

$\underbrace{\hspace{2cm}}_E \qquad \underbrace{\hspace{2cm}}_{RI} \qquad \underbrace{\hspace{2cm}}_{L \frac{dI}{dt}} \quad (I \text{ aumentando, } \frac{dI}{dt} > 0)$

Com a chave se fecha a corrente começa a aumentar (é o que se observa a partir)

$$E = RI + L \frac{dI}{dt}$$

Energia em um campo magnético

Multiplicando a equação do circuito RL por I obtemos

$$EI = RI^2 + LI \frac{dI}{dt}$$

Observe que:

$\mathcal{E}I \equiv$ trabalho fornecido pela bateria por unidade de tempo

$RI^2 \equiv$ potência dissipada no resistor,

assim, $LI \frac{dI}{dt} = \frac{d}{dt} \left[\frac{1}{2} LI^2 \right]$ representa a variação

da energia no indutor e

$$U_m = \frac{1}{2} LI^2$$

representa a energia no indutor.

Determinemos a energia por unidade de volume no indutor. Faremos isto p/ o solenóide. Nesse caso

$$L = \frac{\mu_0 N^2 A l}{l}$$

$$B = \mu_0 \frac{N}{l} I \Rightarrow I = \frac{Bl}{\mu_0 N}$$

$$\Rightarrow U_m = \frac{1}{2} LI^2 = \frac{1}{2} \frac{\mu_0 N^2 A}{l} \frac{B^2 l^2}{\mu_0^2 N^2} = \frac{B^2}{2\mu_0} (Al)$$

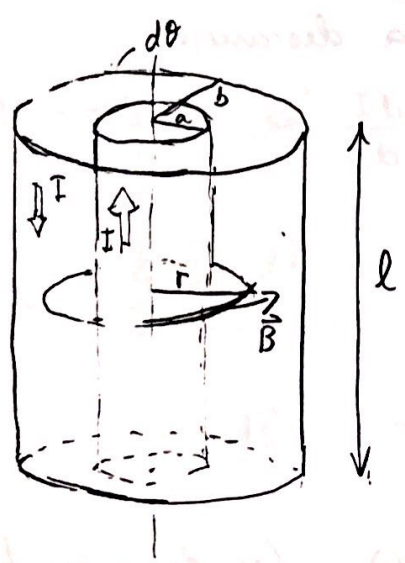
↓
volume do solenóide

$$\Rightarrow \text{densidade de energia} = \frac{U_m}{Al} = u_m = \frac{B^2}{2\mu_0}$$

esta expressão vale para qq região do espaço onde haja campo magnético

e é análoga à eq $u_e = \epsilon_0 E^2 / 2$.

Exemplo: calcular L e U_m para um cabo coaxial



A energia no cabo coaxial é dada por $\int \frac{B^2}{2\mu_0} dV$

$$U_m = \int \frac{B^2}{2\mu_0} dV$$

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 I \Rightarrow B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}$$

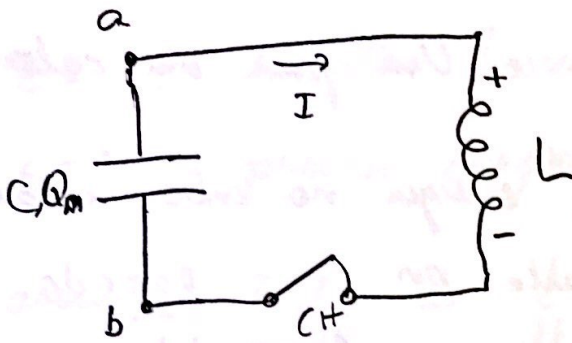
$$U_m = \int_a^b \frac{1}{2\mu_0} \frac{\mu_0^2 I^2}{(2\pi r)^2} l \cdot 2\pi r \cdot dr$$

$$U_m = \frac{\mu_0 I^2 l}{4\pi} \int_a^b \frac{dr}{r} = \frac{1}{2} \frac{\mu_0 I^2 l}{2\pi} \ln\left(\frac{b}{a}\right)$$

$$U_m = \frac{1}{2} L I^2$$

$$\Rightarrow L = \frac{\mu_0 l}{2\pi} \ln\left(\frac{b}{a}\right)$$

Circuito LC



Capacitor carregando
a descarregar

$$\frac{dI}{dt} > 0 \quad \text{e} \quad I = -\frac{dQ}{dt}$$

$$V_a - V_b = V_a - V_b$$

$$\frac{Q}{C} = L \frac{dI}{dt} = -L \frac{d^2Q}{dt^2}$$

$$\Rightarrow \frac{d^2Q}{dt^2} = -\frac{1}{LC} Q \equiv -\omega_0^2 Q \quad (\text{eq. de um osc. harmônica})$$



$$\Rightarrow \begin{cases} Q(t) = A \cos(\omega_0 t + \varphi) \\ I(t) = -\frac{dQ}{dt} = A \omega_0 \sin(\omega_0 t + \varphi) \end{cases}$$

Condições iniciais $Q(0) = Q_m$ e $I(0) = 0$

$$\left. \begin{aligned} Q_m &= A \cos \varphi \\ 0 &= A \omega_0 \sin \varphi \Rightarrow \varphi = 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \boxed{A = Q_m}$$

$$\boxed{Q(t) = Q_m \cos(\omega_0 t) \quad \text{e} \quad I(t) = \underbrace{(\omega_0 Q_m)}_{I_m} \sin \omega_0 t}$$