Física III para a Engenharia (4323203)

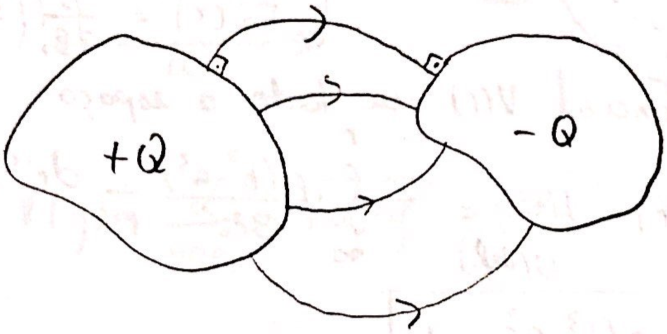
Notas de Aula – 2015

Carlos E I. Carneiro

C. E. CARNEIRO

Capacitância

Capacitor é constituído por dois condutores com cargas iguais e opostas, com uma diferença de potencial V entre eles.



Capacitância

$$C \equiv \frac{|Q|}{|V|}$$

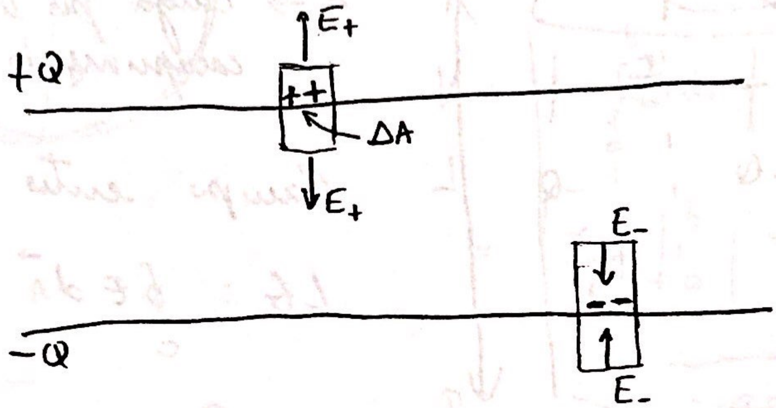
mede a quantidade de carga armazenado por volt.

Unidade: $\frac{\text{coulomb}}{\text{volt}}$ = farad (F) $\Leftrightarrow$ $\frac{C}{V} \equiv F$

Em dispositivos eletrônicos a capacitância típica varia de microfarad ($1\mu F = 10^{-6} F$) ao picofarad ($1 pF = 1 \mu\mu F = 10^{-12} F$).

Exemplos de Capacitores

(1) Capacitor de placas planas paralelas com área A.



Usando a lei de Gauss

$$\oint \vec{E}\cdot d\vec{A} = \frac{Q}{\varepsilon_0} \longrightarrow E_+ 2\cancel{\Delta A} = \frac{\sigma \cancel{\Delta A}}{\varepsilon_0} \Rightarrow E_+ = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}$$

Analogamente, a placa negativa produz na região entre as placas um campo E_- com a mesma direção de E_+

$$E_- = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}$$

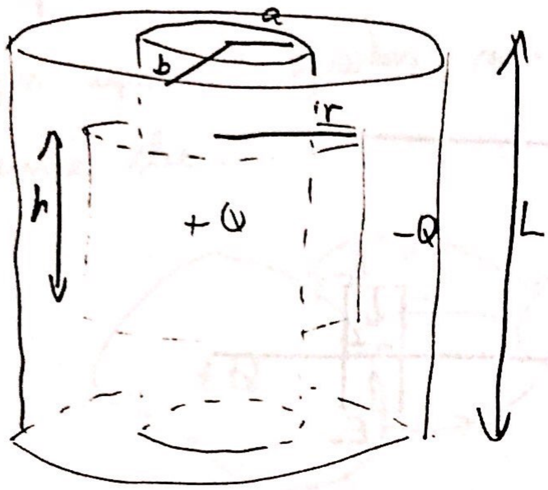
O campo total

$$E = E_+ + E_- = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}$$

$$\Longrightarrow \boxed{C = \frac{|Q|}{|V|} = \frac{\sigma A}{E d} = \frac{\sigma A}{\frac{\sigma}{\varepsilon_0} d} = \frac{\varepsilon_0 A}{d}}$$

C. E. CARNEIRO

(2) Capacitor Cilíndrico



$\lambda \to$ carga por unidade de comprimento

Campo entre as placas

LG: $\oint_C E\, d\vec{A} = \frac{Q_{in}}{\varepsilon_0}$

$$E\, 2\pi r \cancel{h} = \frac{\lambda \cancel{h}}{\varepsilon_0}$$

$$\Longrightarrow \quad E = \frac{\lambda}{2\pi \varepsilon_0 r}$$

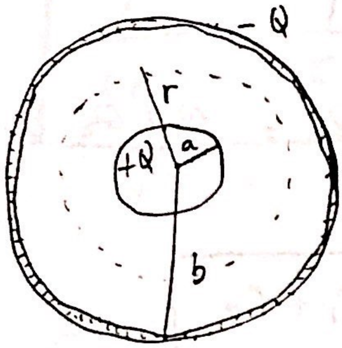
d.d.p entre as placas

$$V_{ba} = -\int_a^b E\, dr = -\int_a^b \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\frac{dr}{r} = \frac{-\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\ln\left(\frac{b}{a}\right)$$

$$\boxed{C = \frac{Q}{|V_{ab}|} = \frac{\cancel{\lambda} L}{\frac{\cancel{\lambda}}{2\pi\varepsilon_0}\ln\left(\frac{b}{a}\right)} = \frac{2\pi\varepsilon_0 L}{\ln\left(\frac{b}{a}\right)}}$$

A capacitância por unidade de comprimento é $\boxed{\frac{C}{L} = \frac{2\pi\varepsilon_0}{\ln\left(\frac{b}{a}\right)}}$

(3) Capacitor Esférico



Na região $a < r < b$

$$E = \frac{kQ}{r^2}$$

$$V = \left| -\int_a^b E\, dr \right| = \left| -\int_a^b \frac{kQ}{r^2} dr \right|$$

$$= \left| \frac{kQ}{r} \Big|_a^b \right| = \frac{kQ(b-a)}{ab}$$

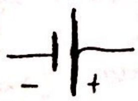
$$\boxed{C = \frac{Q}{V} = \frac{\cancel{Q}}{\frac{k\cancel{Q}(b-a)}{ab}} = \frac{ab}{k(b-a)}}$$

Podemos tomar o limite $b \to \infty$ e definir a capacitância de uma esfera.

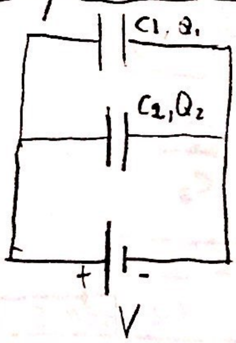
Combinação de Capacitores

Símbolos:

 $\equiv$ capacitor

 $\equiv$ bateria

Capacitores em paralelo:

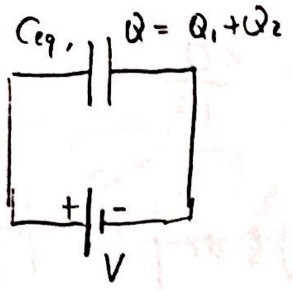


Neste caso é evidente que a voltagem é a mesma nos dois capacitores.

Podemos substituir os dois capacitores

C.E.CARNEIRO

por um outro que armazena a mesma carga $Q = Q_1 + Q_2$ sob a d.d.p de V volts.



$$C_{eq} = \frac{Q}{V} = \frac{Q_1 + Q_2}{V} = \frac{C_1 V + C_2 V}{V}$$

$$\Longrightarrow \boxed{C_{eq} = C_1 + C_2}$$

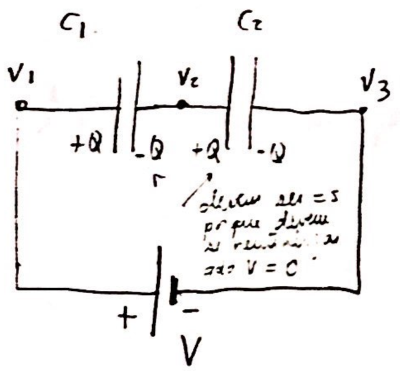
PARALELO

Para N capacitores em <u>paralelo</u>

$$\boxed{C_{eq} = C_1 + C_2 + \dots C_N}$$

PARALELO

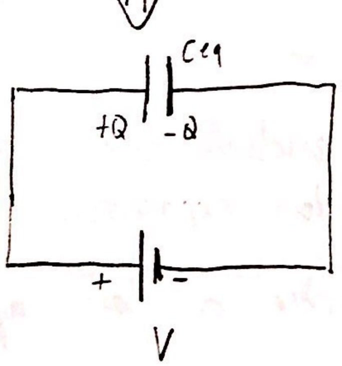
Capacitores em série



Neste caso a carga dos capacitores deve ser a mesma em todos eles

O capacitor equivalente deve armazenar a mesma carga Q sob a mesma ddp

$\Updownarrow$



Note que

$$V = \underbrace{V_1 - V_2} + \underbrace{V_2 - V_3}$$

$$\frac{Q}{C_{eq}} = \frac{Q}{C_1} + \frac{Q}{C_2}$$

$$\Longrightarrow \boxed{\frac{1}{C_{eq}} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}}$$

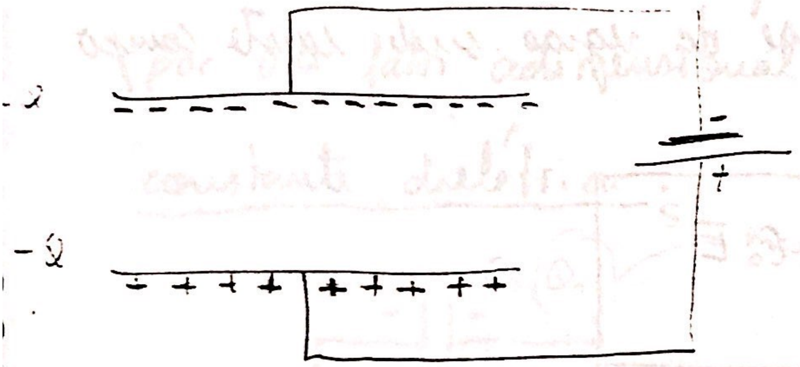
SÉRIE

Para N capacitores em série

$$\boxed{\frac{1}{C_{eq}} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \dots + \frac{1}{C_N}}$$

SÉRIE

Energia em um capacitor carregado.



A energia armazenada é igual ao trabalho da bateria para carregar o capacitor

$$dW = V\,dq = \frac{q}{C}\,dq$$

$q = CV$

$$\Longrightarrow \quad W = \int_0^Q \frac{q}{C}\,dq = \frac{1}{2C}Q^2$$

$$\boxed{U = W = \frac{Q^2}{2C} = \frac{1}{2}QV = \frac{1}{2}CV^2}$$

Este resultado é válido para qualquer capacitor.

Para um capacitor plano

$$C = \frac{\varepsilon_0 A}{d} \quad , \quad V = Ed$$

$$\Rightarrow \quad U = \frac{1}{2} C V^2 = \frac{1}{2} \frac{\varepsilon_0 A}{d} d^2 E^2 = \frac{1}{2} \varepsilon_0 A d E^2$$

Mas $Ad \equiv$ volume da região onde existe campo

$$\Rightarrow \quad \boxed{u = \frac{U}{Ad} = \frac{1}{2} \varepsilon_0 E^2}$$

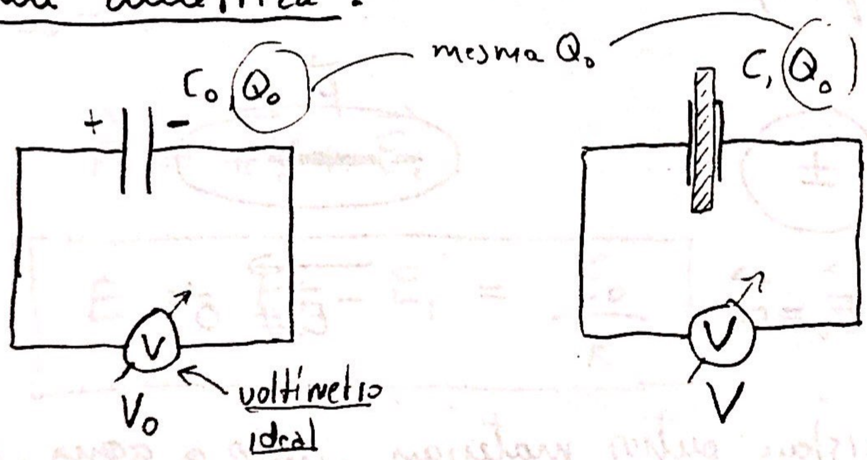
densidade de energia

Apesar de ter sido deduzida para um capacitor plano, vale em geral.

Capacitores com dielétricos

Dielétrico : material não condutor, como borracha, vidro, papel encerado, etc

Verifica-se que inserindo um material dielétrico entre as placas de um capacitor a capacitância aumenta por um fator adimensional $k > 1$, chamado constante dielétrica.



$$V = \frac{V_0}{k} \implies C = \frac{Q_0}{V} = \frac{Q_0}{\frac{V_0}{k}} = k C_0$$

↑ experimental

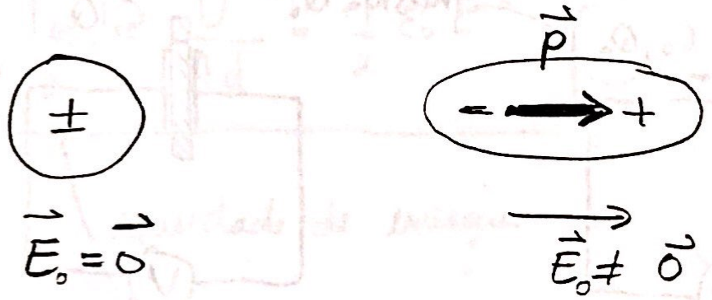
$$C = k C_0 > C_0$$

Para a voltagem diminuir é necessário que o campo elétrico diminua. Vamos estudar como isto ocorre.

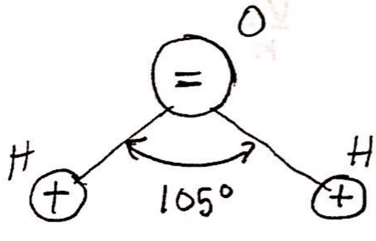
C.B. CARNEIRO

Descrição atômica dos dielétricos

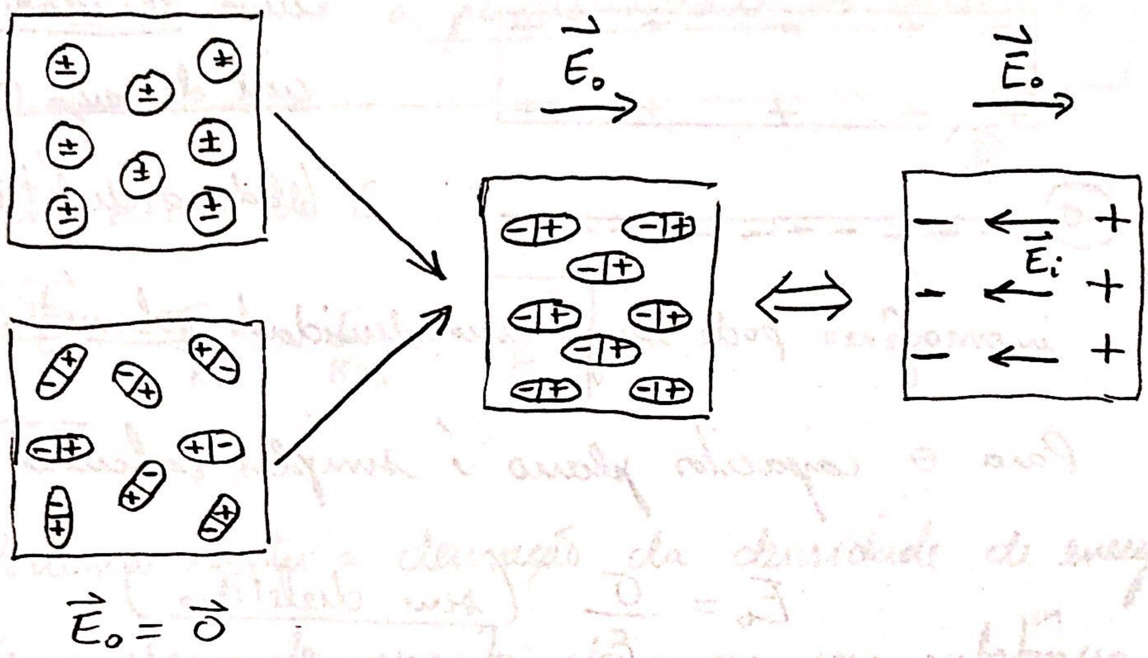
Sob a presença de um campo elétrico, moléculas apolares (sem momento de dipolo elétrico) podem desenvolver um momento de dipolo. Isto ocorre porque sob a ação do campo o centro das cargas negativas pode não mais coincidir com o das cargas positivas.



Existem outros materiais, como a água, com moléculas polares (com momento de dipolo, mesmo a campo nulo).



Os momentos momentos de dipolo tendem a se alinhar com o campo. Assim, no caso de moléculas polares, da mesma forma que ocorre com moléculas apolares, os momentos de dipolo se alinham com o campo e provocam uma diminuição do campo interno.

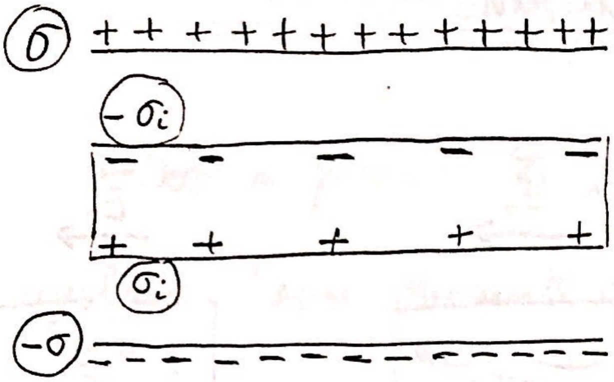


$$\vec{E} = \vec{E}_0 + \vec{E}_i$$

$$\boxed{E = E_0 - E_i = \frac{E_0}{k}}$$

O campo é reduzido de um fator $k > 1$

Vamos analisar mais quantitativamente o que ocorre no caso do capacitor plano.



Observe que aparece uma densidade superficial de carga σ_i no dielétrico (o dielétrico é inomogêneo pode surgir uma densidade volumétrica de carga)

Para o capacitor plano é simples calcular σ_i

$$E_0 = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} \quad (\text{sem dielétrico})$$

Dentro do dielétrico

$$\left.\begin{aligned} E &= \frac{E_0}{K} = \frac{\sigma}{K\varepsilon_0} \\ E &= E_0 - E_i = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} - \frac{\sigma_i}{\varepsilon_0} \end{aligned}\right\} \Longrightarrow$$

$$\frac{\sigma}{K\varepsilon_0} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} - \frac{\sigma_i}{\varepsilon_0} \Longrightarrow \boxed{\sigma_i = \left(\frac{k-1}{k}\right)\sigma}$$

Se não há material dielétrico $k=1$ e $\sigma_i = 0$. Se $K \gg 1$, $\sigma_i \approx \sigma$ e o campo dentro do dielétrico $E \approx 0$.

O produto

$$\boxed{k\varepsilon_0 \equiv \varepsilon \quad \text{é a \underline{permissividade do dielétrico}}}$$

Em termos de ε

$$\boxed{E = \frac{E_0}{k} = \frac{\sigma}{k\varepsilon_0} = \frac{\sigma}{\varepsilon}}$$

Podemos repetir a derivação da densidade de energia entre as placas do capacitor cheio com uma substância dielétrica. Lembrando que $C = kC_0$, mostre que

$$\boxed{u = \frac{1}{2}k\varepsilon_0 E^2 = \frac{1}{2}\varepsilon E^2}$$

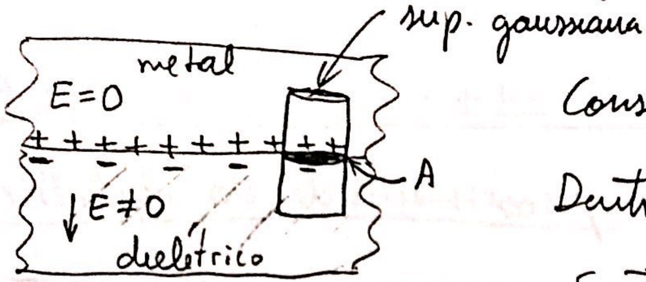
campo no dielétrico

Lei de Gauss em Dielétricos

Vamos fazer uma derivação elementar de outra forma da LG na presença de dielétricos. A lei de Gauss

$$\oint_S \vec{E}\cdot d\vec{A} = \frac{Q_{in}}{\varepsilon_0}$$

vale sempre desde que $\vec{E}$ seja o campo total e Q_{in} a carga total incluindo cargas de polarização, dentro da superfície S.



Consideremos o capacitor plano

Dentro da placa metálica $E=0$

$$\oint_S \vec{E}\cdot d\vec{A} = \frac{Q_{in}}{\varepsilon_0}$$

$$\Rightarrow \quad EA = \frac{(\sigma - \sigma_i)A}{\varepsilon_0}$$

Já mostramos que $\sigma_i = \sigma\left(1-\frac{1}{k}\right) \Leftrightarrow \sigma - \sigma_i = \frac{\sigma}{k}$ $\Rightarrow$

$$\Rightarrow \quad EA = \frac{\sigma A}{k\varepsilon_0} \Leftrightarrow \boxed{\varepsilon_0 k E A = \sigma A}$$

Observe que na última expressão aparece somente a densidade de carga livre σ, livramo-nos de σ_i.

Voltando à forma integral obtemos

$$\boxed{\oint_S \varepsilon_0 k \vec{E}\cdot d\vec{A} = Q_{in\text{-}livre}}$$

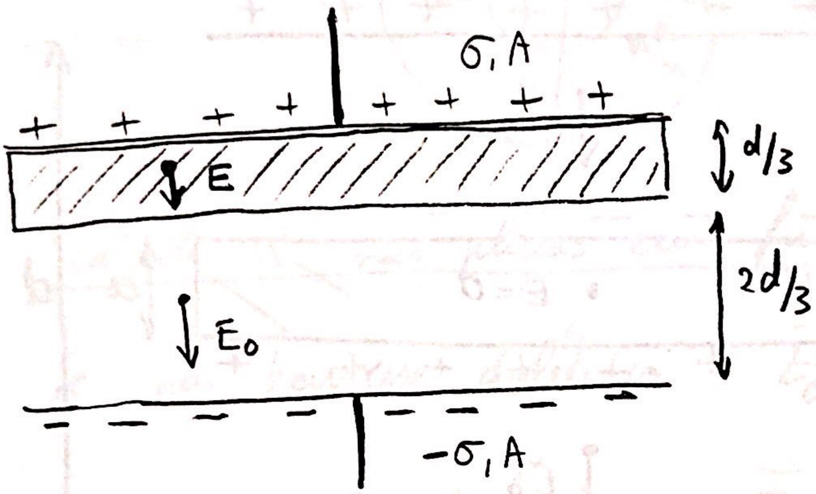
O vetor

$\boxed{\varepsilon_0 k \vec{E} = \varepsilon \vec{E} = \vec{D} \text{ é o vetor deslocamento elétrico}}$

$$\boxed{\oint_S \vec{D}\cdot d\vec{A} = Q_{in\text{-}livre}}$$, as fontes de $\vec{D}$ são as cargas livres

Aplicações

(a) Capacitor parcialmente cheio



$$E_0 = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} \quad , \quad E = \frac{E_0}{k} = \frac{\sigma}{k\varepsilon_0}$$

$$|V| = \frac{d}{3}\frac{\sigma}{k\varepsilon_0} + \frac{2d}{3}\frac{\sigma}{\varepsilon_0}$$

$$C = \frac{|Q|}{|V|} = \frac{\cancel{\sigma} A}{\cancel{\sigma}\frac{d}{3\varepsilon_0}\left(\frac{1}{k}+2\right)} = \frac{3k}{2k+1}\frac{\varepsilon_0 A}{d}$$

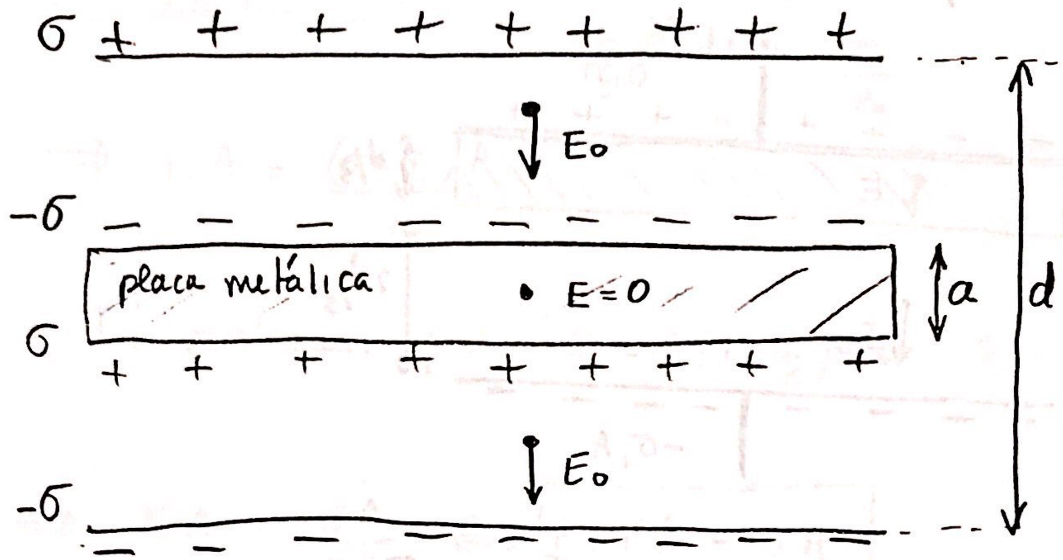
Se não houvesse dielétrico, $k=1$ e

$$C = \frac{\varepsilon_0 A}{d} \equiv C_0$$

e recuperamos a capacitância de um capacitor de placas planas paralelas.

C.E. CARNEIRO

(b) Efeito de uma chapa metálica



Para o campo ser nulo dentro da chapa metálica a densidade de carga induzida na superfície superior é σ e na superfície inferior −σ.

$$E_0 = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} \Rightarrow V = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}(d-a)$$

$$\boxed{C = \frac{|Q|}{|V|} = \frac{\sigma A}{\frac{\sigma}{\varepsilon_0}(d-a)} = \frac{\varepsilon_0 A}{d-a}}$$

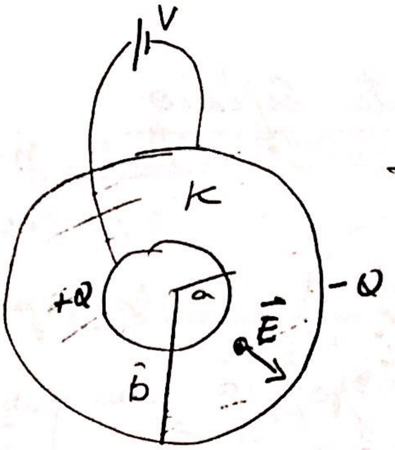
Note que
$$\frac{1}{C} = \frac{1}{\frac{\varepsilon A}{d-a}} = \frac{1}{2}\frac{1}{\frac{\varepsilon A}{d-a}} + \frac{1}{2}\frac{1}{\frac{\varepsilon A}{d-a}}$$

$$= \frac{1}{\frac{\varepsilon A}{\frac{d-a}{2}}} + \frac{1}{\frac{\varepsilon A}{\frac{d-a}{2}}} \Longleftrightarrow$$  .

C. E. CARNEIRO

P2_2000

Capacitor esférico



(a) Calcule Q nas placas em função de V

Se não houvesse dielétrico $\vec{E_0} = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{Q}{r^2}\hat{e}_r$

Na presença de dielétrico $\vec{E} = \dfrac{\vec{E_0}}{k}$

$$V = -\int_a^b \vec{E}\cdot d\vec{r} = \frac{-Q}{4\pi\varepsilon_0 k}\int_a^b \frac{dr}{r^2} = \frac{+Q}{4\pi\varepsilon_0 k}\left(\frac{1}{b} - \frac{1}{a}\right)$$

$$|V| = \frac{Q(b-a)}{4\pi\varepsilon_0 k\, ba} \Rightarrow \boxed{Q = \frac{4\pi\varepsilon_0 k\, ba}{b-a}|V|}$$

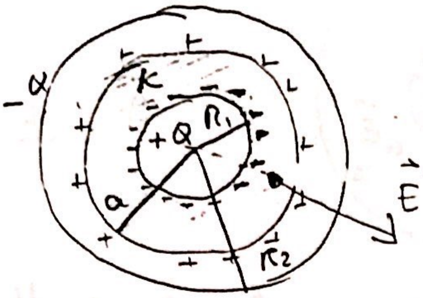
(b) Calcule a energia armazenada no capacitor

$$U = \frac{1}{2}CV^2 = \frac{1}{2}\frac{Q}{V}V^2 = \frac{1}{2}QV$$

$$\boxed{U = \frac{2\pi\varepsilon_0 k\varepsilon_0}{b-a}V^2}$$

C. E. CARNEIRO

P2_2001 Capacitor Esférico



(a) Calcule $\vec{E}$ entre as placas do capacitor ($R_1 < r < R_2$)

$$\vec{E} = \begin{cases} \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0 k}\dfrac{Q}{r^2}\hat{e}_r, & R_1 < r < a \\ \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{Q}{r^2}\hat{e}_r, & a < r < R_2 \end{cases}$$

(b) Determine a carga de polarização na superfície do dielétrico

$$E = E_0 - E_i = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{r^2} - \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q_i}{r^2}$$

$$E = \frac{E_0}{k} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0 k}\frac{Q}{r^2}$$

Igualando as duas expressões

$$\frac{Q}{k} = Q - Q_i \Rightarrow Q_i = \left(\frac{k-1}{k}\right)Q$$

(c) Calcule a capacitância

$$C = \frac{Q}{V}$$

$$V = -\int \vec{E}\cdot d\vec{s} = -\int_{R_1}^{a}\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 k r^2}dr - \int_{a}^{R_2}\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}dr$$

$$= \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{1}{ka} - \frac{1}{kR_1} + \frac{1}{R_2} - \frac{1}{a}\right] \Rightarrow C = \frac{4\pi\varepsilon_0}{\left[\frac{1}{ka} - \frac{1}{kR_1} + \frac{1}{R_2} - \frac{1}{a}\right]}$$