REVISÃO P1

Formulário (P1/2019)

$$\vec{F} = \frac{qq'(\vec{r}-\vec{r}')}{4\pi\epsilon_0|\vec{r}-\vec{r}'|^3}, \qquad \vec{F} = q\vec{E}, \quad \vec{E} = \frac{q(\vec{r}-\vec{r}')}{4\pi\epsilon_0|\vec{r}-\vec{r}'|^3}, \qquad \vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int \frac{dq}{r^2}\hat{r},$$

$$p = qd, \quad \vec{\tau} = \vec{p}\times\vec{E}, \quad U = -\vec{p}\cdot\vec{E}, \quad \Phi_E = \int \vec{E}\cdot d\vec{A}, \quad \oint \vec{E}\cdot d\vec{A} = \frac{q_{int}}{\epsilon_0},$$

$$V = \frac{q}{4\pi\epsilon_0|\vec{r}-\vec{r}'|}, \quad V_B - V_A = -\int_A^B \vec{E}\cdot d\vec{\ell}, \quad V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int \frac{dq}{r}, \quad \vec{E} = -\vec{\nabla}V,$$

$$V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\sum_i \frac{q_i}{r_i}, \quad U = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\sum_{i<j}\frac{q_i q_j}{r_{ij}}, \quad C = Q/V, \quad C_{eq} = C_1 + C_2 + \dots,$$

$$\frac{1}{C_{eq}} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \dots, \quad U = \frac{Q^2}{2C} = \frac{CV^2}{2} = \frac{QV}{2}, \quad u = \frac{\epsilon_0}{2}E^2.$$

$C = \frac{\varepsilon_0 A}{d}$, $C = kC_0$, $k = \frac{\varepsilon_{meio}}{\varepsilon_0}$, $\vec{E} = \frac{\vec{E}_0}{k}$, $\Delta V = \frac{\Delta V_0}{k}$

$\Delta V = E\cdot d$, $q_i = \left(1-\frac{1}{k}\right)q$ ou $\sigma_i = \left(1-\frac{1}{k}\right)\sigma$

$\Delta V = \frac{\Delta U}{q}$, $W_{A\to B} = -\Delta U_{BA} = -q\,\Delta V_{BA} = q\,\Delta V_{AB}$

Formulário (P2/2019)

$$V_B - V_A = -\int_A^B \vec{E}\cdot d\vec{\ell}, \quad \vec{E} = -\vec{\nabla}V, \quad dR = \rho\frac{d\ell}{A}, \quad V = RI, \quad \vec{J} = \sigma\vec{E} = \frac{1}{\rho}\vec{E},$$

$$\oint \vec{B}\cdot d\vec{A} = 0, \quad d\vec{F} = Id\vec{\ell}\times\vec{B}, \quad \vec{\mu} = I\vec{A}, \quad d\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi}\frac{d\vec{\ell}\times\hat{r}}{r^2}, \quad \oint \vec{B}\cdot d\vec{\ell} = \mu_0 I_{int},$$

$$d\vec{\tau} = \vec{r}\times d\vec{F}, \quad \vec{\tau} = \vec{\mu}\times\vec{B}, \quad U = -\vec{\mu}\cdot\vec{B},$$

(Desconsiderar)

Algumas integrais

$$\int \frac{dx}{(c+x^2)^{1/2}} = \log(x+\sqrt{c+x^2}), \qquad \int \frac{dx}{(c+x^2)^{3/2}} = \frac{x}{c\,(c+x^2)^{1/2}},$$

$$\int \frac{x\,dx}{(c+x^2)^{1/2}} = \sqrt{c+x^2}, \qquad \int \frac{x\,dx}{(c+x^2)^{3/2}} = -\frac{1}{(c+x^2)^{1/2}},$$

$$\int \frac{dx}{a^2+x^2} = \frac{1}{a}\tan^{-1}\left(\frac{x}{a}\right), \qquad \int \frac{x\,dx}{a^2+x^2} = \frac{1}{2}\log(a^2+x^2).$$

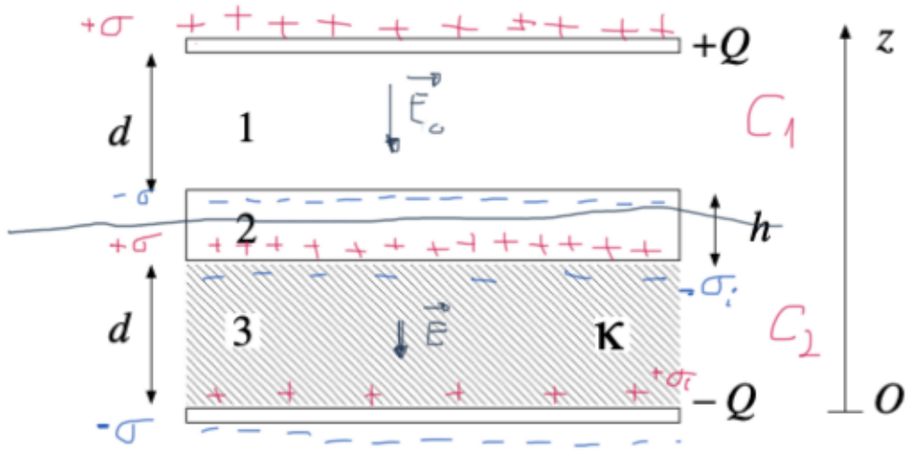
$J = n\cdot q\cdot V_d$, $i = \int \vec{J}\cdot d\vec{A} \xrightarrow{\vec{J}=cte} J = \frac{i}{A}$

$R_{eq} = R_1 + R_2 + R_3 \dots$ (série), $\frac{1}{R_{eq}} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \dots$ (paralelo), $\rho = \rho_0[1+\alpha(T-T_0)]$

$R = R_0[1+\alpha(T-T_0)]$

Questão 4 (P1/2015)

Três placas condutoras de área A são espaçadas de d por vácuo (região 1) e de d por um material de constante dielétrica κ (região 3), como indicado na figura. A carga total na placa superior é igual a $Q > 0$, na placa do meio é igual a zero e na placa inferior é igual a $-Q$. Desconsidere a não uniformidade do campo elétrico perto das bordas.



(a) (1,0 ponto) Indique numa figura e calcule as densidades de carga nas superfícies das placas condutoras. Calcule o vetor campo elétrico $\vec{E}$ nas regiões 1, 2 e 3. Expresse suas respostas em termos de ϵ_0, Q, A e κ.

(b) (1,0 ponto) Calcule a capacitância do sistema de três placas.

(c) (0,5 ponto) Calcule a densidade de carga de polarização no dielétrico.

a) $\pm\sigma = \pm \frac{Q}{A}$

Campo Elétrico: 1) $\vec{E}_0 = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}(-\hat{k}) = \frac{Q}{\varepsilon_0 A}(-\hat{k})$

2) $\vec{E} = 0$

3) $\vec{E} = \frac{\vec{E}_0}{k} = \frac{\sigma}{k\varepsilon_0}(-\hat{k}) = \frac{Q}{k\varepsilon_0 A}(-\hat{k})$

b) $\frac{1}{C_{eq}} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}$

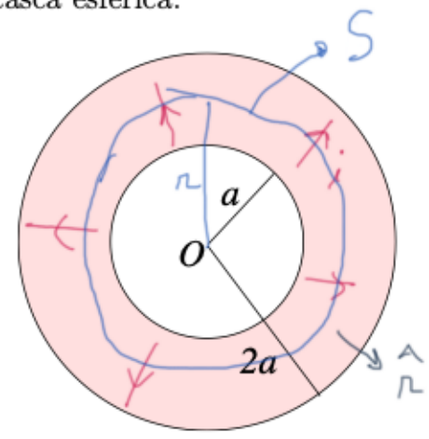
$\frac{1}{C_{eq}} = \frac{C_2 + C_1}{C_1 C_2} \rightarrow C_{eq} = \frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2}$

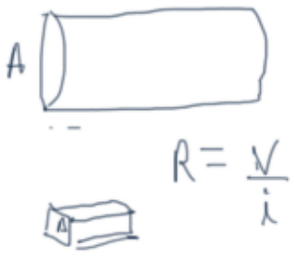
$C_1 = \frac{\varepsilon_0 A}{d}$, $C_2 = k\frac{\varepsilon_0 A}{d}$ $\Big\}$ $C_{eq} = \frac{\frac{\varepsilon_0 A}{d} \cdot \frac{k\varepsilon_0 A}{d}}{\frac{\varepsilon_0 A}{d} + \frac{k\varepsilon_0 A}{d}} \rightarrow \boxed{C_{eq} = \frac{\varepsilon_0 A}{d}\left(\frac{k}{1+k}\right)}$

c) $\sigma_i = \left(1 - \frac{1}{k}\right)\sigma \rightarrow \boxed{\sigma_i = \left(1 - \frac{1}{k}\right)\frac{Q}{A}}$

Questão 1 (P2, 2019)

Uma esfera condutora de raio a está no interior de uma casca esférica fina condutora de raio $2a$. A esfera e a casca esférica são concêntricas e o espaço entre elas está preenchido com um material de condutividade $\sigma(r) = \frac{A}{r}$ constante, (A é uma constante positiva). Uma corrente elétrica I, uniformemente distribuída através do material entre os condutores, flui da esfera interna para a casca esférica.





$R = \frac{V}{i}$

$i = \frac{V}{R}$

(a) (0,5 ponto) Determine a dimensão da constante A no Sistema Internacional de Unidades.

(b) (1,0 ponto) Calcule a resistência elétrica entre os condutores.

(c) (1,0 ponto) Dada uma diferença de potencial V aplicada entre as duas supercícies, calcule o vetor densidade de corrente $\vec{J}(r)$ em função dos dados do problema.

a) $[\sigma] = \frac{[A]}{[r]} \rightarrow \boxed{[A]} = [\sigma] \cdot m = \frac{1}{\Omega \cdot m} \cdot m = \boxed{\Omega^{-1}}$

$\sigma = \frac{1}{\rho}$ $\boxed{R = \rho \cdot \frac{l}{A}}$, $J = \sigma E$, $E = \rho J$ $\rightarrow \rho = \frac{RA}{l} \rightarrow [\rho] = \frac{\Omega \cdot m^2}{m}$

$[\rho] = \Omega \cdot m$

b) $R = \rho \frac{l}{S} \rightarrow dR = \rho \frac{dl}{S} = \rho \frac{dr}{S(r)} = \frac{1}{\sigma} \frac{dr}{S(r)} = \frac{r}{A} \frac{dr}{S(r)}$

$$R = \int_a^{2a} \frac{r}{A} \frac{dr}{4\pi r^2} = \frac{1}{A \cdot 4\pi} \int_a^{2a} \frac{1}{r} dr = \frac{1}{A \cdot 4\pi} \left[\ln r\right]_a^{2a} =$$

$$= \frac{1}{4\pi A} (\ln 2a - \ln a) = \frac{1}{4\pi A} \ln\left(\frac{2\cancel{a}}{\cancel{a}}\right) \rightarrow \boxed{R = \frac{\ln 2}{4\pi A}}$$

c) $\vec{J} = \sigma \vec{E}$

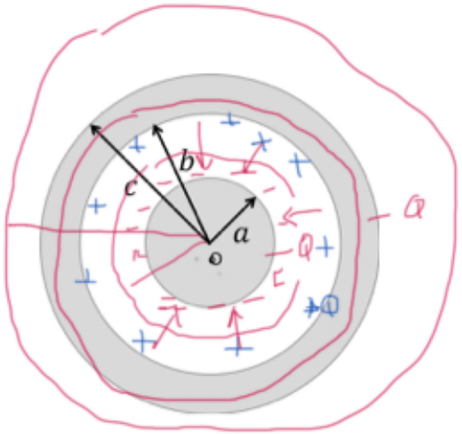
Como i, e portanto $\vec{E}$, é radial, $\vec{J}$ também é.

$$\boxed{\vec{J}(r)} = J(r)\hat{r} = \boxed{\frac{A \cdot V}{\ln 2 \cdot r^2} \hat{r}}$$

$$J(r) = \frac{i}{S(r)} = \frac{i}{4\pi r^2} = \frac{V}{R\, 4\pi r^2} = \frac{\cancel{4\pi} A}{\ln 2} \frac{V}{\cancel{4\pi} r^2} = \frac{A \cdot V}{\ln 2 \cdot r^2}$$

Questão 1 (P1, 2018)

Um arranjo é formado por uma esfera condutora sólida de raio a, centrada no ponto O na origem, eletrizada com carga $-Q$ envolvida por uma casca esférica condutora de raio interno b e externo c também eletrizada com carga $-Q$, conforme ilustrado na figura abaixo:



(a) (1,5) Sendo r a distância até a origem O, determine o vetor campo elétrico nas regiões $r < a$, $a < r < b$, $b < r < c$ e $r > c$.

(b) (0,5) Determine a carga em cada uma das superfícies $r = a$, $r = b$ e $r = c$ na situação de equilíbrio eletrostático. Justifique sua resposta.

(c) (0,5) Determine as densidades superficiais de carga σ_a, σ_b e σ_c.

a) $r<a$: $\vec{E} = \vec{0}$

$a<r<b$: $\oint \underbrace{\vec{E}\cdot d\vec{A}}_{-E\,dA} = \frac{q_{int}}{\varepsilon_0} \rightarrow -E\underbrace{\oint dA}_{4\pi r^2} = -\frac{Q}{\varepsilon_0}$ $\quad E = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$

$$\boxed{\vec{E} = -\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\hat{r}}$$

$b<r<c$: $\vec{E} = \vec{0}$

$r>c$: $\boxed{\vec{E} = \frac{-2Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\hat{r}}$

b) $r=a \rightarrow -Q$

$r=b \rightarrow +Q$

$r=c \rightarrow -2Q$

checando: $b<r<c$:

$\oint \vec{E}\cdot d\vec{A} = \frac{-Q+Q}{\varepsilon_0} = 0$

$\boxed{\vec{E} = 0}$

c) $\sigma_a = -\frac{Q}{4\pi a^2}$

$\sigma_b = +\frac{Q}{4\pi b^2}$

$\sigma_c = \frac{-2Q}{4\pi c^2}$

23.48 O potencial produzido por uma carga puntiforme Q localizada na origem é dado por

$$V = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0\sqrt{x^2+y^2+z^2}} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\left(x^2+y^2+z^2\right)^{-\frac{1}{2}}$$

(a) Calcule os componentes E_x, E_y e E_z usando a Equação (23.19).
(b) Mostre que o resultado do item (a) está de acordo com a

$$\vec{E} = -\vec{\nabla} V = -\left(\frac{\partial V}{\partial x}\hat{i} + \frac{\partial V}{\partial y}\hat{j} + \frac{\partial V}{\partial z}\hat{k}\right) = E_x\hat{i} + E_y\hat{j} + E_z\hat{k}$$

$$E_x = -\frac{\partial V}{\partial x} = -\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\partial}{\partial x}\left[\left(x^2+y^2+z^2\right)^{-\frac{1}{2}}\right] = -\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\left(-\frac{1}{\cancel{2}}\right)\cdot\left(x^2+y^2+z^2\right)^{-\frac{3}{2}}\cdot\cancel{2}x$$

$$= \frac{Qx}{4\pi\varepsilon_0\left(x^2+y^2+z^2\right)^{\frac{3}{2}}}$$

$$E_y = -\frac{\partial V}{\partial y} = \frac{Qy}{4\pi\varepsilon_0\left(x^2+y^2+z^2\right)^{3/2}}$$

$$E_z = -\frac{\partial V}{\partial z} = \frac{Qz}{4\pi\varepsilon_0\left(x^2+y^2+z^2\right)^{3/2}}$$

b) $$\vec{E} = \frac{kQ}{r^2}\hat{r}$$

$$\vec{E} = E_x\hat{i} + E_y\hat{j} + E_z\hat{k}$$

$$= \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0\underbrace{\left(x^2+y^2+z^2\right)^{3/2}}_{r^3}}\left(\underbrace{x\hat{i}+y\hat{j}+z\hat{k}}_{\vec{r}}\right)$$

$$= \frac{kQ}{r^3}\vec{r}$$

$$= \frac{kQ}{r^2}\overbrace{\frac{\vec{r}}{r}}^{\hat{r}} = \frac{kQ}{r^2}\hat{r} \quad //$$

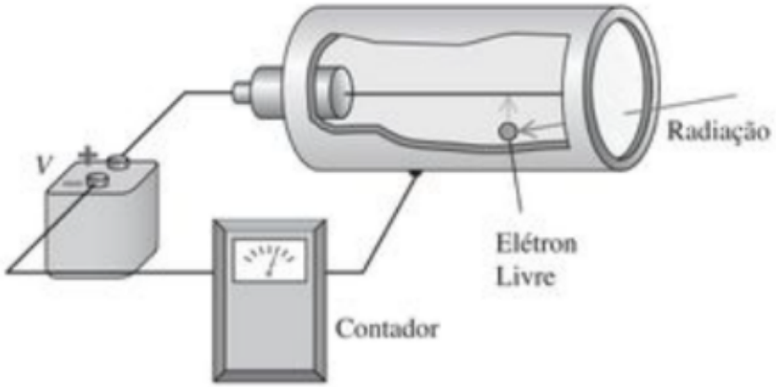
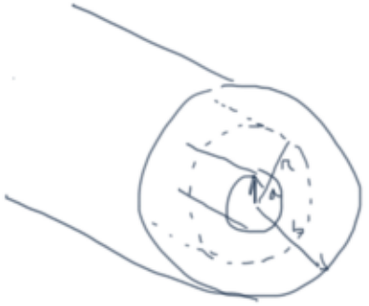


Figura 23.37 Problema 23.62.

23.62 Um *contador Geiger* detecta radiações tais como partículas alfa, usando o fato de que uma radiação ioniza o ar ao longo de sua trajetória. Ao longo do eixo de um cilindro metálico oco existe um fio fino, que está isolado do cilindro (Figura 23.37). Uma grande diferença de potencial é aplicada entre o fio e o cilindro externo, mantendo-se o fio em um potencial mais elevado; isso produz um forte campo elétrico orientado radialmente para fora do fio. Quando uma radiação ionizante entra no dispositivo, ocorre ionização de algumas moléculas de ar. Os elétrons livres produzidos são acelerados no sentido do fio pelo campo elétrico e, quando eles se aproximam do fio, ionizam muitas outras moléculas de ar. Logo, um pulso de corrente elétrica é gerado e pode ser detectado por um circuito eletrônico apropriado e convertido em um 'clique' audível. Suponha que o raio do fio central seja igual a 145 μm e o raio do cilindro oco seja de 1,80 cm. Qual deve ser a diferença de potencial entre o fio e o cilindro para que se produza um campo elétrico igual a $2{,}0 \times 10^4$ V/m a uma distância de 1,20 cm do fio? (O fio e o cilindro são ambos muito compridos em comparação a seus respectivos raios, de modo que os resultados do Problema 23.61 podem ser usados.)



$a = 145\,\mu m = 145 \cdot 10^{-6}\ m$

$b = 1{,}80\ cm = 1{,}80 \cdot 10^{-2}\ m$

$E(r = 1{,}20\,cm) = 2{,}0 \cdot 10^4\ \frac{V}{m}$

$\Delta V_{ab} = ?$

$$\Delta V_{ab} = \int_a^b \vec{E} \cdot d\vec{l} = \int_a^b \vec{E}(r) \cdot d\vec{r} = \int_a^b E(r) \cdot dr = \frac{q}{2\pi\varepsilon L} \int_a^b \frac{1}{r}\, dr =$$

$$\oint \underbrace{\vec{E} \cdot d\vec{A}}_{E\,dA} = \frac{q_{int}}{\varepsilon_0} = \frac{q}{\varepsilon_0}$$

$$E \underbrace{\oint dA}_{2\pi r L} = \frac{q}{\varepsilon_0} \rightarrow E(r) = \frac{q}{2\pi\varepsilon_0 r L}$$

$$= \frac{q}{2\pi\varepsilon_0 L} \left[\ln r\right]_a^b$$

$$= \frac{q}{2\pi\varepsilon_0 L} \ln\left(\frac{b}{a}\right) \frac{r}{r} \quad E(r)$$

$$= E(r) \cdot \ln\left(\frac{b}{a}\right) \cdot r$$

$$= 2{,}0 \cdot 10^4 \cdot \ln\left(\frac{1{,}80 \cdot 10^{-2}}{145 \cdot 10^{-6}}\right) \cdot 1{,}20 \cdot 10^{-2}$$

$$= \boxed{1{,}2 \cdot 10^3\ V = 1{,}2\ kV}$$