

Electromagnetismo

Física III para a Engenharia (4323203)

Notas de Aula - 2015

Carlos E. I. Carneiro

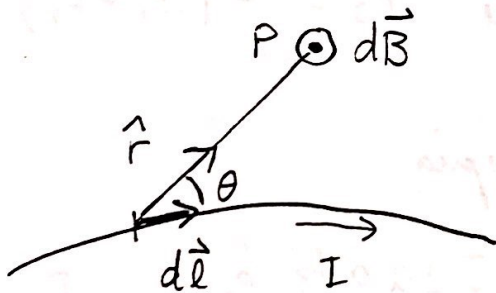
Fontes do Campo Magnético

93

Vimos como cargas e correntes são afetadas por um campo magnético. Veremos agora como correntes podem produzir campos magnéticos.

A primeira descoberta nesta linha foi de Oersted que em 1819 observou a deflexão de uma agulha imantada por uma corrente elétrica. Mais tarde, Biot e Savart chegaram à expressão do campo magnético em função da corrente que o produz.

Lei de Biot-Savart (Fios)



O elemento $d\vec{l}$ produz em P o campo

$$d\vec{B} = k_m I \frac{d\vec{l} \times \hat{r}}{r^2}$$

$$k_m = 10^{-7} \frac{\text{Wb}}{\text{A} \cdot \text{m}} \text{ (SI)}$$

A constante k_m também é escrita como

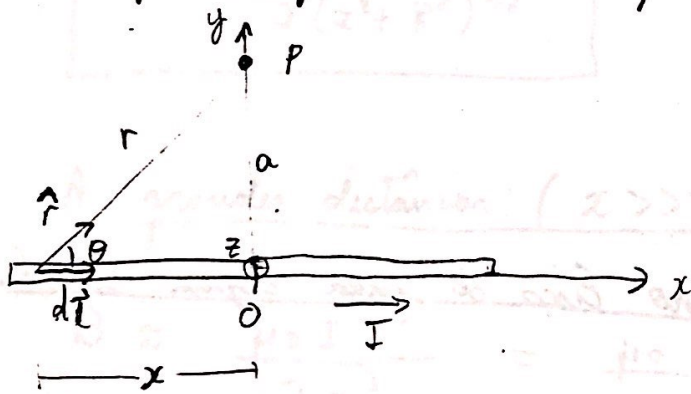
$$k_m = \frac{\mu_0}{4\pi}, \quad \mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \frac{\text{Wb}}{\text{A} \cdot \text{m}} \text{ é a permeabilidade do vácuo}$$

O campo total devido a um fio finite é

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int \frac{d\vec{l} \times \hat{r}}{r^2}$$

Note que, em analogia com a eletrostática, o campo cai com $1/r^2$ e $I d\vec{l}$ desempenha o papel da carga. Porém, o campo não é radial e sim perpendicular ao vetor \hat{r} .

Campo magnético de um fio condutor fino e retilíneo



$$d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I d\vec{l} \times \hat{r}}{r^2}$$

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0 I dx \sin\theta}{4\pi r^2} \vec{k}$$

Vamos expressar tudo em função de θ

$$r = \frac{a}{\sin\theta} \quad , \quad x = a \cot\theta \Rightarrow dx = a \operatorname{cosec}^2\theta d\theta$$

$$\operatorname{cosec}\theta = \frac{1}{\sin\theta}$$

$$\Rightarrow d\vec{B} = \frac{\vec{k} \mu_0 I a \operatorname{cosec}^2\theta d\theta \sin\theta}{4\pi \frac{a^2}{\sin^2\theta}} = \vec{k} \frac{\mu_0 I}{4\pi a} \sin\theta d\theta$$

$$\Rightarrow \vec{B} = \frac{\vec{k} \mu_0 I}{4\pi a} \int_{\theta_1}^{\theta_2} \sin\theta d\theta = \frac{\vec{k} \mu_0 I}{4\pi a} (\cos\theta_1 - \cos\theta_2)$$

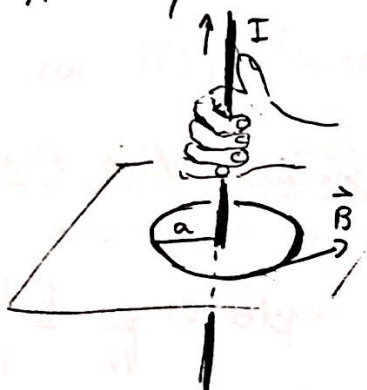
Para um fio ∞



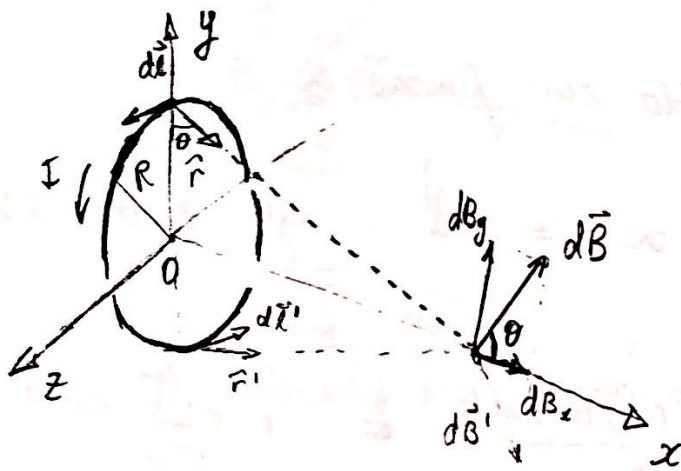
$\theta_1 = 0$
 $\theta_2 \approx \pi$

$$\Rightarrow B = \frac{\mu_0 I}{2\pi a}$$

A direção do campo é dada pela regra da mão direita



Campo Magnético no Eixo de uma Espira Circular



O elemento $d\vec{l}'$ diametralmente oposto a $d\vec{l}'$ produz um campo $d\vec{B}'$ tal que $dB'_y = -dB_y$. Assim, basta nos preocuparmos com a componente x .

Note que $d\vec{l}' \perp \hat{r} \Rightarrow$

$$dB = \frac{\mu_0}{4\pi} I \frac{|d\vec{l}' \times \hat{r}|}{r^2} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{dl}{r^2}$$

$$\Rightarrow dB_x = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{dl \cos\theta}{r^2}$$

Note que r e $\cos\theta$ são constantes

$$\Rightarrow B = B_x = \frac{\mu_0 I \cos\theta}{4\pi r^2} \oint dl = \frac{\mu_0 I \cos\theta 2\pi R}{4\pi r^2}$$

Como $r = \sqrt{x^2 + R^2}$, $\cos\theta = \frac{R}{r} = \frac{R}{\sqrt{x^2 + R^2}}$, obtenemos

$$B = \frac{\mu_0 I R^2}{2(x^2 + R^2)^{3/2}}$$

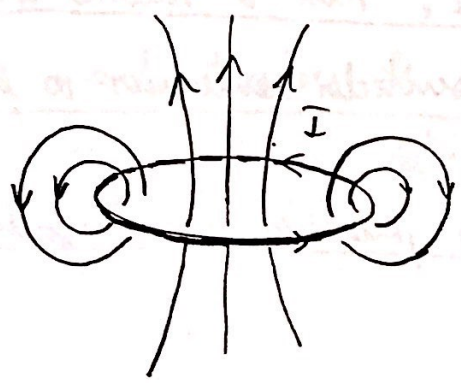
$$B = \frac{\mu_0 I}{2R}$$

no centro da espira

A grandes distâncias ($x \gg R$)

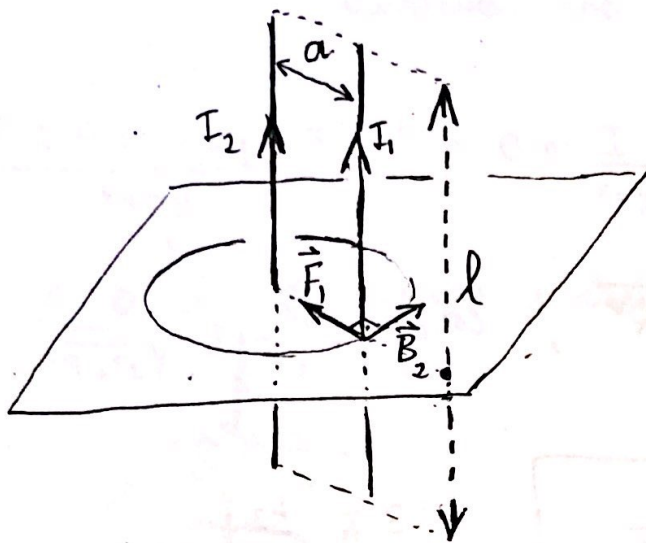
$$B \approx \frac{\mu_0 I R^2}{2x^3} = \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{\mu}{x^3} \quad (\mu = \pi R^2 I)$$

e B tem a mesma forma da expressão do dipolo elétrico ($E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{p}{x^3}$).



Apenas em pts distantes o campo é o de um dipolo

Força entre dois condutores paralelos



A força que o condutor
exerce sobre o condutor
é dada por

$$F_1 = I_1 l B_2$$

$$\text{Mas, } B_2 = \frac{\mu_0 I_2}{2\pi a}$$

Assim, $F_1 = \frac{\mu_0 I_1 I_2 l}{2\pi a}$ e a força por unidade

de comprimento é dada por

$$\boxed{\frac{F_1}{l} = \frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi a}}$$

Analogamente, a força do fio 1 sobre o fio 2
é igual e oposta a F_1 .

Se as correntes I_1 e I_2 têm o mesmo sentido os
fios se atraem se têm sentidos contrários os fios se repelem

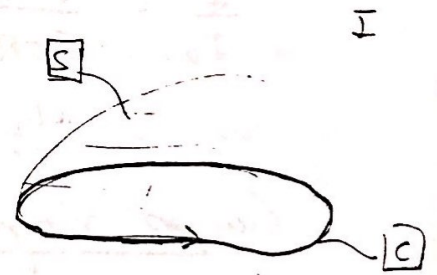
A força entre dois fios paralelos é utilizada para
definir o ampere:

Se dois fios condutores, longos, paralelos, separados por 1 m , conduzem a mesma corrente, e se a força por unidade de comprimento em cada condutor for $2 \cdot 10^{-7}\text{ N/m}$, então a corrente em qualquer um dos condutores é 1 A .
(daí vem o valor da constante $\mu_0/4\pi$ no SI a partir de $\frac{\mu_0 I}{2\pi a}$)

A partir da corrente define-se a carga. O coulomb é definido como a carga que passa em 1 s através da seção reta de um condutor percorrido por uma corrente de 1 A .

A lei de Ampère afirma que

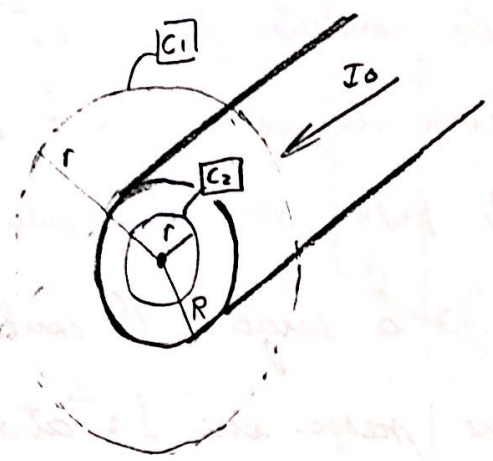
$$\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 I$$



onde I é a corrente constante total que ^{atravessa} ~~passa~~ qualquer superfície limitada pela curva fechada C .

Para configurações de corrente com elevado grau de simetria ela pode ser utilizada para calcular B .

Campo de um fio enrolado



Para $r \geq R$

$$\oint_{C_1} \vec{B} \cdot d\vec{l} = B \oint_{C_1} dl = 2\pi r B = \mu_0 I_0$$

$$B = \frac{\mu_0 I_0}{2\pi r} \quad \text{p/ } r \geq R$$

Para $r < R$

$$\oint_{C_2} \vec{B} \cdot d\vec{l} = 2\pi r B = \mu_0 I$$

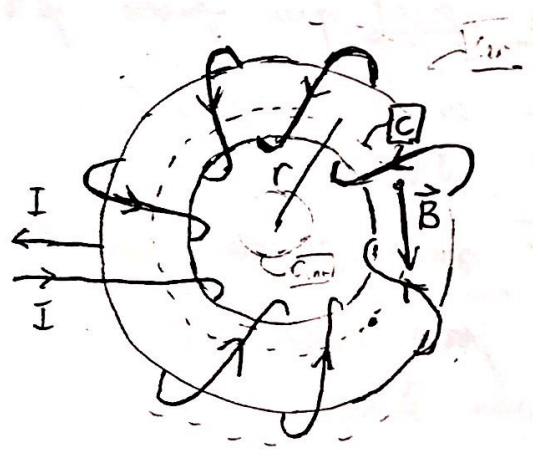
$$\frac{I}{I_0} = \frac{J \pi r^2}{J \pi R^2} \Rightarrow J = \frac{r^2}{R^2} I_0$$

$$\text{ou } J = \frac{I_0}{\pi R^2} \Rightarrow I = \frac{I_0}{\pi R^2} \pi r^2 = \frac{r^2}{R^2} I_0$$

$$\Rightarrow 2\pi r B = \frac{r^2}{R^2} I_0$$

$$B = \frac{I_0 r}{2\pi R^2} \quad \text{p/ } r < R$$

Campo magnético de uma bobina toroidal com N espiras



Para uma bobina com muitas espiras bem cerradas, o campo B no exterior é ≈ 0 .

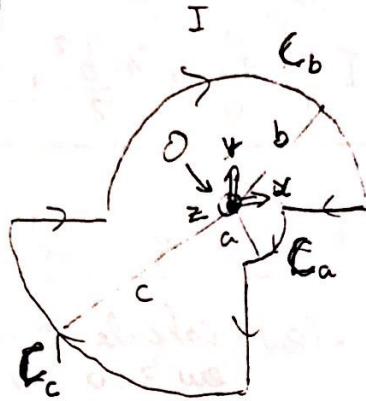
$$\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{l} = B \oint_C dl = B 2\pi r = \mu_0 N I$$

$$B = \frac{\mu_0 N I}{2\pi r}$$

$$\oint_{C_{ext}} \vec{B} \cdot d\vec{l} - \oint_{C_{int}} \vec{B} \cdot d\vec{l} = 0 \Rightarrow \vec{B} = 0$$

Exercícios

P2_2001



(a) Use Biot-Savart para calcular \vec{B}_0 .

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{d\vec{l} \times \hat{r}}{r^2}$$

segmentos retilíneos não contribuem porque $d\vec{l} \parallel \hat{r}$. Para todos os segmentos circulares

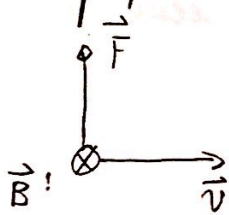
$$d\vec{l} \times \hat{r} = -dl \hat{e}_z \quad e \quad r = cb$$

$$\vec{B}_0 = -\frac{\mu_0 I}{4\pi} \left\{ \frac{1}{a^2} \int_{C_a} dl + \frac{1}{b^2} \int_{C_b} dl + \frac{1}{c^2} \int_{C_c} dl \right\} \hat{e}_z$$

$\underbrace{\hspace{10em}}_{\frac{\pi a}{2}} \quad \underbrace{\hspace{10em}}_{\pi b} \quad \underbrace{\hspace{10em}}_{\frac{\pi c}{2}}$

$$\vec{B}_0 = -\frac{\mu_0 I}{8} \left\{ \frac{1}{a} + \frac{2}{b} + \frac{1}{c} \right\} \hat{e}_z$$

(b) Determine \vec{v} de uma carga q para que na origem ela sofra uma força $\vec{F} = F \hat{e}_y$



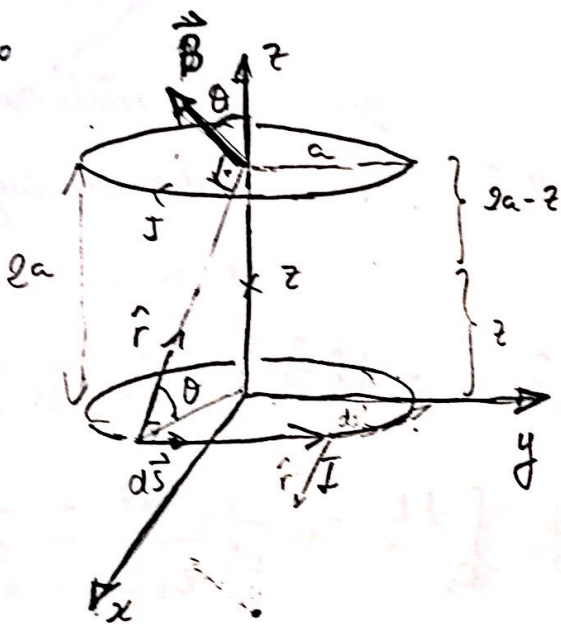
$$-q \vec{v} \times B \hat{e}_z = F \hat{e}_y$$

$$\Rightarrow \vec{v} = \frac{F}{qB} \hat{e}_x, \text{ por exemplo}$$

(c) $\vec{\mu}$ da espira ?

$$\vec{\mu} = -A I \hat{e}_z = -I \left\{ \frac{\pi a^2}{4} + \frac{\pi b^2}{2} + \frac{\pi c^2}{4} \right\} \hat{e}_z$$

SUB. 2000



(a) calcule o campo da espira em $z=0$ no eixo z

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{d\vec{s} \times \hat{r}}{r^2}$$

Devido à simetria só a componente vertical sobrevive

$$d\vec{B} = dB_z \hat{e}_z = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{ds \cos \theta}{z^2 + a^2}$$

Man $\cos \theta = \frac{a}{\sqrt{z^2 + a^2}} \Rightarrow d\vec{B} = \frac{\mu_0 I a ds}{4\pi (z^2 + a^2)^{3/2}} \hat{e}_z$

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 I a}{4\pi (z^2 + a^2)^{3/2}} \int ds \hat{e}_z = \frac{\mu_0 I a^2}{2(z^2 + a^2)^{3/2}} \hat{e}_z$$

(b) Qual o campo \vec{B} total, sobre o eixo z , de duas espiras.

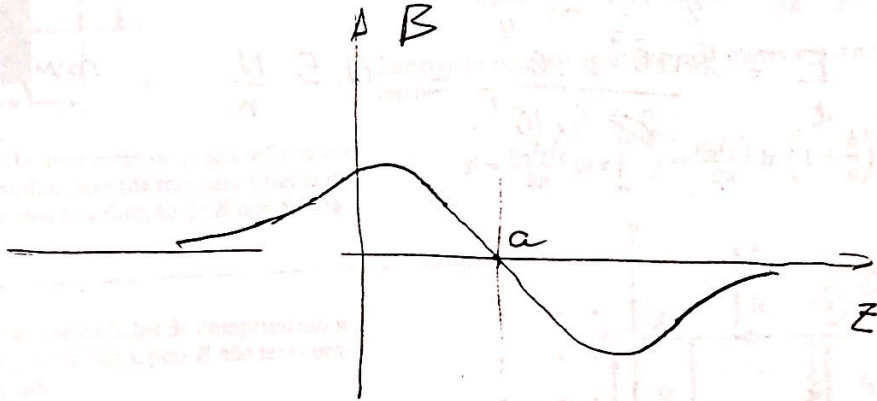
$$\vec{B} = \frac{\mu_0 I a^2}{2(z^2 + a^2)^{3/2}} \hat{e}_z - \frac{\mu_0 I a^2}{2[(2a-z)^2 + a^2]^{3/2}} \hat{e}_z$$

a corrente da 2ª espira gira no sentido contrário da corrente da 1ª espira.

(c) Para $z \rightarrow \infty^+$ $B \rightarrow 0^-$

" $z \rightarrow \infty^-$ $B \rightarrow 0^+$

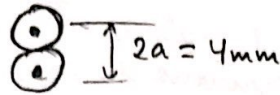
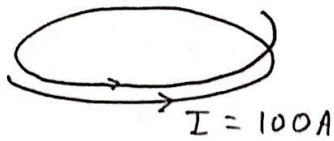
Para $z = a$ $B = 0$



$$\frac{dB}{dz} = \frac{\mu_0 I a^2}{2} \left[-\frac{3z}{(z^2 + a^2)^{5/2}} + \frac{3(z-2a)}{[(z-2a)^2 + a^2]^{5/2}} \right]$$

Os mínimos e máximos de $z = 0$ e $z = 2a$

18



As espiras estão bem juntas 103

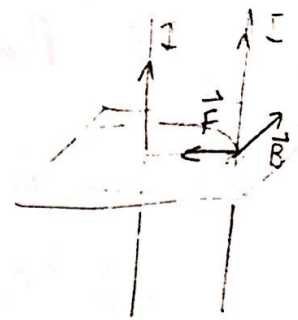


$$B \cdot 2\pi r = \mu_0 I$$

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}$$

$$F = I |\vec{r} \times \vec{B}| = I l B$$

$$\Rightarrow \frac{F}{l} = \frac{\mu_0 I^2}{2\pi r}$$



$$\frac{F}{l} = \frac{4\pi \times 10^{-7} \times 10^4}{2\pi \times 4 \times 10^{-3}} = 0.5 \frac{N}{m}, \text{ compressive}$$

30.6
 Uma folha condutora plana, infinita, no plano xz tem uma densidade superficial de corrente \vec{J}_s . A corrente está na direção y e \vec{J}_s representa a corrente por unidade de comprimento, A LEI DE AMPÈRE

do ao longo do eixo dos z . Achar o campo magnético nas vizinhanças desta corrente plana.

Solução Para calcular a integral de linha da lei de Ampère, vamos imaginar uma curva retangular envolvendo a folha condutora, como mostra a Fig. 30.12. O retângulo tem as dimensões ℓ e w , com os lados de comprimento ℓ paralelos à superfície da folha. A corrente líquida que atravessa a superfície desse retângulo é $J_s \ell$ (isto é, a corrente líquida é igual à corrente por unidade de comprimento multiplicada pelo comprimento do retângulo). Então, a lei de Ampère, aplicada a esse

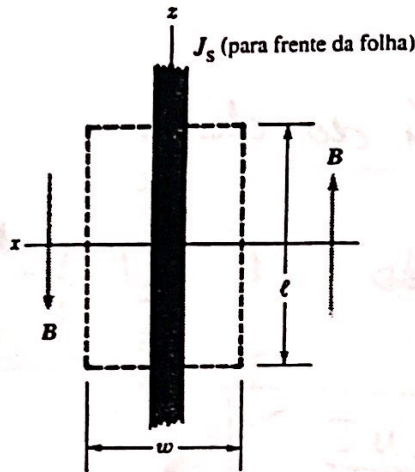


Fig. 30.12 Vista de topo de uma corrente plana infinita no plano yz , com a corrente na direção y (de trás para a frente da folha do livro). Esse corte mostra a direção de B nos dois lados da corrente plana.

retângulo dá, observando-se que os lados de comprimento w não contribuem para a integral de linha, pois B não tem componente na direção destes lados.

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{s} = \mu_0 I = \mu_0 J_s \ell$$

$$2B\ell = \mu_0 J_s \ell$$

$$B = \mu_0 \frac{J_s}{2} \quad (30.19)$$

O resultado mostra que o campo magnético é independente da distância à corrente plana. Na realidade, o campo magnético é uniforme e, em qualquer ponto, paralelo ao plano da corrente. Isso é razoável, pois estamos considerando uma folha infinita com a corrente. O resultado é análogo ao do campo elétrico uniforme associado a uma folha infinita, carregada. (Exemplo 24.6.)

EXEMPLO 30.7 A Força Magnética Sobre um Segmento de Corrente

Um fio condutor retilíneo, comprido, está orientado sobre o eixo dos y , e tem uma corrente constante I_1 , como mostra a Fig. 30.13.

Um circuito retangular, localizado à direita do fio, tem uma corrente I_2 . Achar a força magnética sobre o segmento horizontal superior do circuito, que está entre $x = a$ e $x = a + b$.

Solução Neste problema talvez você não resista à tentação de usar a Eq. 30.13 para obter a força. No entanto, este resultado só se aplica a dois fios paralelos, e não pode ser adotado aqui. A abordagem correta consiste em principiar com a força sobre um pequeno segmento do condutor, dado por $d\vec{F} = I_2 d\vec{s} \times \vec{B}$ (Eq. 29.6), onde, nesse caso, $I = I_2$, e \vec{B} é o campo magnético da corrente no fio retilíneo, na posição do segmento de comprimento ds . Pela lei de Ampère, o campo magnético, à distância x do fio retilíneo, é dado por

$$B = \frac{\mu_0 I_1}{2\pi x} (-k)$$

onde o campo está dirigido da frente para trás da página, conforme mostra a notação do vetor unitário $(-k)$. Tomando o elemento de comprimento do segmento como $ds = dx \vec{i}$, encontramos

$$d\vec{F} = I_2 (\vec{i} dx) \times \vec{B}$$

$$d\vec{F} = \frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi x} [\vec{i} \times (-k)] dx = \frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi} \frac{dx}{x} \vec{j}$$

Integrando essa expressão entre os limites $x = a$ e $x = a + b$, temos

$$\vec{F} = \frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi} \ln x \Big|_a^{a+b} \vec{j} = \frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi} \ln \left(1 + \frac{b}{a} \right) \vec{j}$$

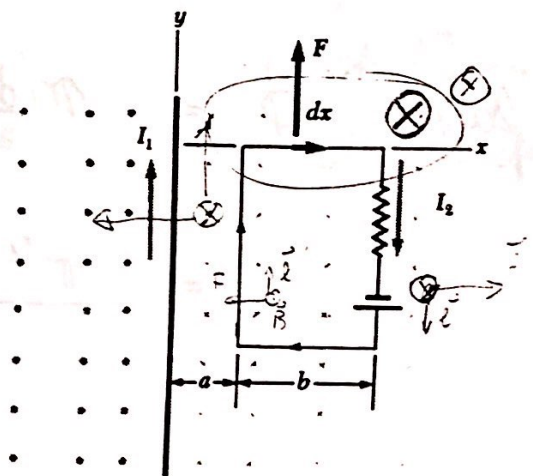


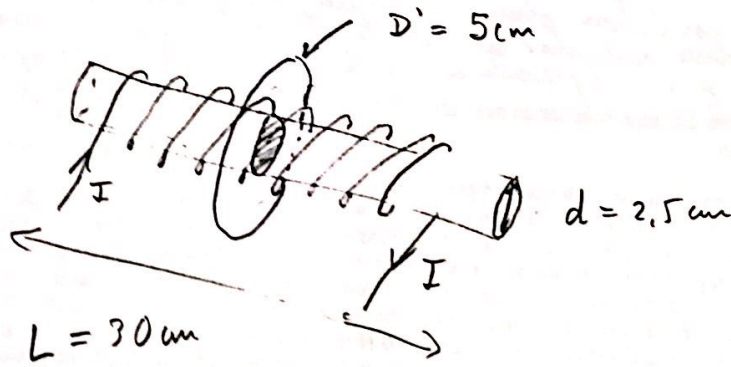
Fig. 30.13 (Exemplo 30.7).

A força está dirigida para cima, conforme o vetor unitário \vec{j} , e tal qual aparece na Fig. 30.13.

Exercício 3 Qual a força no segmento horizontal inferior do circuito?

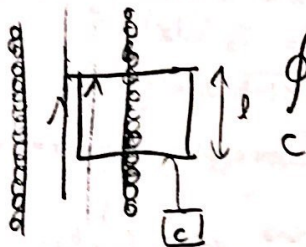
Resposta A força tem o mesmo módulo que a força no segmento horizontal superior, mas está dirigida para baixo.

30.38



$N = 300$ espiras $I = 12$ A

Calcular o fluxo de B através do disco



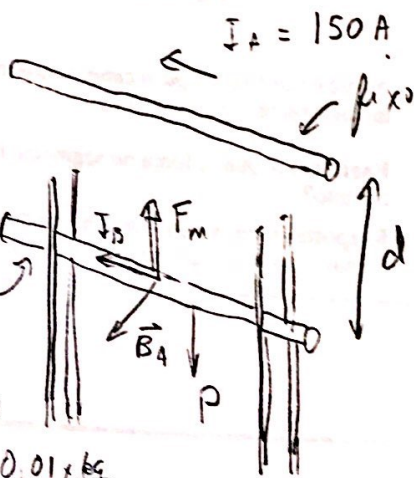
$$\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{s} = \mu_0 I_{\text{total}} \Rightarrow B l = \mu_0 \frac{N}{L} l I$$

$$B = \frac{\mu_0 N I}{L}$$

fluxo $\phi_m = \pi \left(\frac{d}{2}\right)^2 B = \frac{\pi d^2 \mu_0 N I}{4 L}$

$$= \frac{\pi^2 d^2 10^{-7} N I}{L} = 7,4 \times 10^6 \text{ Wb}$$

30.63



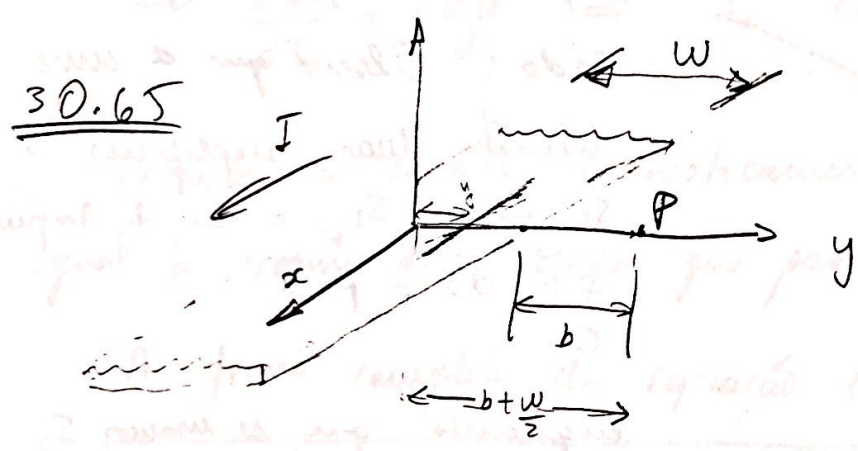
$$\lambda = 0,10 \frac{\text{g}}{\text{cm}} = 0,1 \times 10^{-3} = 0,01 \times \frac{\text{kg}}{\text{m}}$$

A força resultante em B por unidade de comprimento

$$\frac{F_R}{l} = \frac{\mu_0 I_A I_B}{2\pi d}$$

A força se anula quando I_B for

$$I_B = \frac{\lambda g 2\pi d}{\mu_0 I_A} = \frac{10^{-2} \times 9,8 \times 2\pi \times 25 \times 10^{-2}}{\frac{4\pi \cdot 10^{-7}}{2} \cdot 150} \approx 82 \text{ A}$$



Ache B no plano da fita a uma distância b da borda

$$B 2\pi r = \mu_0 I'$$

$$B = \frac{\mu_0 I'}{2\pi r}$$

Dividindo a fita em tiras de largura dy , em cada tira passa uma corrente $I \frac{dy}{w}$

$$dB = \frac{\mu_0 I dy}{2\pi w r} \Rightarrow B_p = \int_{-\frac{w}{2}}^{\frac{w}{2}} \frac{\mu_0 I dy}{w 2\pi (b + \frac{w}{2} - y)}$$

$$B_p = -\frac{\mu_0 I}{2\pi w} \ln \left[\frac{b}{b+w} \right] \Rightarrow \vec{B}_p = \frac{\mu_0 I}{2\pi w} \ln \left[\frac{b+w}{b} \right] \hat{e}_z$$

Correntes de deslocamento e lei de Ampère generalizada

107

A lei de Ampère:

$$\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{s} = \mu_0 I$$

onde I é a corrente através de qualquer superfície limitada por C
só vale para correntes estacionárias. Se I varia com o tempo
é necessário acrescentar outro termo. De fato, considere o

capacitor de placas paralelas ao

lado. Observe que a curva C

delimita duas superfícies: S_1 e S_2

Se usamos S_1 , a lei de Ampère fornece

$$\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{s} = \mu_0 I$$

enquanto que se usamos S_2

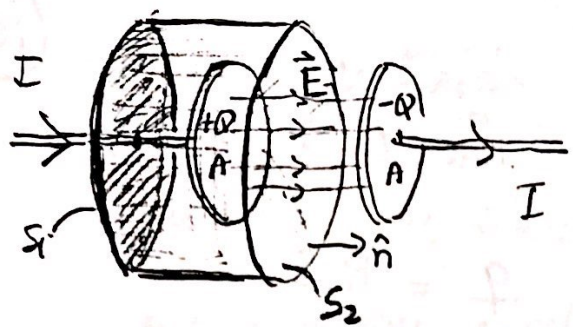
$$\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{s} = 0,$$

uma vez que nenhuma corrente atravessa a superfície S_2 .

Maxwell foi o primeiro a perceber esta limitação e propôs acrescentar ao lado direito da equação o termo

$$\mu_0 I_d \equiv \mu_0 \epsilon_0 \frac{d\phi_e}{dt},$$

onde ϕ_e é o fluxo do campo elétrico através de uma superfície limitada por C



Usando S1

A corrente que passa pelo fio

$$I = \frac{dQ}{dt} \quad (\text{capacitor carregando})$$

onde Q é a carga no capacitor.

Usando S2

$$\Phi_e = \int_{S_2} \vec{E} \cdot d\vec{A} = \underbrace{E}_{\frac{\sigma}{\epsilon_0}} A = \frac{Q}{\epsilon_0}$$

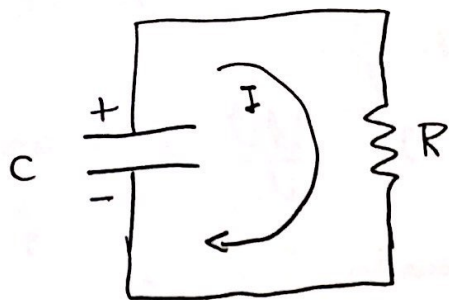
$$\Rightarrow \frac{d\Phi_e}{dt} = \frac{1}{\epsilon_0} \frac{dQ}{dt} \Rightarrow I_d = \epsilon_0 \frac{d\Phi_e}{dt} = \frac{dQ}{dt}$$

Portanto, a corrente de deslocamento é exatamente igual à corrente de condução que passa por S1

A forma completa da equação é portanto

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{S} = \mu_0 (I + I_d) = \mu_0 I + \mu_0 \epsilon_0 \frac{d\Phi_e}{dt}$$

Observe que os campos magnéticos são produzidos não só pelas correntes de condução, mas também pelos campos elétricos variáveis.



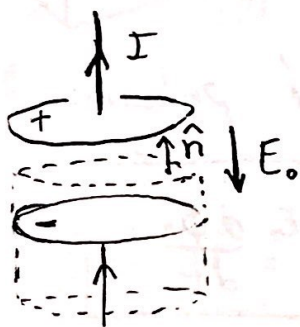
Em $t=0$, $q = Q_0$

$$\frac{q}{C} = R I$$

Para o capacitor descarregando $I = -dq/dt$

$$\frac{q}{C} = -R \frac{dq}{dt} \Rightarrow \frac{dq}{dt} = -\frac{1}{RC} q$$

$$q(t) = Q_0 e^{-\frac{t}{RC}} \Rightarrow \boxed{I = -\frac{dq}{dt} = \frac{Q_0}{RC} e^{-\frac{t}{RC}}}$$



$$E_0 = \frac{\sigma}{\epsilon_0} = \frac{q}{\epsilon_0 A}; \quad \phi_e = \int \frac{q}{\epsilon_0}$$

$$I_d = \epsilon_0 \frac{d\phi_e}{dt} = -\epsilon_0 \frac{1}{\epsilon_0} \frac{dq}{dt} = -\frac{dq}{dt} = I$$

$$\Rightarrow \boxed{I_d = I = \frac{Q_0}{RC} e^{-\frac{t}{RC}}}$$