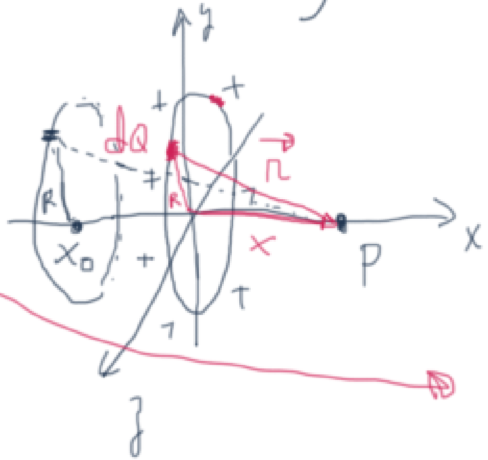
23.90 Uma casca cilíndrica isolante, com raio R e comprimento L (como o tubo de papelão de um rolo de papel higiênico), possui uma carga Q uniformemente distribuída sobre sua superfície. (a) Calcule o potencial elétrico em todos os pontos ao longo do eixo do cilindro. Faça a origem do sistema de coordenadas coincidir com o centro do tubo cilíndrico e considere igual a zero o potencial no infinito. (b) Mostre que, quando $L << R$, o potencial da parte (a) se reduz ao potencial de um anel carregado com raio R (veja o Exemplo 23.11 na Seção 23.3). (c) Use o resultado da parte (a) para determinar o campo elétrico em todos os pontos ao longo do eixo do cilindro.

$$V = \int dV = \int \frac{k\,dQ}{r} = \dots$$

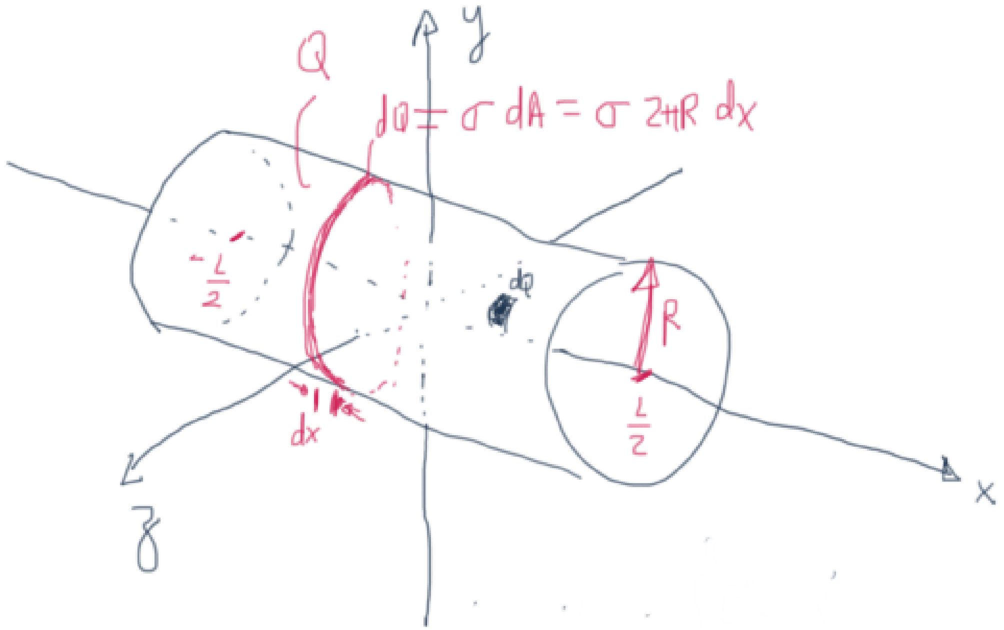


$$\lambda = \frac{Q}{L}$$

$$V = \int_{fio} \frac{k\lambda\,dl}{\sqrt{R^2+x^2}} = \frac{k\lambda}{\sqrt{R^2+x^2}} \int_{fio} dl = \frac{k\lambda L}{\sqrt{R^2+x^2}} = \frac{kQ}{\sqrt{R^2+x^2}}$$

Se a espira não está na origem:

$$\boxed{V = \frac{kQ}{\sqrt{R^2+(x-x_0)^2}}}$$



$$V = \int \frac{k\,dQ}{\sqrt{R^2+(x-x_0)^2}} = \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} \frac{k\sigma 2\pi R\,dx}{\sqrt{R^2+(x-x_0)^2}} = k\sigma 2\pi R \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} \frac{1}{\sqrt{R^2+(x-x_0)^2}}\,dx =$$

$$= \left| \begin{array}{l} u = x - x_0 \\ du = dx \\ x = -\frac{L}{2} \to u = -\frac{L}{2} - x_0 \\ x = \frac{L}{2} \to u = \frac{L}{2} - x_0 \end{array} \right| = k\sigma 2\pi R \int_{-\frac{L}{2}-x_0}^{\frac{L}{2}-x_0} \frac{1}{\sqrt{R^2+u^2}}\,du =$$

$$\frac{Q}{A} = \sigma = \frac{dQ}{dA}$$

$$= k\sigma 2\pi R \left[\ln\left(\sqrt{R^2+u^2} + u\right) \right]_{-\frac{L}{2}-x_0}^{\frac{L}{2}-x_0} =$$

$$= k\sigma\, 2\pi R \left[\ln\left(\sqrt{R^2+u^2}+u\right)\right]_{-\frac{L}{2}-x_0}^{\frac{L}{2}-x_0}$$

$$-\frac{L}{2}-x_0 = -\left(\frac{L}{2}+x_0\right)$$

$$\frac{Q}{A} = \frac{Q}{2\pi R L}$$

$$= k\sigma\, 2\pi R \left[\ln\left(\sqrt{R^2+\left(\frac{L}{2}-x_0\right)^2}+\frac{L}{2}-x_0\right) - \ln\left(\sqrt{R^2+\left(\frac{L}{2}+x_0\right)^2}-\left(\frac{L}{2}+x_0\right)\right)\right.$$

$$\boxed{= \frac{kQ}{L} \ln\left[\frac{\sqrt{R^2+\left(\frac{L}{2}-x_0\right)^2}+\left(\frac{L}{2}-x_0\right)}{\sqrt{R^2+\left(\frac{L}{2}+x_0\right)^2}-\left(\frac{L}{2}+x_0\right)}\right]}$$

b) $R \gg \overset{2a}{L}$

$$V = \frac{kQ}{2a} \ln\left[\frac{\sqrt{R^2+(a-x_0)^2}+(a-x_0)}{\sqrt{R^2+(a+x_0)^2}-(a+x_0)}\right] =$$

$$= \frac{kQ}{2a} \ln\left[\frac{\sqrt{R^2+\cancel{a^2}^{\,0}-2ax_0+x_0^2}+(a-x_0)}{\sqrt{R^2+\cancel{a^2}^{\,0}+2ax_0+x_0^2}-(a+x_0)}\right]$$

$$\simeq \frac{kQ}{2a} \ln\left[\frac{\sqrt{R^2+x_0^2-2ax_0}+(a-x_0)}{\sqrt{R^2+x_0^2+2ax_0}-(a+x_0)}\right]$$

$$= \frac{kQ}{2a} \ln\left[\frac{\sqrt{(R^2+x_0^2)\left(1-\cancel{\frac{2ax_0}{R^2+x_0^2}}^{\,\simeq 0}\right)}+(a-x_0)}{\sqrt{(R^2+x_0^2)\left(1+\cancel{\frac{2ax_0}{R^2+x_0^2}}^{\,\simeq 0}\right)}-(a+x_0)}\right]$$

$$\simeq \frac{kQ}{2a} \ln\left[\frac{\sqrt{R^2+x_0^2}+(a-x_0)}{\sqrt{R^2+x_0^2}-(a+x_0)}\right]$$

$\ln(1 \pm x) \simeq \pm x$, $x \sim$ pequeno

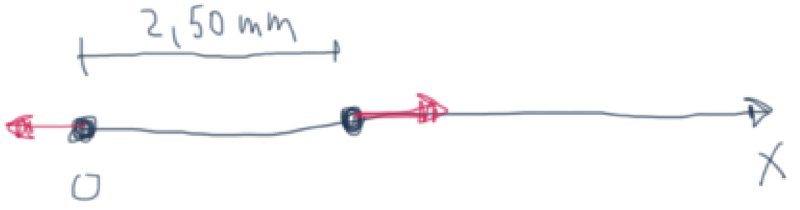
$$= \frac{kQ}{2a} \ln\left[\frac{1+\frac{(a-x_0)}{\sqrt{R^2+x_0^2}}}{1-\frac{(a+x_0)}{\sqrt{R^2+x_0^2}}}\right] =$$

$$= \frac{KQ}{2a}\left[\underbrace{\ln\left(1+\frac{(a-x_0)}{\sqrt{R^2+x_0^2}}\right)}_{\approx \frac{a-x_0}{\sqrt{R^2+x_0^2}}} - \underbrace{\ln\left(1-\frac{(a+x_0)}{\sqrt{R^2+x_0^2}}\right)}_{\approx -\frac{(a+x_0)}{\sqrt{R^2+x_0^2}}} \right]$$

$$\cong \frac{KQ}{2a}\left(\frac{a \cancel{-x_0}}{\sqrt{R^2+x_0^2}} + \frac{a \cancel{+x_0}}{\sqrt{R^2+x_0^2}} \right)$$

$$= \frac{KQ}{\sqrt{R^2+x_0^2}} \; //$$

21.11 Em uma experiência no espaço, um próton é mantido fixo e outro próton é libertado do repouso a uma distância de 2,50 mm. (a) Qual é a aceleração inicial do próton após ser libertado? (b) Faça gráficos qualitativos (sem números!) de aceleração *versus* tempo e velocidade *versus* tempo do movimento do próton libertado.



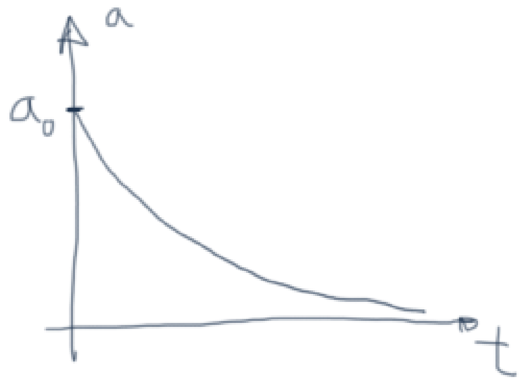
a)

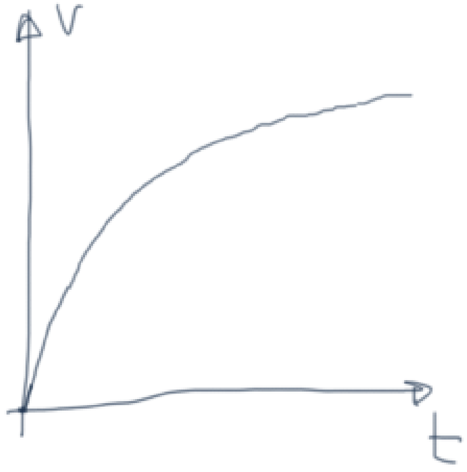
$$F_e = \frac{k.e.e}{r^2} = \frac{ke^2}{r^2}$$

$$F_R = m_p a \rightarrow \boxed{a(r) = \frac{F_e}{m_p} = \frac{ke^2}{m_p\, r^2}}$$

$$a = \frac{9{,}00.10^{9}.(1{,}60.10^{-19})^2}{(1{,}67.10^{-27}).(2{,}50.10^{-3})^2} = \boxed{2{,}21.10^{4}\,\frac{m}{s^2}} = a_0$$

b)



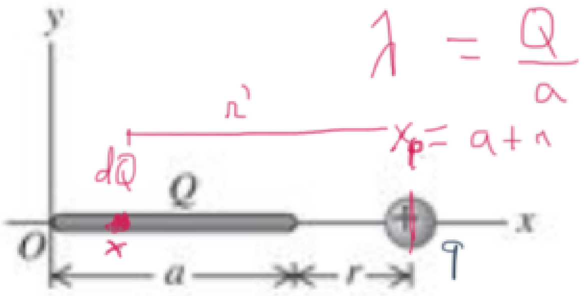


$$a = \frac{dv}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{dx}{dt}\right) = \frac{d^2x}{dt^2}$$

$$a = \underbrace{\left(\frac{ke^2}{m_p}\right)}_{A} \frac{1}{x^2}$$

$$\boxed{\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{A}{x^2}}$$

21.89 Uma carga positiva Q é distribuída uniformemente sobre o eixo Ox de $x = 0$ até $x = a$. Uma carga puntiforme positiva q está sobre a parte positiva do eixo Ox, no ponto $x = a + r$, a uma distância r à direita da extremidade de Q (Figura 21.47).



$$\lambda = \frac{Q}{a} = \frac{dQ}{dx}$$

Figura 21.47 Problema 21.89.

(a) Determine os componentes x e y do campo elétrico produzido pela distribuição de cargas Q nos pontos da parte positiva do eixo Ox para $x > a$. (b) Obtenha a força (módulo, direção e sentido) que a distribuição de cargas Q exerce sobre a carga q. (c) Mostre que para os pontos $r >> a$, o módulo da força calculada no item (b) é aproximadamente igual a $Qq/4\pi\epsilon_0 r^2$. Explique a razão desse resultado.

$E_y = 0$!

$$dE_x = \frac{k\,dQ}{(r')^2} = \frac{k\lambda\,dx}{(x_p - x)^2}$$

$$E_x = \int_0^a \frac{k\lambda\,dx}{(x_p - x)^2} = k\lambda\left[\frac{1}{x_p - x}\right]_0^a =$$

$$\frac{kQ}{\cancel{a}}\left(\frac{\cancel{a}+\cancel{r}-\cancel{r}}{r(a+r)}\right) = \frac{kQ}{r(a+r)}$$

$$\int \frac{1}{x^2}\,dx = -\frac{1}{x}$$

$$= \frac{kQ}{a}\left(\frac{1}{\underbrace{x_p - a}_{r}} - \frac{1}{\underbrace{x_p}_{a+r}}\right) = \frac{kQ}{a}\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{a+r}\right)$$

$$\boxed{\vec{E}_x = \frac{kQ}{a}\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{a+r}\right)\hat{i}}$$

b) $\vec{F} = q\vec{E}_x$

$$\boxed{\vec{F} = \frac{kQq}{a}\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{a+r}\right)\hat{i}}$$

c) $r >> a$

$$\vec{F} = kQq\,\frac{1}{ra + r^2}\,\hat{i}$$

$$\cong \frac{kQq}{r^2}\,\hat{i}$$