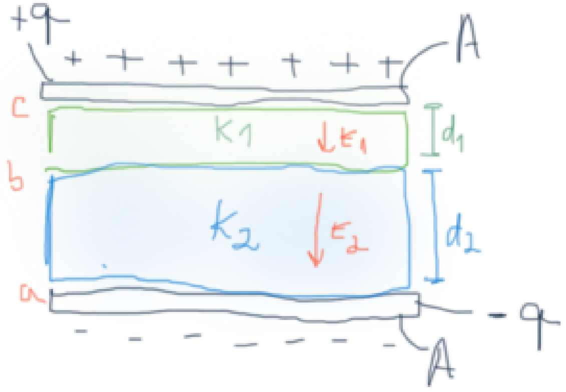
Dielétricos - Extra

Existem certas situações onde mais de um tipo de dielétrico é colocado dentro do capacitor. A seguir são tratadas 2 situações genéricas que podem ajudar na solução de outras situações similares.

1)



A capacitância será dada por

$$C = \frac{q}{\Delta V_{ca}}$$

Como podemos ver da figura,

$$\Delta V_{ca} = \Delta V_{cb} + \Delta V_{ba}$$

$$= E_1 d_1 + E_2 d_2$$

$$= \frac{E_0}{k_1} d_1 + \frac{E_0}{k_2} d_2$$

$$= \frac{q}{\varepsilon_0 A k_1} d_1 + \frac{q}{\varepsilon_0 A k_2} d_2$$

$$= \frac{q}{\varepsilon_0 A}\left(\frac{d_1}{k_1} + \frac{d_2}{k_2}\right)$$

Assim:

$$C = \frac{q}{\frac{q}{\varepsilon_0 A}\left(\frac{d_1}{k_1} + \frac{d_2}{k_2}\right)}$$

$$\boxed{C = \frac{\varepsilon_0 A}{\frac{d_1}{k_1} + \frac{d_2}{k_2}}}$$

Agora vamos considerar um circuito em série de 2 capacitores, $C_1 = \frac{k_1 \varepsilon_0 A}{d_1}$ e $C_2 = \frac{k_2 \varepsilon_0 A}{d_2}$.

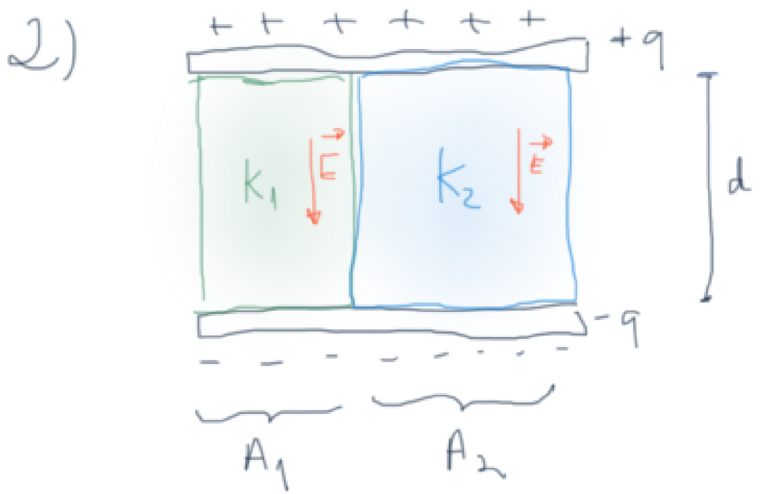
A capacitância equivalente é:

$$\frac{1}{C_{eq}} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} \rightarrow C_{eq} = \frac{1}{\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}}$$

$$\boxed{C_{eq} = \frac{\varepsilon_0 A}{\frac{d_1}{k_1} + \frac{d_2}{k_2}}}$$

Portanto, a situação 1 é equivalente a uma associação em série de capacitores, o que é mais direto de analisar!

2)



Antes, devido às diferentes tensões a que estavam submetidos os dielétricos, os campos elétricos eram diferentes. Agora, entretanto, a tensão ΔV é a mesma, o que implica que o campo $\vec{E}$ é o mesmo para ambos os dielétricos, pois $\Delta V = Ed$.

Contudo, para cada dielétrico, existirá uma densidade de carga diferente na região da placa correspondente. Assim:

$$C = \frac{q}{\Delta V} = \frac{q_1 + q_2}{\Delta V}$$

Como $E = \dfrac{q_1}{k_1 \varepsilon_0 A_1} = \dfrac{q_2}{k_2 \varepsilon_0 A_2}$, vem que $q_1 = k_1 \varepsilon_0 A_1 E$ e $q_2 = k_2 \varepsilon_0 A_2 E$

Logo:

$$C = \frac{\varepsilon_0 \overset{\frac{\Delta V}{d}}{E} (k_1 A_1 + k_2 A_2)}{\Delta V} = \frac{\varepsilon_0 \frac{\Delta V}{d} (k_1 A_1 + k_2 A_2)}{\Delta V}$$

Assim: $\boxed{C = \frac{\varepsilon_0}{d}(k_1 A_1 + k_2 A_2)}$

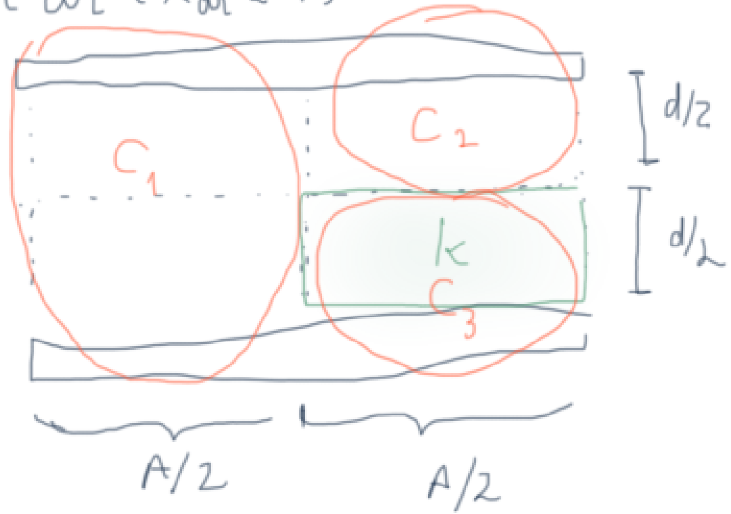
Se considerarmos 2 capacitores de capacitâncias $C_1 = \dfrac{k_1 \varepsilon_0 A_1}{d}$ e $C_2 = \dfrac{k_2 \varepsilon_0 A_2}{d}$ ligados em paralelo, teremos que a capacitância equivalente é:

$$C_{eq} = C_1 + C_2 \longrightarrow \boxed{C_{eq} = \frac{\varepsilon_0}{d}(k_1 A_1 + k_2 A_2)}$$

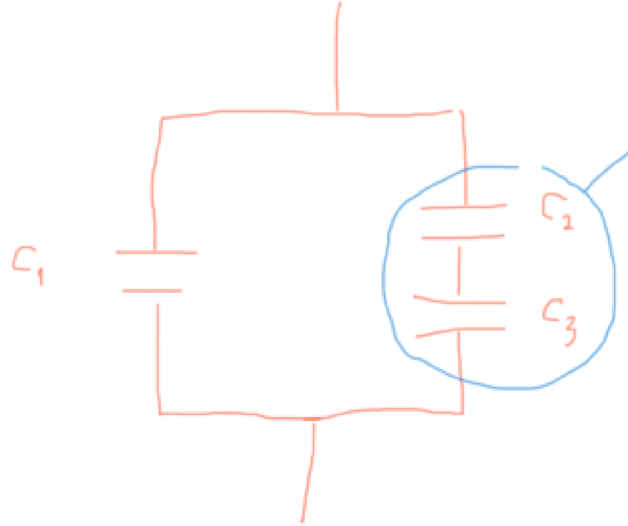
Logo, a situação 2 é equivalente a uma associação em paralelo, o que novamente é mais simples e direta de lidar.

Aplicação:

Calcule a capacitância do sistema mostrado a seguir, no qual apenas parte do volume entre as placas está preenchido pelo dielétrico, sendo o restante preenchido por ar ($K_{ar} \cong 1$).



O sistema mostrado é equivalente à seguinte associação mista:



onde:

$$C_1 = \frac{\varepsilon_0 (A/2)}{d} = \frac{\varepsilon_0 A}{2d}$$

$$C_2 = \frac{\varepsilon_0 (A/2)}{d/2} = \frac{\varepsilon_0 A}{d}$$

$$C_3 = \frac{K \varepsilon_0 (A/2)}{d/2} = \frac{K \varepsilon_0 A}{d}$$

Como C_2 e C_3 estão em série, vem:

$$\frac{1}{C_{eq_1}} = \frac{1}{C_2} + \frac{1}{C_3} = \frac{d}{\varepsilon_0 A} + \frac{d}{K \varepsilon_0 A} =$$

$$= \frac{d}{\varepsilon_0 A}\left(1 + \frac{1}{K}\right) = \frac{d}{\varepsilon_0 A} \frac{K+1}{K}$$

$$\therefore \; C_{eq_1} = \frac{\varepsilon_0 A K}{d(K+1)}$$

Assim, a capacitância equivalente da associação mista é:

$$C_{eq} = C_{eq_1} + C_1$$

$$= \frac{\varepsilon_0 A K}{d(K+1)} + \frac{\varepsilon_0 A}{2d}$$

$$C_{eq} = \frac{\varepsilon_0 A}{d}\left(\frac{K}{K+1} + \frac{1}{2}\right)$$

$$\boxed{C_{eq} = \frac{\varepsilon_0 A}{2d} \frac{3K+1}{K+1}} \; //$$