30.16 Existe uma proposta para usar grandes indutores como dispositivos para armazenar energia. (a) Qual é a energia total convertida em energia térmica e energia luminosa quando uma lâmpada incandescente de 200 W fica acesa durante um dia? (b) Se a energia calculada na parte (a) fosse armazenada em um indutor no qual circulasse uma corrente de 80,0 A, qual seria sua indutância?

a) $E = P \cdot \Delta t \rightarrow P = \dfrac{E}{\Delta t}$

$E = 200 \cdot (24 \cdot 3600)$

$\boxed{E = 1{,}73 \cdot 10^{7}\,J}$

200W . 24h

4800 Wh

4,8 kWh

↓ 0,50 reais

R$ 2,40

b) $U = \dfrac{1}{2} L i^2 \rightarrow L = \dfrac{2U}{i^2}$

$L = \dfrac{2 \cdot 1{,}73 \cdot 10^{7}}{80{,}0^2}$

$\boxed{L = 5{,}41 \cdot 10^{3}\,H}$

Como comentário, é impraticável usar um indutor assim apenas p/ manter uma lâmpada acesa, o que diria manter uma casa. Isso sem considerar as perdas por efeito Joule.

30.18 Deseja-se armazenar 1,0 kW · h = $3{,}60 \times 10^6$ J de energia elétrica em um campo magnético uniforme com módulo igual a 0,600 T. (a) Qual é o volume (no vácuo) que o campo magnético deve ocupar para armazenar essa quantidade de energia? (b) Se essa quantidade de energia fosse armazenada (no vácuo) em um volume contido em um cubo de aresta igual a 40,0 cm, qual deveria ser o campo magnético necessário?

a) $$u = \frac{U}{V} = \frac{B^2}{2\mu_0} \rightarrow V = \frac{2\mu_0 U}{B^2}$$

$$V = \frac{2 \cdot \mu_0 \cdot 3{,}60 \cdot 10^6}{0{,}600^2}$$

$$\boxed{V = 25{,}1 \text{ m}^3}$$

b) $$u = \frac{U}{V} = \frac{B^2}{2\mu_0} \rightarrow B = \sqrt{\frac{2\mu_0 U}{V}}$$

$$B = \sqrt{\frac{2 \cdot \mu_0 \cdot 3{,}60 \cdot 10^6}{(0{,}400)^3}}$$

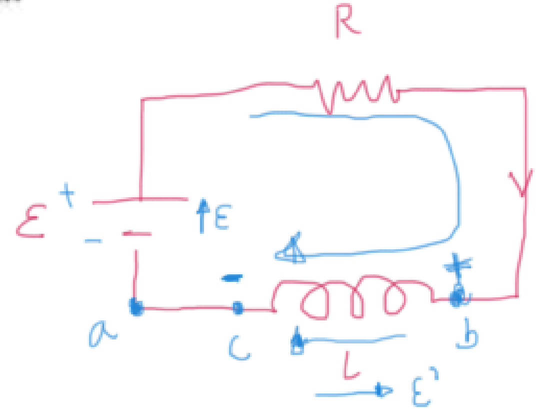
$$\boxed{B = 11{,}9 \text{ T}}$$

Um volume ou um campo magnético bastante grandes são necessários para armazenar uma quantidade de energia que não é tão grande assim. Logo, é impraticável.

$$\varepsilon - R\frac{dq}{dt} - L\frac{d^2q}{dt^2} = 0 \quad (3)$$

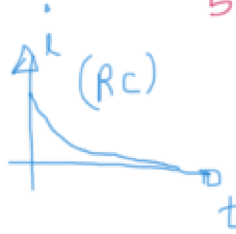
30.19 Um indutor com uma indutância de 2,50 H e uma resistência igual a 8,0 Ω está conectado aos terminais de uma bateria com fem de 6,0 V e resistência interna desprezível. Calcule (a) a taxa inicial do crescimento da corrente no circuito; (b) a taxa de aumento da corrente no instante em que a corrente é igual a 0,500 A; (c) a corrente 0,250 s depois que o circuito é fechado; (d) a corrente estacionária final.

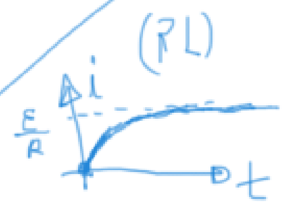
a)



"R-L"

("R-C")





$$+\varepsilon - \Delta V_R - \Delta V_L = 0$$

$$\boxed{\varepsilon - Ri - L\frac{di}{dt} = 0} \quad (1)$$

Inicialmente $i = 0$. Assim:

$$\boxed{\varepsilon - 0 - L\boxed{\frac{di}{dt}} = 0}$$

$$\frac{di}{dt} = \frac{\varepsilon}{L} = \frac{6{,}0}{2{,}50} \rightarrow \boxed{\frac{di}{dt} = 2{,}4\ \frac{A}{s}}$$

$$\int \frac{1}{a-bx}\,dx = \frac{\ln(a-bx)+K}{-b}$$

$$\ln z = \log_e z$$

b) De (1),

$$\frac{di}{dt} = \frac{\varepsilon - Ri}{L} = \frac{6{,}0 - 8{,}0 \cdot 0{,}500}{2{,}50}$$

$$\boxed{\frac{di}{dt} = 0{,}8\ \frac{A}{s}}$$

$$\frac{\varepsilon - Ri}{L} = \frac{di}{dt}$$

$$\frac{1}{L}\,dt = \frac{1}{\varepsilon - Ri}\,di$$

$$\frac{t}{L} = \frac{\ln(\varepsilon - Ri)}{-R}$$

c) Resolvendo (1): $\boxed{i = \frac{\varepsilon}{R}\left(1 - \underbrace{e^{-\frac{R}{L}t}}\right)}$ (2)

$$\boxed{i = \frac{6{,}0}{8{,}0}\left(1 - e^{-\frac{8{,}0}{2{,}50}\,0{,}250}\right)} = \boxed{0{,}413 A}$$

$$\frac{1}{e^{\frac{R}{L}t}}$$

d) $t \rightarrow \infty$, $\frac{di}{dt} \rightarrow 0$. Assim (2) se torna

$$i = \frac{\varepsilon}{R} = \frac{6{,}0}{8{,}0} \rightarrow \boxed{i = 0{,}75 A}$$

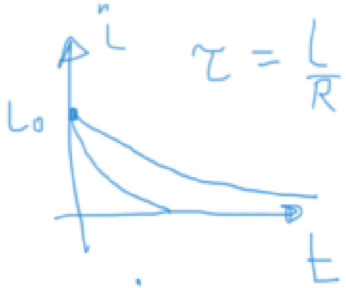
30.20 Um resistor de 15,0 Ω e uma bobina estão conectados em série a uma bateria de 6,30 V com resistência interna desprezível e uma chave fechada. (a) Após 2,0 ms da abertura da chave, a corrente diminuiu para 0,210 A. Calcule a indutância da bobina. (b) Calcule a constante de tempo do circuito. (c) Quanto tempo após a chave ser fechada a corrente atingirá 1,0% do seu valor original?

$\frac{\varepsilon}{R} = i_0$

a) Depois de abrir a chave,

$$i = i_0 e^{-\frac{R}{L}t} \quad (1)$$

$\frac{R}{L} \to \frac{1}{\tau}$



$\tau = \frac{L}{R}$

Isolando L:

$$\boxed{L = -\frac{t \cdot R}{\ln\left(\frac{i}{i_0}\right)}}$$

$$i = \frac{i_0}{e^{\frac{t}{\tau}}}$$

$$L = -\frac{2{,}0 \cdot 10^{-3} \cdot 15{,}0}{\ln\left(\frac{0{,}210}{0{,}420}\right)} = \boxed{43{,}3 \cdot 10^{-3}\,H}$$

$$\ln e^{-\frac{Rt}{L}} = -\frac{Rt}{L}$$

b) $$\tau = \frac{L}{R} = \frac{43{,}3 \cdot 10^{-3}}{15{,}0} = \boxed{2{,}89\,ms}$$

$28{,}9\,ms \simeq 30\,ms$

c) Isolando t de (1):

$$t = -\tau \cdot \ln\left(\frac{i}{i_0}\right)$$

$i \to \frac{1}{100} i_0$

$$t = -2{,}89 \cdot 10^{-3} \ln\left(\frac{1}{100}\right)$$

$$\boxed{t = 13{,}3\,ms}$$

30.21 Uma bateria de 35,0 V com resistência interna desprezível, um resistor de 50,0 Ω e um indutor de 1,25 mH com resistência interna desprezível estão conectados em série a uma chave aberta. A chave é subitamente fechada. (a) Quanto tempo após a chave ser fechada a corrente através do indutor atingirá metade do seu valor máximo? (b) Quanto tempo após o fechamento da chave a energia armazenada no indutor atingirá a metade do seu valor máximo?

a) $i = \frac{\varepsilon}{R}\left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right), \; \tau = \frac{L}{R} \quad (1)$

$i_{max} = \frac{\varepsilon}{R} \rightarrow t = ? \, , \; i = \frac{i_{max}}{2}$

$\therefore \frac{\cancel{\varepsilon}}{2\cancel{R}} = \frac{\cancel{\varepsilon}}{\cancel{R}}\left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right)$

$e^{-\frac{t}{\tau}} = \frac{1}{2} \rightarrow t = -\tau \ln\left(\frac{1}{2}\right)$

$\boxed{t = 17{,}3 \, \mu s}$

b) $U = \frac{1}{2} U_{max}$

$\frac{1}{2} L i^2 = \frac{\frac{1}{2} L i_{max}^2}{2} \rightarrow i = \frac{i_{max}}{\sqrt{2}}$

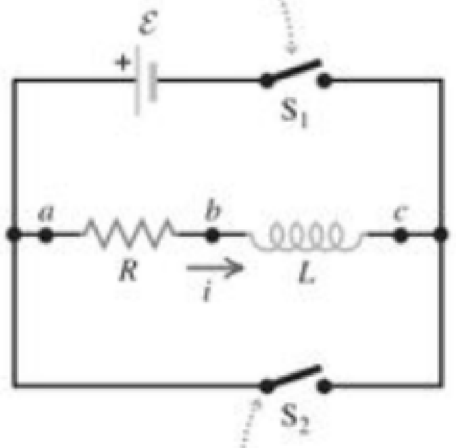
Substituindo isso em (1) e isolando t:

$t = -\tau \ln\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$

$\boxed{t = 30{,}7 \, ms}$

30.25 Na Figura 30.11, suponha que $\mathcal{E} = 60{,}0$ V, $R = 240\ \Omega$ e $L = 0{,}1600$ H. A chave S_2 é mantida aberta e fechamos a chave S_1 até que uma corrente constante seja estabelecida. A seguir, a chave S_1 é aberta e a chave S_2 é fechada, de modo que a bateria não alimente mais o circuito. (a) Qual é a corrente inicial no resistor logo após a chave S_1 ser aberta e a chave S_2 ser fechada? (b) Qual é a corrente no resistor quando $t = 4{,}0 \times 10^{-4}$ s? (c) Qual é a diferença de potencial entre os pontos b e c quando $t = 4{,}0 \times 10^{-4}$ s? Qual dos dois pontos está a um potencial mais elevado? (d) Quanto tempo é necessário para que a corrente se reduza à metade de seu valor inicial?

Fechando a chave S_1, podemos conectar a combinação R-L a uma fonte com fem $\mathcal{E}$.



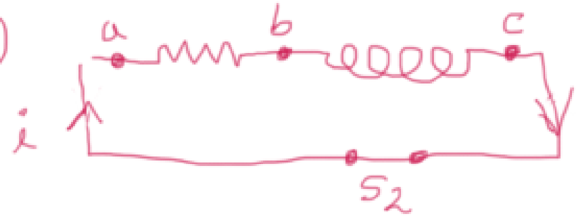
Fechando a chave S_2 e abrindo a chave S_1, desconectamos a combinação da fonte.

Figura 30.11 Um circuito R-L.

a) Quando S_1 está fechada e S_2 aberta, vale que $\mathcal{E} - Ri - L\frac{di}{dt} = 0$. A corrente começa em $i=0$, em $t=0$, e evolui com $i = \frac{\mathcal{E}}{R}\left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right)$. Para t suficientemente grande $(t \to \infty)$, $i = \frac{\mathcal{E}}{R} = \frac{60{,}0}{240} = 0{,}250$ A. Essa é a corrente inicial quando S_1 é aberta e S_2 é fechada.

b) $\boxed{i = i_0\, e^{-\frac{t}{\tau}}} = 0{,}250\, e^{-\frac{4{,}0\cdot 10^{-4}}{\left(\frac{0{,}160}{240}\right)}} = \boxed{0{,}137\ A}$

c)



$-\Delta V_{ba} + \Delta V_{cb} = 0$

$\Delta V_{cb} = \Delta V_{ba}$

$\Delta V_{cb} = R\cdot i = 240\cdot 0{,}137$

$\boxed{\Delta V_{cb} = 32{,}9\ V}$

$V_c > V_b$, $V_a > V_b$

d) $\left.\begin{array}{l} i = i_0\, e^{-\frac{t}{\tau}} \\ i = \frac{i_0}{2} \end{array}\right\} t = -\tau \ln\left(\frac{1}{2}\right) \to \boxed{t = 4{,}62\cdot 10^{-4}\ s}$

30.28 Um capacitor de 20,0 μF é carregado por uma fonte de alimentação de 150,0 V e, a seguir, desconectado da fonte para ser conectado em série a um indutor de 0,280 mH. Calcule: (a) a freqüência de oscilação do circuito; (b) a energia armazenada no capacitor no instante $t = 0$ ms (o momento da conexão com o indutor); (c) a energia armazenada no indutor no instante $t = 1{,}30$ ms.

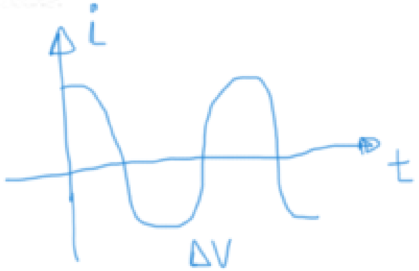
a) $\omega = \frac{1}{\sqrt{LC}}$, $f = \frac{\omega}{2\pi}$

$$f = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}} = \frac{1}{2\pi\sqrt{0{,}280\cdot10^{-3}\cdot 20{,}0\cdot10^{-6}}}$$

$\boxed{f = 2{,}13\cdot10^{3}\ Hz}$ ou $\boxed{f = 2{,}13\ kHz}$

$Hz = \frac{1}{s}$

$\omega = 2\pi f$



$\Delta V(t) = \boxed{\overset{\Delta V}{\frac{Q}{C}}}\cos(\dots)$

b) $U = \frac{1}{2} C\Delta V^2$

$= \frac{1}{2}\cdot 20{,}0\cdot10^{-6}\cdot 150{,}0^2$

$\boxed{U = 0{,}225\ J}$

$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$ $\quad C = \frac{Q}{\Delta V}$

$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{k}{m}x = 0$ $\quad \frac{k}{m} \to \omega^2$

EDO: $-L\frac{di}{dt} - \frac{q}{C} = 0$

$-L\frac{d^2q}{dt^2} - \frac{q}{C} = 0$

$\omega = \sqrt{\frac{1}{LC}}$ $\quad \frac{d^2q}{dt^2} + \frac{q}{LC} = 0$

$i(t) = -Q\omega\, sen(\omega t + \phi)$

c) $\boxed{q(t) = Q\cos(\omega t + \phi)}$

Para $t = 0$, $q(0)$ é máximo (capacitor totalmente carregado). Logo, $\phi = 0$. Portanto $q(t) = Q\cos(\omega t)$. Assim a corrente é $i = \frac{dq}{dt} = -Q\omega\, sen(\omega t)$. Como $Q = C\Delta V$ e $\omega = \frac{1}{\sqrt{LC}}$, i é plenamente determinado. Portanto:

$$U = \frac{1}{2}Li^2 = \frac{1}{2}LQ^2\omega^2 sen^2(\omega t) = \frac{1}{2}L\frac{C^2\Delta V^2}{LC} sen^2(\omega t) =$$

$$= \frac{1}{2}C\Delta V^2 sen^2(\omega t) \xrightarrow[\text{os valores}]{\text{substituindo}} \boxed{U(1{,}30ms) = 0{,}223\ J}$$

30.29 Um capacitor de 7,50 nF é carregado até 12,0 V e, a seguir, desconetado da fonte de alimentação e conectado em série através de uma bobina. O período de oscilação do circuito é medido em $8{,}60 \times 10^{-5}$ s. Calcule: (a) a indutância da bobina; (b) a carga máxima no capacitor; (c) a energia total do circuito; (d) a corrente máxima no circuito.

a) O período de oscilação é dado por

$$T = \frac{1}{f} = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{LC}$$

Isolando L:

$$L = \left(\frac{T}{2\pi}\right)^2 \frac{1}{C} = \left(\frac{8{,}60 \cdot 10^{-5}}{2\pi}\right)^2 \frac{1}{7{,}50 \cdot 10^{-9}}$$

$$\boxed{L = 2{,}50 \cdot 10^{-3}\ H}$$

b) $Q = C\,\Delta V$

$$= 7{,}50 \cdot 10^{-9} \cdot 12{,}0$$

$$\boxed{Q = 9{,}00 \cdot 10^{-8}\ C}$$

c) $$U_T = \frac{Q^2}{2C} = \frac{1}{2} C \Delta V^2 = \frac{1}{2} Q \cdot \Delta V$$

$$U_T = \frac{1}{2} \cdot 7{,}50 \cdot 10^{-9} \cdot 12{,}0^2$$

$$\boxed{U_T = 5{,}40 \cdot 10^{-7}\ J}$$

d) A corrente máxima ocorre quando o capacitor está totalmente descarregado:

$$U_T = U_C + U_L \rightarrow U_T = 0 + \frac{1}{2} L i_{max}^2 \rightarrow i_{max} = \sqrt{\frac{2U_T}{L}}$$

$$i_{max} = \sqrt{\frac{2 \cdot 5{,}40 \cdot 10^{-7}}{2{,}50 \cdot 10^{-3}}} \rightarrow \boxed{i_{max} = 6{,}58 \cdot 10^{-3}\ A}$$

30.31 Oscilações *L-C*. Um capacitor com capacitância igual a $6{,}0 \times 10^{-5}$ F é carregado conectando-o a uma bateria de 12,0 V. A seguir, o capacitor é desconectado da bateria e conectado a um indutor com $L = 1{,}50$ H. (a) Calcule a freqüência angular ω das oscilações elétricas e o período dessas oscilações (o tempo de uma oscilação). (b) Qual é a carga inicial do capacitor? (c) Qual é a energia inicial armazenada no capacitor? (d) Qual é a carga do capacitor 0,0230 s depois de ele ser ligado ao indutor? Interprete o sinal de sua resposta. (e) No instante dado no item (d), qual é a corrente no indutor? Interprete o sinal de sua resposta. (f) No instante dado no item (d), qual é a energia elétrica armazenada no capacitor e qual é a energia armazenada no indutor?

a) $$\boxed{\omega = \frac{1}{\sqrt{LC}} = \frac{1}{\sqrt{1{,}50 \cdot 6{,}0 \cdot 10^{-5}}} = 105{,}4\,\frac{\text{rad}}{\text{s}}}$$

$$T = \frac{2\pi}{\omega} \rightarrow T = \frac{2\pi}{105{,}4} \rightarrow \boxed{T = 0{,}0596\,\text{s}}$$

b) $$Q = C\Delta V \rightarrow Q = 6{,}0 \cdot 10^{-5} \cdot 12{,}0$$

$$\boxed{Q = 7{,}20 \cdot 10^{-4}\,\text{C}}$$

c) $$U = \frac{1}{2} C \Delta V^2 = \frac{1}{2} \cdot 6{,}0 \cdot 10^{-5} \cdot 12{,}0^2$$

$$\boxed{U = 4{,}32 \cdot 10^{-3}\,\text{J}}$$

d) $$q(t) = Q\cos(\omega t + \phi)$$

como em $t = 0$, $q(0) = Q$ que é a carga máxima, $\phi = 0$. Assim, $q(t) = Q\cos(\omega t)$.

Assim:

$$q(0{,}0230) = 7{,}20 \cdot 10^{-4} \cos(105{,}4 \cdot 0{,}0230)$$

$$\boxed{q(0{,}0230) = -5{,}42 \cdot 10^{-4}\,\text{C}}$$

O sinal "−" indica que o capacitor já havia sido totalmente descarregado e agora está carregando novamente, com as placas agora com sinais opostos aos que começaram.

e) $\boxed{i = -\omega Q \operatorname{sen}(\omega t)}$

$= -105{,}4 \cdot 7{,}20 \cdot 10^{-4} \operatorname{sen}(105{,}4 \cdot 0{,}0230)$

$= \boxed{-0{,}050\ A}$

O sinal negativo significa que a corrente está no sentido anti-horário.

f) $\boxed{U_c} = \dfrac{q^2}{2C} = \dfrac{(-5{,}42 \cdot 10^{-4})^2}{2 \cdot 6{,}00 \cdot 10^{-5}} = \boxed{2{,}45 \cdot 10^{-3}\ J}$

$\boxed{U_L} = \dfrac{1}{2} L i^2 = \dfrac{1}{2} \cdot 1{,}50 \cdot 0{,}050^2 = \boxed{1{,}87 \cdot 10^{-3}\ J}$

Curiosidade:

$U_C + U_L = 2{,}45 \cdot 10^{-3} + 1{,}87 \cdot 10^{-3}$

$= 4{,}32 \cdot 10^{-3}\ J$

que é a energia total do circuito armazenada inicialmente apenas no capacitor (item c).

30.35 (a) Aplicando as equações (30.21) e (30.23) para um circuito *L-C*, escreva expressões para a energia armazenada em um capacitor em função do tempo e para a energia armazenada em um indutor em função do tempo. (b) Usando a Equação (30.22) e a identidade trigonométrica $\text{sen}^2 x + \cos^2 x = 1$, mostre que a energia total em um circuito *L-C* é constante e igual a $Q^2/2C$.

Eq. 30.21 $\rightarrow q(t) = Q\cos(\omega t + \phi)$

Eq. 30.23 $\rightarrow i = \frac{dq}{dt} = -\omega Q\,\text{sen}(\omega t + \phi)$

a) $\boxed{U_C(t) = \frac{q(t)^2}{2C} = \frac{Q^2}{2C}\cos^2(\omega t + \phi)}$

$$\boxed{U_L(t) = \frac{1}{2}L\,i(t)^2} = \frac{1}{2}L\omega^2 Q^2\,\text{sen}^2(\omega t + \phi) =$$

$$= \frac{1}{2}L\frac{Q^2}{LC}\,\text{sen}^2(\omega t + \phi)$$

$$= \boxed{\frac{Q^2}{2C}\,\text{sen}^2(\omega t + \phi)}$$

b) $U_C(t) + U_L(t) = \frac{Q^2}{2C}\cos^2(\omega t + \phi) + \frac{Q^2}{2C}\,\text{sen}^2(\omega t + \phi)$

$$\therefore \boxed{U_C(t) + U_L(t) = \frac{Q^2}{2C}}$$

já que $\cos^2(\omega t + \phi) + \text{sen}^2(\omega t + \phi) = 1$.

$$\mathcal{E} - Ri - L\frac{di}{dt} = 0$$

$$\mathcal{E} - Ri = L\frac{di}{dt}$$

$$\frac{\mathcal{E} - Ri}{L} = \frac{di}{dt}$$

$$\int_0^t \frac{dt'}{L} = \int_0^i \frac{di'}{\mathcal{E} - Ri'}$$

$$\frac{1}{L}(t-0) = \left[\frac{\ln(\mathcal{E} - Ri')}{-R}\right]_0^i$$

$$-\frac{R}{L}t = \ln(\mathcal{E} - Ri) - \ln(\mathcal{E})$$

$$-\frac{R}{L}t = \ln\left(\frac{\mathcal{E} - Ri}{\mathcal{E}}\right)$$

$$\mathcal{E}e^{-\frac{R}{L}t} = \mathcal{E} - Ri$$

$$Ri = \mathcal{E} - \mathcal{E}e^{-\frac{R}{L}t}$$

$$\boxed{i = \frac{\mathcal{E}}{R}\left(1 - e^{-\frac{R}{L}t}\right)}$$

$$e^{\ln A} = A$$

$$\ln A - \ln B = \ln\left(\frac{A}{B}\right)$$

$10\tau_L \to \approx 99{,}995\%$

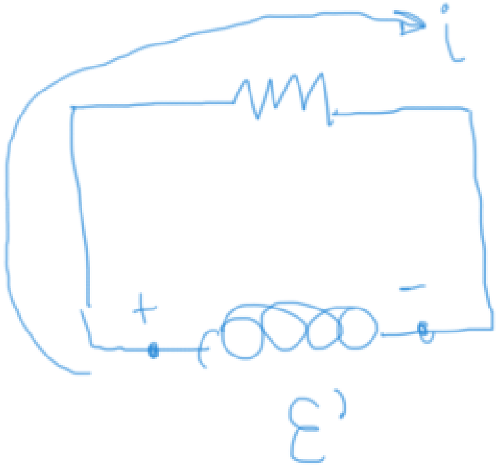
⋮

$2\tau_L \to \approx 86\%$

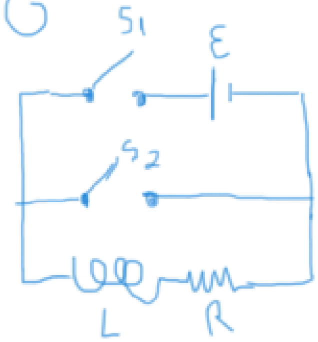
$\tau_L \to \approx 63\%$ de $\frac{\mathcal{E}}{R}$

$$\left[\frac{R}{L}\right] = s^{-1} \to \left[\frac{L}{R}\right] = s$$

$$\boxed{\frac{L}{R} = \tau_L}$$



$$\underbrace{\varepsilon'}_{\downarrow\ -L\frac{di}{dt}} - Ri = 0$$



$$-L\frac{di}{dt} - Ri = 0$$

$\rightarrow t = 0 \rightarrow i = i_0$ (condição inicial)

$$-\frac{R}{L} i = \frac{di}{dt}$$

$$\int -\frac{R}{L}\, dt = \int \frac{1}{i}\, di$$

$$-\frac{R}{L} t + k_1 = \ln i + k_2$$

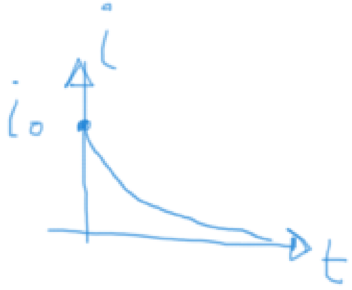
$$-\frac{R}{L} t + \underbrace{k_1 - k_2}_{k_3} = \ln i$$

$$-\frac{Rt}{L} + k_3 = \ln i$$

$$e \qquad\qquad e$$

$$e^{-\frac{Rt}{L} + k_3} = i$$

$$e^{-\frac{Rt}{L}} \cdot \overset{k_4}{\boxed{e^{k_3}}} = i \rightarrow \boxed{i = k_4 \cdot e^{-\frac{R}{L}t}}$$



$$\boxed{i = i_0 e^{-\frac{R}{L}t}}$$

$$\tau_L = \frac{L}{R}$$