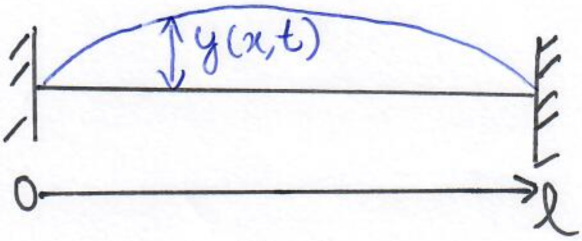
– Sistemas contínuos

Como um exemplos diferente da mecânica Lagrangiana, vamos considerar um sistema com <u>infinitos graus de liberdade</u>: uma corda de tamanho l, densidade linear de massa $\mu = M/l$, extremidades fixas e tensão F.



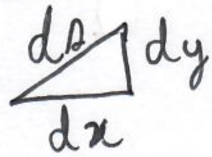
Vamos estudar <u>pequenas</u> oscilações transversais da corda. Em lugar um conjunto finito de coordenadas generalizadas, temos uma função contínua, o deslocamento $y(x,t)$ da corda a partir de sua posição de equilíbrio. Vamos introduzir a seguinte notação:

$$\dot{y} = \frac{\partial y}{\partial t} \quad \text{e} \quad y' = \frac{\partial y}{\partial x}$$

A energia cinética de um elemento de massa dm da corda é:

$$dT = \frac{dm}{2}\dot{y}^2 = \frac{1}{2}\mu \dot{y}^2 dx \Rightarrow T = \int_0^l \frac{1}{2}\mu \dot{y}^2 dx$$

Quando a corda se encontra em equilíbrio, seu comprimento é l. Contudo, ao ser deslocada seu comprimento aumenta de Δl:



$$ds = dx\sqrt{1+y'^2}$$ e temos que

$$l + \Delta l = \int_0^l \sqrt{1+y'^2}\,dx$$

O trabalho feito contra um incremento Δl no tamanho é $F\Delta l$. Essa é a energia potencial para a corda. Para pequenos deslocamentos, temos

$$\sqrt{1+y'^2} \simeq 1 + y'^2/2$$, donde vem que:

$$V = \frac{1}{2}\int_0^l F\, y'^2\,dx + \text{constante}$$

Nossa função Lagrangiana é então

$$L = \int_0^l \left[\frac{1}{2}\mu \dot{y}^2 - \frac{1}{2}F y'^2\right] dx$$

Vamos novamente empregar o princípio de Hamilton para derivarmos as equações do movimento. Para isso é conveniente definirmos um problema mais geral:

$$L = \int_0^l \mathcal{L}(y, \dot{y}, y')\,dx ,$$ $\mathcal{L} \to$ densidade de Lagrangiana

A ação para o problema é então:

$$S = \int_{t_0}^{t_1} \int_0^l \mathcal{L}(y, \dot{y}, y')\, dx\, dt$$

Tomemos agora pequenas variações do deslocamento $\delta y(x,t)$ que se anula em t_0 e t_1 porque os extremos da corda são fixos.

$$\delta S = \int_{t_0}^{t_1} \int_0^l \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y} \delta y + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{y}} \frac{\partial}{\partial t}(\delta y) + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y'} \frac{\partial}{\partial x}(\delta y) \right] dx\, dt$$

Integramos o segundo e o terceiro termo por partes, com os termos integrados indo a zero pois $\delta y = 0$ nos extremos. Daí:

$$\delta S = \int_{t_0}^{t_1} \int_0^l \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y} - \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{y}}\right) - \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y'}\right) \right] \delta y\, dx\, dy$$

Para $\delta S = 0$ sempre, o integrando deve se anular:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y} - \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{y}}\right) - \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y'}\right) = 0$$

No caso particular da corda esticada, temos

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y} = 0\ ,\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{y}} = \mu \dot{y}\ ,\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y'} = -F y'$$

Portanto a equação de Lagrange fica:

$$\ddot{y} = c^2 y'' \quad , \quad c^2 = F/\mu \ (\text{velocidade}^2)$$

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} y = c^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} y \quad (\text{equação de onda 1D})$$

Assim, no lugar de um conjunto de equações diferenciais ordinárias para $q_\alpha(t)$, temos agora uma equação diferencial parcial para a função $y(x,t)$ de duas variáveis independentes.

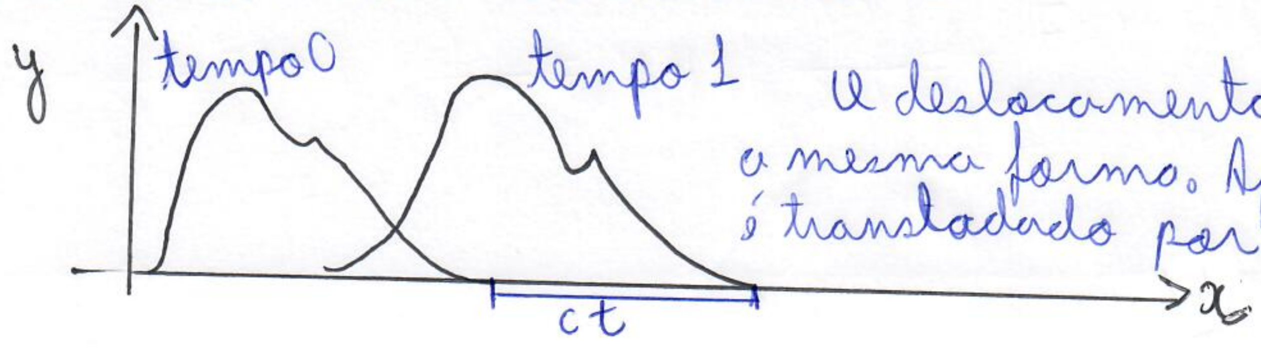
- Solução geral para a corda esticada

Dado o deslocamento inicial $y(x,0)$ e a velocidade $\dot{y}(x,0)$ inicial, queremos encontrar o deslocamento em um tempo posterior t.

Podemos verificar que $y(x,t) = f(\underbrace{x-ct}_{=\xi})$ é uma solução para equação de onda

$$\ddot{y} = c^2 y'' \Rightarrow c^2 \frac{\partial^2 f}{\partial \xi^2} = c \frac{\partial^2 f}{\partial \xi^2} \ \checkmark$$

Essa solução representa uma onda viajando para direita com velocidade c



O deslocamento possui a mesma forma. Apenas é transladado por $c\,t$.

Já a solução $y(x,t) = f(x+ct)$ representa (5)
uma onda viajando para a esquerda ao longo da corda. A solução geral é:

$$y(x,t) = f(x+ct) + g(x-ct)$$

Ambos o termos precisam estar presentes para satisfazer as condições de contorno em $x=0$ e $x=l$, pois a onda não pode viajar indefinidamente em apenas uma direção. Ao chegar no fim da corda, ela é refletida.

A condição $y(0,t)=0$ implica em (fixo)

$$f(ct) + g(-ct) = 0 \quad \forall t$$

Vemos assim que f e g diferem apenas nos seus sinais e de seus argumentos:

$$y = f(x+ct) - f(ct-x) \quad (*)$$

Já a condição de contorno $y=0$ para $x=l$:

$$f(ct+l) - f(\underbrace{ct-l}_{=u}) = 0 \Rightarrow f(u+2l) = f(u)$$

f é uma função periódica com período $2l$.

Por fim, devemos relacionar as condições iniciais com as condições de contorno:

$$y(x,0) = f(x) - f(-x) \quad (\text{a partir de } (*)),$$

que determina a parte ímpar de f.

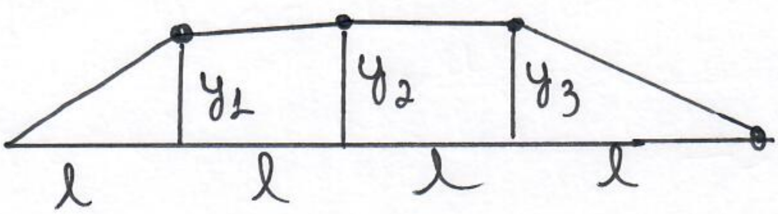
$$\dot{y}(x,t) = \frac{\partial y}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial t} = f'(x+ct)c + f'(ct-x)c$$

$$\dot{y}(x,0) = c\left[f'(x) + f'(-x) \right],$$

que determina a parte par de f, a menos de uma constante.

- Oscilações de partículas em uma corda.

Vamos discutir o problema da corda partindo do limite discreto. Considere uma corda leve de comprimento $(n+1)l$, esticada a uma tensão F, com n massas iguais m distribuídas em intervalos regulares l

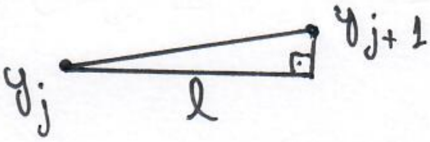


$(n=3)$

As coordenadas generalizadas para o problema são os deslocamentos $y_1, y_2, \dots, y_n$ e a energia cinética é: $T = \frac{1}{2}m\left(\dot{y}_1^2 + \dot{y}_2^2 + \dots \dot{y}_n^2\right)$

Para calcular a energia potencial, vamos considerar o comprimento da corda entre a j-ésima e $(j+1)$-ésima partícula:

$$l+\delta l = \sqrt{l^2+(y_{j+1}-y_j)^2}$$



$$\approx l\left[1+\frac{(y_{j+1}-y_j)}{2l^2}\right]$$, pequenos deslocamentos

Esse resultado vale para os extremos da corda desde que façamos $y_0 = y_{n+1} = 0$. O trabalho feito contra esse aumento de comprimento é $F\delta l$ e a energia potencial total fica

$$V = F/2l\left[y_1^2 + (y_2-y_1)^2 + \cdots + (y_n-y_{n-1})^2 + y_n^2\right]$$

No limite $n \to \infty$ e $l \to 0$ podemos escrever

$$\frac{(y_{j+1}-y_j)^2}{l^2} \approx y'^2$$ e recuperamos o resultado anterior

$$V = \frac{F}{2} l \sum_{j=0}^{n} \frac{(y_{j+1}-y_j)^2}{l^2} \Delta_j^{=1}, \quad x = jl \Rightarrow dj = dx/l$$

$$V = \frac{F}{2} l \int_0^n dj\, y'^2 = F/2 \int_0^{nl} dx\, y'^2$$

Escrevendo $L = T - V$ as equações de Lagrange são dadas por

$$\ddot{y}_1 = F/m\ell\left(-2y_1 + y_2\right)$$

Oscilações acopladas

$$\ddot{y}_2 = F/m\ell\left(y_1 - 2y_2 + y_3\right)$$

$$\vdots$$

$$\ddot{y}_n = \underbrace{\boxed{F/m\ell}}_{=\omega_0^2}\left(y_{n-1} - 2y_n\right)$$

$$\begin{bmatrix} \ddot{y}_1 \\ \ddot{y}_2 \\ \vdots \\ \ddot{y}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2\omega_0^2 & \omega_0^2 & 0 & \cdots & 0 \\ +\omega_0^2 & -2\omega_0^2 & \omega_0^2 & \cdots & 0 \\ 0 & +\omega_0^2 & -2\omega_0^2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -2\omega_0^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}$$

Fazemos agora o palpite habitual para obtermos os modos normais $y_j = A_j e^{i\omega t}$

$$\omega^2 \begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \\ \\ A_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2\omega_0^2 & -\omega_0^2 & 0 & \cdots & 0 \\ -\omega_0^2 & 2\omega_0^2 & -\omega_0^2 & \cdots & 0 \\ 0 & -\omega_0^2 & 2\omega_0^2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 2\omega_0^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \\ \vdots \\ A_n \end{bmatrix}$$

Vamos agora estudar alguns valores de n. Para $n = 1$ só há um modo normal com $\omega^2 = 2\omega_0^2$

Para $n=2$ temos

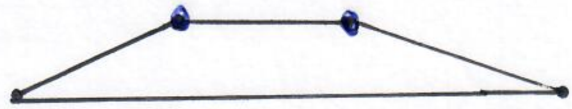
$$\begin{bmatrix} 2\omega_0^2-\omega^2 & -\omega_0^2 \\ -\omega_0^2 & 2\omega_0^2-\omega^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \end{bmatrix} = 0$$

A equação característica é:

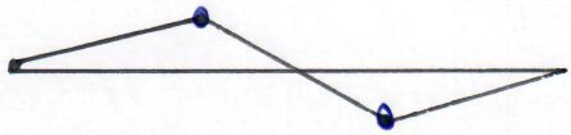
$$(2\omega_0^2-\omega^2)^2-\omega_0^4=0$$

Os dois modos normais são

$$\omega^2=\omega_0^2\,, \quad A_1=A_2$$



$$\omega^2=3\omega_0^2\,, \quad A_1=-A_2$$



Para $n=3$ a equação característica é:

$$\begin{vmatrix} 2\omega_0^2-\omega^2 & -\omega_0^2 & 0 \\ -\omega_0^2 & 2\omega_0^2-\omega^2 & -\omega_0^2 \\ 0 & -\omega_0^2 & 2\omega_0^2-\omega^2 \end{vmatrix} = 0,$$

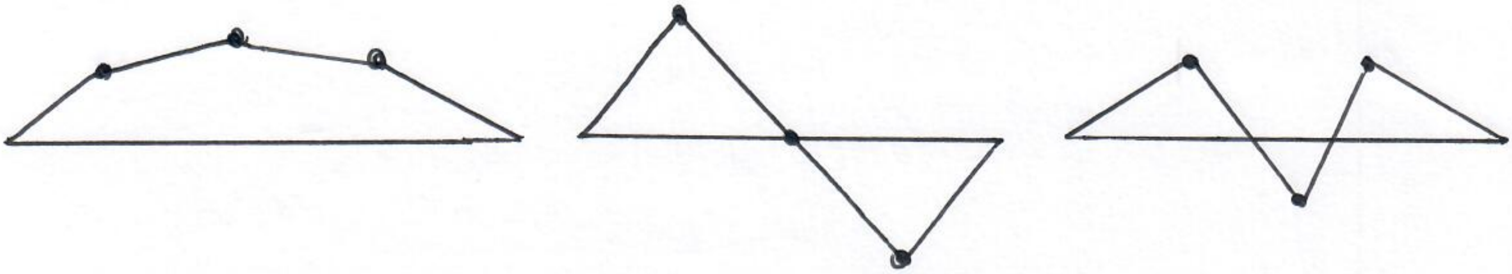
$$(2\omega_0^2-\omega^2)^3-2\,\omega_0^4\,(2\omega_0^2-\omega^2)=0\,,$$

$$\omega^2=(2-\sqrt{2})\,\omega_0^2 \qquad A_1:A_2:A_3=1:\sqrt{2}:-1$$

$$\omega^2=2\,\omega_0^2 \qquad A_1:A_2:A_3=1:0:-1$$

$$\omega^2=(2+\sqrt{2})\,\omega_0^2 \qquad A_1:A_2:A_3=1:-\sqrt{2}:1$$

E os modos normais são dados por



Maiores valores de n podem ser estudados de maneira similar. Para cada valor de n, o modo mais lento é aquele no qual as massas todas oscilam em uma mesma direção (não há nós), ao passo que os modos mais rápidos são aqueles nos quais as massas oscilam em direções opostas. Na medida em que n cresce, os modos normais se aproximam daqueles da corda esticada.

– Modos normais de uma corda esticada

Vamos agora retomar o problema da corda esticada o estudando por meio de modos normais. A equação do movimento é:

$$\ddot{y} = c^2 y'' , \quad c^2 = F/\mu$$

Buscamos soluções: $y(x,t) = A(x)\, e^{i\omega t}$

Temos então:

$$A''(x) + K^2 A(x) = 0, \quad K = \omega/c$$

Em vez de equações acoplados para as amplitudes A_j, nós obtemos equações diferenciais para a função amplitude $A(x)$. A solução geral é:

$$A(x) = a \cos Kx + b \sin Kx$$ (oscilador harmônico)

Como os extremos estão fixos, precisamos impor condições de contorno:

$$A(0) = A(\ell) = 0$$ (ℓ volta a ser o comprimento da corda)

o que levam a:

$$a = 0 \quad e \quad \sin K\ell = 0 \Rightarrow K = \frac{n\pi}{\ell}, \; n = 1, 2, 3 \ldots$$

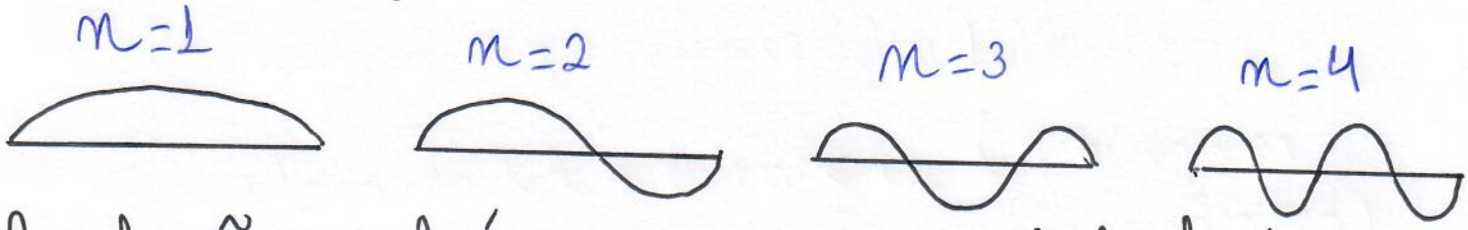
Cada um desses valores de n corresponde a um modo normal:

$$\omega_n = n \underbrace{\frac{\pi c}{\ell}}_{=\omega_1} = n\sqrt{\frac{F}{M\ell}}$$ $M \rightarrow$ massa da corda

A solução para o n-ésimo modo normal é

$$y(x,t) = \mathrm{Re}\left[A_n e^{in\omega_1 t}\right] \sin \frac{n\pi}{\ell} x$$

Aqui A_n é uma constante complexa arbitrária.
Essa solução representa uma "onda estacionária" de comprimento de onda $\frac{2l}{n}$ com $(n-1)$ nós, pontos onde $y=0$.



A solução geral é uma superposição de todos os modos. Para conectarmos com a solução geral obtida anteriormente

$$y = f(x+ct) - f(ct-x)$$

devemos lembrar que $f(u+2l) = f(u)$ e, por isso, pode ser expandida em uma série de Fourier

$$f(u) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f_n e^{in\pi u/l} \qquad f_n = \frac{1}{2l}\int_0^{2l} du\, f(u)\, e^{-\frac{in\pi}{l}u}$$

$$y(x,t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f_n \left(e^{in\pi(ct+x)/l} - e^{in\pi(ct-x)/l} \right)$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{\infty} 2i\, f_n e^{in\pi ct/l} \sin\frac{n\pi x}{l}$$

Para $y \in \mathbb{R}$ devemos ter $f^*(u) = f(u)$

$$f^*(u) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f_n^* e^{-\frac{in\pi u}{l}} = \sum_{m=-\infty}^{\infty} f_{-m}^* e^{+\frac{im\pi u}{l}} \Rightarrow f_{-n}^* = f_n$$

$(m=-n)$

E assim temos

$$y(x,t) = 2\,\mathrm{Re} \sum_{n=1}^{\infty} \underbrace{\boxed{2i\, f_n}}_{\text{}}\!\!{}^{//\,A_n}\; e^{in\pi ct/l} \sin\frac{n\pi x}{l}$$

(n = 0 não contribui)

$$y(x,t) = 2\,\mathrm{Re} \sum_{n=1}^{\infty} A_n\, e^{in\pi ct/l} \sin\frac{n\pi x}{l}$$

E completamos assim a equivalência.