ENERGIA ELETROSTÁTICA DE UMA CASCA ESFÉRICA

METODO I

$$U = \frac{1}{2}\int \rho(\mathbf{r})\, V(\mathbf{r})\, d^3r = \frac{1}{2}\int_S \sigma(\mathbf{r})\, V(\mathbf{r})\, dS$$

O potencial de uma casca esférica de raio R é

$$V(r) = \begin{cases} \dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{1}{R} & r \leq R \\[2ex] \dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{1}{r} & r > R \end{cases}$$

Nesse caso a casca esférica é tambem uma superfície equipotencial

$$U = \frac{1}{2} QV = \frac{Q^2}{8\pi\varepsilon_0}\frac{1}{R}$$

METODO II

$$U = \frac{1}{2}\varepsilon_0 \int E^2(\mathbf{r})\, d^3r$$

O campo elétrico de uma casca esférica de raio R é

$$E(r) = \begin{cases} 0 & r < R \\[2ex] \dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{1}{r^2} & r > R \end{cases}$$

$$U = \frac{1}{2}\varepsilon_0 \frac{Q^2}{16\pi^2\varepsilon_0}\int_R^{+\infty} \frac{4\pi r^2 dr}{r^4} = \frac{Q^2}{8\pi\varepsilon_0}\int_R^{+\infty}\frac{dr}{r^2}$$

$$U = \frac{Q^2}{8\pi\varepsilon_0}\left(-\frac{1}{r}\right)\Big|_0^R = \frac{Q^2}{8\pi\varepsilon_0}\frac{1}{R}$$

$$\boxed{U = \frac{1}{2}\frac{Q^2}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{R}}$$

ENERGIA ELETROSTÁTICA DE UMA ESFERA HOMOGÊNEA DE CARGA

$\boxed{\text{METODO I}}$

$$U = \frac{1}{2}\int \rho(\mathbf{r})\, V(\mathbf{r})\, d^3r$$

O potencial de uma esfera homogênea de carga de raio R é

$$V(r) = \begin{cases} \dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{1}{R}\left(\dfrac{3}{2} - \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{r}{R}\right)^2\right) & r \leq R \\[2ex] \dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{1}{r} & r > R \end{cases}$$

Portanto o cálculo de U é

$$U = \frac{1}{2}\int_0^R \frac{Q}{\frac{4}{3}\pi R^3}\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{R}\left(\frac{3}{2} - \frac{1}{2}\left(\frac{r}{R}\right)^2\right) 4\pi r^2 dr =$$

$$= \frac{3}{2}\frac{Q^2}{4\pi\varepsilon_0}\int_0^R \left(\frac{3}{2}\frac{r^2}{R^4}dr - \frac{1}{2}\frac{r^4}{R^6}dr\right) =$$

$$= \frac{3}{2}\frac{Q^2}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{2}\frac{r^3}{R^4}\Big|_0^R - \frac{1}{10}\frac{r^5}{R^6}\Big|_0^R\right) =$$

$$= \frac{3}{2}\frac{Q^2}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{10}\right)\frac{1}{R} = \frac{3}{2}\frac{4}{10}\frac{Q^2}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{R}$$

$$= \frac{3}{5}\frac{Q^2}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{R}$$

METODO II

$$U = \frac{1}{2}\varepsilon_0 \int E^2(r)\, d^3r$$

O campo elétrico de uma esfera homogênea de carga de raio R é

$$E(r) = \begin{cases} \dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{r}{R^3} & r \leq R \\[2ex] \dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{1}{r^2} & r > R \end{cases}$$

Portanto o cálculo de U é

$$U = \frac{1}{2}\varepsilon_0\left(\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\right)^2\left[\int_0^R \frac{r^2}{R^6}4\pi r^2 dr + \int_R^{+\infty}\frac{1}{r^4}4\pi r^2 dr\right]$$

$$= \frac{1}{2}\frac{Q^2}{4\pi\varepsilon_0}\left[\int_0^R \frac{r^4}{R^6}dr + \int_R^{+\infty}\frac{1}{r^2}dr\right] =$$

$$= \frac{1}{2}\frac{Q^2}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{5}\frac{r^5}{R^6}\Big|_0^R - \frac{1}{r}\Big|_R^{+\infty}\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\frac{Q^2}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{R}\left(\frac{1}{5}+1\right) = \frac{1}{2}\frac{6}{5}\frac{Q^2}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{R}$$

$$\boxed{U = \frac{3}{5}\frac{Q^2}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{R}}$$

RAIO CLÁSSICO DO ELÉTRON

No caso de uma casca esférica ou uma esfera homogênea de carga, a ordem de grandeza da energia eletrostática é

$$U \sim \frac{Q^2}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{R}$$

Essa energia diverge num modelo clássico do elétron como uma partícula realmente puntiforme $R \to 0$.

O raio clássico é o raio para o qual a energia eletrostática é a massa repouso do elétron (usando a relação de Einstein $E = mc^2$).

CONSTANTE DE ESTRUTURA FINA

$$\boxed{\alpha = \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{\hbar c}}$$

$$m_e c^2 = \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{r_0}$$

$$r_0 = \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{m_e c^2} = \frac{\hbar c \alpha}{m_e c^2}$$

$$\boxed{r_0 = \frac{\hbar c \alpha}{m_e c^2}} \qquad r_0 = \frac{193.7 \text{ MeV} \cdot \text{fm}}{0.511 \text{ MeV} \;\; 137} = 2.8 \text{ fm}$$

Essa configuração não é estável sem o auxílio de uma outra força de natureza não electromagnética.