PTC-3440 Modelos Probabilísticos

Oswaldo Luiz do Valle Costa

Aulas 8 e 9 - 2020

PTC-EPUSP

Valor Esperado e Variância

O valor esperado $E(X)$ de uma variável aleatória X é definido como sendo

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x f_X(x) dx \text{ (caso contínuo)}$$
$$E(X) = \sum_i x_i p_X(x_i) \text{ (caso discreto).}$$

Valor Esperado e Variância

Para o caso discreto do exemplo anterior, o valor esperado de R_1 é:

$$\begin{aligned} E(R_1) &= 0,1 \times 0,5 + 0,15 \times 0,3 + 0,25 \times 0,2 \\ &= 14,5\%. \end{aligned}$$

Para o caso contínuo do exemplo anterior,

$$\begin{aligned} E(R_1) &= \frac{1}{0,15} \int_{0,1}^{0,25} r dr \\ &= \frac{r^2}{0,3} \Big]_{0,1}^{0,25} = 17,5\%. \end{aligned}$$

Exemplos

Uma seguradora paga $R\$$ 30.000,00 em caso de acidente e cobra taxa de $R\$$ 1.000,00. A probabilidade de um acidente é 3%. Qual é o lucro esperado da seguradora?

$$E(L) = 1000 \times 0,97 - 29000 \times 0,03 = 100,00$$

Exemplos

Considere um jogo em que se paga $R\$$ 20,00 para entrar, e se joga 3 dados. Se apenas uma das faces der 1 ganha-se $R\$$ 20,00, se exatamente 2 faces derem 1 ganha-se $R\$$ 50,00, e se as 3 faces derem 1 ganha-se $R\$$ 80,00. Qualquer outro resultado não se ganha nada. Qual é o lucro esperado do jogador?

$$E(X) = 0 \times \frac{25}{72} + 30 \times \frac{5}{72} + 60 \times \frac{1}{216} - 20 \times \frac{125}{216} = -9,21$$

Exemplos

Para defender um cliente em um processo por danos resultante de um acidente de carro, um advogado deve decidir se cobra honorários fixos de R$ $7.500,00$ ou de contingência que receberá somente se ganhar o caso. Como o advogado deve estimar as chances de seu cliente se:

a) ele prefere honorários fixos de R$ $7.500,00$ a uma contingência de R$ $25.000,00$?

b) ele prefere honorários de contingência de R$ $60.000,00$ aos honorários fixos de R$ $7.500,00$?

a) $E(X) = 25000 \times p + 0 \times (1-p) = 25000p < 7500 \Rightarrow p < 0,3,$

b) $E(X) = 60000p > 7500 \Rightarrow p > 75/600 = 0,125.$

Valor Esperado e Variância

$X \to$ binomial com parâmetros n e p

$$E(X) = \sum_{i=0}^{n} i \binom{n}{i} p^i (1-p)^{n-1} = np.$$

$X \to$ geométrica com parâmetro p

$$E(X) = p \sum_{i=1}^{\infty} i(1-p)^{i-1} = \frac{1}{p}.$$

Valor Esperado e Variância

$X \rightarrow$ distribuição uniforme (α, β)

$$E(X) = \int_{\alpha}^{\beta} x \frac{1}{\beta - \alpha} dx = \frac{\beta + \alpha}{2}.$$

$X \rightarrow$ distribuição normal com parâmetros μ e σ

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} exp\{-\frac{(x-\mu)^2}{2\ \sigma^2}\} dx = \mu.$$

Valor Esperado e Variância

A variância de uma variável aleatória X, que representaremos por $Var(X)$ ou simplesmente σ_X^2, é definida como:

$$Var(X) = E((X - E(X))^2).$$

Pode-se mostrar que

$$Var(X) = E((X - E(X))^2) = E(X^2) - E(X)^2 \geq 0.$$

Valor Esperado e Variância

Para o caso discreto do exemplo anterior, a variância de R_1 é:

$$
\begin{aligned}
E(R_1^2) &= 0,1^2 \times 0,5 + 0,15^2 \times 0,3 + 0,25^2 \times 0,2 \\
&= 0,01 \times 0,5 + 0,0225 \times 0,3 + 0,0625 \times 0,2 \\
&= 0,005 + 0,00675 + 0,0125 \\
&= 0,02425
\end{aligned}
$$

Portanto, lembrando que $E(R_1) = 14,5\%$, temos que

$$\sigma_{R_1}^2 = 0,02425 - 0,145^2 = 0,003225$$

e

$$\sigma_{R_1} = 5,67\%.$$

Valor Esperado e Variância

Para o caso contínuo do exemplo anterior, a variância de R_1 é:

$$E(R_1^2) = \frac{1}{0,15} \int_{0,1}^{0,25} r^2 dr$$
$$= \frac{r^3}{0,45}\Big]_{0,1}^{0,25} = 0,0325.$$

Portanto, lembrando que $E(R_1) = 17,5\%$, temos que

$$\sigma_{R_1}^2 = 0,0325 - 0,175^2 = 0,001875$$

e

$$\sigma_{R_1} = 4,33\%.$$

Exemplos

Uma loja de automóveis observou que nos últimos 300 dias de operação teve 54 dias sem vendas de automóveis, 117 dias com a venda de 1 automóvel, 72 dias com a venda de 2 automóveis, 42 dias com a venda de 3 automóveis, 12 dias com a venda de 4 automóveis, e 3 dias com a venda de 5 automóveis. Calcule o valor esperado e o desvio padrão do número de automóveis vendidos em um dia.

$$p_0 = \frac{54}{300}, \; p_1 = \frac{117}{300}, \; p_2 = \frac{72}{300}, \; p_3 = \frac{42}{300}, \; p_4 = \frac{12}{300}, \; p_5 = \frac{3}{300}$$

A) $E(X) = 1,5,$

B) $E(X^2) = 3,5, \; \sigma^2 = Var(X) = 3,5 - (1,5)^2 = 1,25 \Rightarrow \sigma = 1,118.$

Exemplos

Um analista acredita que a tabela 1 é uma descrição satisfatória da distribuição de probabilidades da taxa de retorno de uma certa ação.

Tabela: Retornos e probabilidades

cenário	probabilidade	retorno
1	$0,15$	-10%
2	$0,25$	-2%
3	$0,30$	5%
4	$0,30$	15%

Exemplos

De acordo com os dados contidos na tabela, o retorno esperado e o desvio-padrão da taxa de retorno da ação são, respectivamente:

A) $5,5\%$ e $10,86\%$

B) $5,5\%$ e $8,66\%$

C) $4,0\%$ e 25%

D) $4,0\%$ e $10,86\%$

E) $4,0\%$ e $8,66\%$

1. $E(R) = -0,1 \times 0,15 - 0,02 \times 0,25 + 0,05 \times 0,3 + 0,15 \times 0,3 = 4\%,$
2. $$Var(X) = (-0,1 - 0,04)^2 \times 0,15 + (-0,02 - 0,04)^2 \times 0,25$$
$$+ (0,05 - 0,04)^2 \times 0,3 + (0,15 - 0,04)^2 \times 0,3 = 0,0075$$
$$\Rightarrow \sigma = 8,66\%.$$

Valor Esperado e Variância

$X \rightarrow$ distribuição gaussiana com parâmetros μ e σ

$$Var(X) = \int_{-\infty}^{\infty} (x-\mu)^2 \frac{1}{\sqrt{2\pi}\ \sigma} exp\{-\frac{(x-\mu)^2}{2\ \sigma^2}\} dx = \sigma^2.$$

Curtose

A curtose é uma medida de dispersão que caracteriza o pico ou "achatamento" da curva da função de distribuição de probabilidade. O excesso de curtose é normalmente definido como:

$$\gamma_2 = \frac{E((X - E(X))^4)}{\sigma^4} - 3$$

Curtose

A distribuição normal tem excesso de curtose igual a zero ($\gamma_2 = 0$). Distribuições com excesso de curtose zero são chamados mesocúrticas. Se $\gamma_2 > 0$ então a distribuição em questão é mais alta (afunilada) e concentrada que a distribuição normal. Nesse caso diz-se que esta distribuição de probabilidade é leptocúrtica, ou que a distribuição tem caudas pesadas (significa que é relativamente fácil obter valores que se afastam da média a vários múltiplos do desvio padrão). Se o valor é $\gamma_2 < 0$, então a função de distribuição é mais "achatada" que a distribuição normal, com caudas mais curtas e finas, e chama-se platicúrtica.

Vetores Aleatórios

Um vetor aleatório $X = \begin{pmatrix} X_1 \\ \vdots \\ X_n \end{pmatrix}$ é uma função do espaço amostral Ω para o $\mathbb{R}^n$. É caracterizado pela sua função densidade de probabilidade conjunta $f_X(x_1, \ldots, x_n)$ para o caso contínuo, ou pela sua função massa conjunta $p_X(x_1, \ldots, x_n)$ para o caso discreto.

VETORES ALEATÓRIOS

Temos para o caso contínuo que

$$\begin{aligned} F_X(x_1,\ldots,x_n) &= P(X_1 \leq x_1,\ldots,X_n \leq x_n) \\ &= \int_{-\infty}^{x_1}\cdots\int_{-\infty}^{x_n} f_X(z_1,\ldots,z_n)dz_1\ldots dz_n \end{aligned}$$

onde $F_X(x_1,\ldots,x_n)$ é a função distribuição de probabilidade conjunta de X. Para o caso discreto

$$P(X_1 = x_1,\ldots,X_n = x_n) = p_X(x_1,\ldots,x_n).$$

Vetores Aleatórios

As funções densidade de probabilidade marginais $f_{X_i}(x_i)$ são obtidas da função densidade de probabilidade conjunta simplesmente integrando de $-\infty$ a ∞ os termos nas outras variáveis. Por exemplo, para obter a função densidade de probabilidade marginal $f_{X_1}(x_1)$, basta calcular

$$f_{X_1}(x_1) = \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} f_X(x_1, z_2, \dots, z_n) dz_2 \dots dz_n.$$

Resultado análogo vale para o caso discreto.

Exemplo de 2 Variáveis Discretas

Sejam R_1 e R_2 as rentabilidades de dois investimentos, com a distribuição conjunta dada a seguir:

Tabela: Retornos e probabilidades

R_1	R_2	probabilidade
10%	5%	$0,1$
10%	8%	$0,1$
10%	12%	$0,3$
15%	5%	$0,1$
15%	8%	$0,1$
15%	12%	$0,1$
25%	5%	$0,05$
25%	8%	$0,05$
25%	12%	$0,1$

Exemplo de 2 Variáveis Discretas

As probabilidades marginais para R_1 e R_2 são:

Tabela: Retornos R_1 e R_2 e probabilidades

R_1	probabilidade
10%	$0,5$
15%	$0,3$
25%	$0,2$

R_2	probabilidade
5%	$0,25$
8%	$0,25$
12%	$0,5$

Vetor Valor Esperado

O vetor valor esperado $E(X)$ é o vetor formado pelos valores esperados $E(X_1), \ldots, E(X_n)$, isto é,

$$E(X) = \begin{pmatrix} E(X_1) \\ \vdots \\ E(X_n) \end{pmatrix}.$$

Exemplo de 2 Variáveis Discretas

Repetindo os cálculos anteriores, obtém-se que (verifique isto):

$$\begin{aligned} E(R_2) &= 9,25\%, \\ Var(R_2) &= 0,00087, \\ \sigma_{R_2} &= 2,95\%. \end{aligned}$$

Logo, segue que

$$E(R) = \begin{pmatrix} E(R_1) \\ E(R_2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 14,5\% \\ 9,25\% \end{pmatrix}.$$

Lei do Estatístico Inconsciente - Caso Contínuo

$$E(g(X_1,\ldots,X_n)) = \int_{-\infty}^{\infty}\cdots\int_{-\infty}^{\infty} g(x_1,\ldots,x_n) f_X(x_1,\ldots,x_n)dx_1\ldots dx_n$$

Caso Discreto

$$E(g(X_1,\ldots,X_n)) = \sum_{i_1}\cdots\sum_{i_n} g(i_1,\ldots,i_n)p_X(i_1,\ldots,i_n)$$

Soma de Variáveis Aleatórias

Considere

$$X = X_1 + \ldots + X_n + b$$

Temos que

$$E(X) = E(X_1) + \ldots + E(X_n) + b$$

Aplicação: X binomial com parâmetros (n, p)

$$X = X_1 + \ldots + X_n$$

onde $X_i = 1$ se o experimento i for sucesso, $X_i = 0$ se for fracasso. Logo X conta o número de sucessos em n experimentos. Temos que

$$E(X_i) = 1 \times p + 0 \times (1 - p) = p$$

Logo, como visto antes,

$$E(X) = E(X_1) + \ldots + E(X_n) = p + \ldots p = np$$

Aplicação: Retorno esperado de um portfólio

Considere os retornos aleatórios R_1 e R_2 vistos anteriormente. Considere um portfólio que aplica 30% da riqueza no ativo 1 e 70% no ativo 2. Ou seja, o retorno do portfólio é:

$$P = 0,3 \times R_1 + 0,7 \times R_2,$$

$$E(R) = \begin{pmatrix} E(R_1) \\ E(R_2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 14,5\% \\ 9,25\% \end{pmatrix}.$$

Qual e o retorno esperado desse portfólio?

$$E(P) = 0,3 \times E(R_1) + 0,7 \times E(R_2).$$

Portanto,

$$E(P) = 0,3 \times 14,5\% + 0,7 \times 9,25\% = 10,825\%.$$

Covariância

A covariância de 2 variáveis aleatórias X_1, X_2, denotada por $cov(X_1, X_2)$, ou simplesmente σ_{X_1,X_2}, é definida por

$$cov(X_1, X_2) = E((X_1 - E(X_1))(X_2 - E(X_2))),$$

e é claro que $cov(X_1, X_2) = cov(X_2, X_1)$.

Covariância

Tem-se que

$$cov(X_1, X_2) = E(X_1X_2) - E(X_1)E(X_2).$$

$$\begin{aligned} cov(X_1, X_2) &= E((X_1 - E(X_1))(X_2 - E(X_2))) \\ &= E(X_1X_2 - X_1E(X_2) - X_2E(X_1) + E(X_1)E(X_2)) \\ &= E(X_1X_2) - E(X_1)E(X_2) - E(X_2)E(X_1) + E(X_1)E(X_2) \\ &= E(X_1X_2) - E(X_1)E(X_2). \end{aligned}$$

Coeficiente de Correlação

Define-se o coeficiente de correlação ρ_{X_1,X_2} da seguinte forma:

$$\rho_{X_1,X_2} = \frac{cov(X_1, X_2)}{\sqrt{Var(X_1)Var(X_2)}} = \frac{\sigma_{X_1,X_2}}{\sigma_{X_1}\sigma_{X_2}}$$

e segue que $|\rho_{X_1,X_2}| \leq 1$.

Coeficiente de Correlação

$\rho_{X_1,X_2} = 1$: variáveis são perfeitamente positivamente correlacionadas,
$\rho_{X_1,X_2} = -1$ variáveis são perfeitamente negativamente correlacionadas.

Pode-se mostrar que quando $|\rho_{X_1,X_2}| = 1$ tem-se que

$$X_1 = \pm\frac{\sigma_{X_1}}{\sigma_{X_2}}(X_2 - E(X_2)) + E(X_1). \tag{1}$$

Exemplo de 2 Variáveis Discretas

Voltando ao nosso exemplo com 2 variáveis discretas ($\sigma_1 = 5,68\%$, $\sigma_2 = 2,95\%$) , temos que

$$\begin{aligned} E(R_1R_2) &= 0,1 \times 0,05 \times 0,1 + 0,1 \times 0,08 \times 0,1 + 0,1 \times 0,12 \times 0,3 \\ &+ 0,15 \times 0,05 \times 0,1 + 0,15 \times 0,08 \times 0,1 + 0,15 \times 0,12 \times 0,1 \\ &+ 0,25 \times 0,05 \times 0,05 \\ &+ 0,25 \times 0,08 \times 0,05 + 0,25 \times 0,12 \times 0,1 \\ &= 0,013275. \end{aligned}$$

Logo,

$$cov(R_1, R_2) = 0,013275 - 0,145 \times 0.0925 = -0,00013750.$$

Segue também que o fato de correlação é:

$$\rho = \frac{cov(R_1, R_2)}{\sigma_1\sigma_2} = \frac{-0,00013750}{0,0568 \times 0,0295} = -0,08215.$$

Variância de Combinação Linear

Considere o vetor aleatório $X = \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix}$ e o vetor $\omega = \begin{pmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \end{pmatrix} \in R^2$. Defina a variável aleatória

$$P = \omega_1 X_1 + \omega_2 X_2 = \omega' X + b,$$

em que ω' representa o transposto de ω.

Variância de Combinação Linear

Tem-se que

$$E(P) = \omega_1 E(X_1) + \omega_2 E(X_2) + b = \omega' E(X) + b$$

e

$$Var(P) = \omega_1^2 Var X_1 + 2\omega_1\omega_2 Cov(X_1, X_2) + \omega_2^2 Var(X_2) = \omega' \Sigma \omega$$

onde a matrix de covariância Σ é dada por:

$$\Sigma = \begin{bmatrix} Var(X_1) & Cov(X_1, X_2) \\ Cov(X_1, X_2) & Var(X_2) \end{bmatrix}$$

Variância de Combinação Linear

Tem-se que

$$
\begin{aligned}
P &= \omega_1 X_1 + \omega_2 X_2 + b \\
E(P) &= \omega_1 E(X_1) + \omega_2 E(X_2) + b
\end{aligned}
$$

e subtraindo a 1a da 2a equação e elevando ao quadrado temos que

$$
\begin{aligned}
(P - E(P))^2 = {} & \omega_1^2 (X_1 - E(X_1))^2 + \omega_2^2 (X_2 - E(X_2))^2 \\
& + 2\omega_1\omega_2 (X_1 - E(X_1))(X_2 - E(X_2))
\end{aligned}
$$

Variância de Combinação Linear

Logo, tomando o valor esperado,

$$
\begin{aligned}
Var(P) = E((P - E(P))^2) &= \omega_1^2 E((X_1 - E(X_1))^2) + \omega_2^2 E((X_2 - E(X_2))^2) \\
&+ 2\omega_1\omega_2 E((X_1 - E(X_1))(X_2 - E(X_2))) \\
&= \omega_1^2 Var(X_1) + 2\omega_1\omega_2 Cov(X_1, X_2) + \omega_2^2 Var(X_2)
\end{aligned}
$$

Independência

As variáveis aleatórias $X_1, \ldots, X_n$ são ditas independentes se para todo $x_1, \ldots, x_n$,

$$f_X(x_1, \ldots, x_n) = f_{X_1}(x_1) \ldots f_{X_n}(x_n)$$

(o caso discreto é análogo) e nesse caso é fácil verificar que

$$E(g_1(X_1) \ldots g_n(X_n)) = E(g_1(X_1)) \ldots E(g_n(X_n)).$$

Variáveis Descorrelacionadas

As variáveis aleatórias X_1 e X_2 ditas são descorrelacionadas se

$$cov(X_1, X_2) = 0.$$

Note que, se X_1 e X_2 são independentes, então $E(X_1X_2) = E(X_1)E(X_2)$, portanto segue que $cov(X_1, X_2) = 0$. Logo, independência implica variáveis descorrelacionadas, mas o reverso não é válido.

Soma de Variáveis Aleatórias Descorrelacionadas

Suponha que X_1 e X_2 sejam variáveis aleatórias descorrelacionadas. Tem-se que para

$$X = a_1 X_1 + a_2 X_2 + b,$$

$$E(X) = a_1 E(X_1) + a_2 E(X_2) + b,$$
$$Var(X) = a_1^2 Var(X_1) + a_2^2 Var(X_2).$$

Exercício

Suponha que X_1 e X_2 sejam independentes uniformemente distribuídas no intervalo $(0,1)$. Determine o valor esperado e a variância de $X = X_1 + X_2$.

$$E(X_i) = \frac{1}{2} \Rightarrow E(X) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1,$$

$$E(X_i^2) = \int_0^1 x^2 dx = \frac{x^3}{3} \,|_0^1 = \frac{1}{3}, \Rightarrow Var(X_i) = \frac{1}{3} - (\frac{1}{2})^2 = \frac{1}{3} - \frac{1}{4} = \frac{1}{12},$$

$$Var(X) = Var(X_1) + Var(X_2) = 2 \times \frac{1}{12} = \frac{1}{6}.$$

Exercício

Seja X o resultado da soma de 2 dados justos, ou seja

$$X = X_1 + X_2,$$

onde X_i é o resultado do dado i. Determine $E(X)$ e $Var(X)$.

$$E(X_i) = \frac{7}{2},$$

$$Var(X_i) = \frac{35}{12},$$

$$E(X) = 7, \; Var(X) = \frac{35}{6}.$$

Exemplo

O verão na cidade de São Sebastião é classificado como sendo um verão chuvoso ou um verão ensolarado. Os lucros das 2 principais empresas de São Sebastião, o hotel São Sebastião e a indústria de guarda-chuvas São Sebastião dependem da classificação do verão, conforme a tabela 4.

Exemplo

Tabela: Lucros das empresas

Tipo de Verão	Lucro do Hotel	Lucro da Indústria de Guarda-Chuvas
verão chuvoso	- R$ 1.000	R$ 4.500
verão ensolarado	R$ 2.000	- R$ 500

Exemplo

Sabe-se que 20% dos verões são chuvosos e 80% são ensolarados. Sejam as variáveis X_1 e X_2 o lucro do hotel São Sebastião e da indústria de guarda-chuvas São Sebastião respectivamente. Determine $cov(X_1, X_2)$. Qual é o fator de correlação entre X_1 e X_2?

Exemplo

Resposta: Temos que $E(X_1) = R\$\,1.400$, $E(X_2) = R\$\,500$, $\sigma_1 = 1200$, $\sigma_2 = 2000$, $cov(X_1, X_2) = -2.400.000,00$, e portanto $\rho = -1$. O sinal negativo indica que quando uma empresa vai bem a outra vai mal e vice versa. Mais ainda elas são perfeitamente negativamente correlacionadas.

Exemplo

Voltando ao exemplo do hotel, suponha que voce seja proprietário do hotel e da empresa de guarda-chuvas. Qual é o lucro esperado e risco do empreendimento?

Resposta: O lucro esperado é $E(X_1 + X_2) = E(X_1) + E(X_2) = R\$\,1.900$.
A variância é $\sigma^2 = \sigma_1^2 + \sigma_2^2 + 2\rho\sigma_1\sigma_2$, ou seja,
$\sigma^2 = 1.400.000 + 4.000.000 - 2 \times 1.400.000 \times 4.000.000 = 640.000$. Logo
$\sigma = 800 < \sigma_1 = 1.200 < \sigma_2 = 2.000$.

Exemplo

Suponha que você seja proprietário de $a\%$ do hotel e $(1-a)\%$ da fábrica de guarda chuvas. Qual deve ser o valor de a para você ter risco zero? Qual é o lucro esperado nesse caso ?

Resposta: Nesse caso o seu lucro é dado por:

$$X = aX_1 + (1-a)X_2$$

Como $\rho = -1$ e queremos risco zero, temos que

$$\begin{aligned}\sigma^2 = Var(X) &= a^2\sigma_1^2 + (1-a)^2\sigma_2^2 - 2a(1-a)\sigma_1\sigma_2 \\ &= (a\sigma_1 - (1-a)\sigma_2)^2 = 0\end{aligned}$$

Exemplo

Ou seja:

$$a\sigma_1 - (1-a)\sigma_2 = a(\sigma_1+\sigma_2) - \sigma_2 = 0 \longrightarrow a = \frac{\sigma_2}{\sigma_1+\sigma_2}.$$

No nosso exemplo:

$$a = \frac{2000}{1200+2000} = \frac{5}{8}.$$

e o lucro garantido é

$$X = aE(X_1) + (1-a)E(X_2) = \frac{5}{8}1400 + \frac{3}{8}500 = \frac{8500}{8} = 1062,50.$$

Exercício

Tabela: Média e Desvio Padrão de R_1 e R_2

	R_1	R_2
média	$14,5\%$	$9,25\%$
desvio padrão	$5,68\%$	$2,95\%$

Considere o retorno de um portfolio dado por:

$$P = \omega_1 R_1 + (1 - \omega_1) R_2$$

Supondo $\rho = -1$ qual é o valor de ω_1 que levará a um portfólio de risco zero? Qual será o retorno garantido nesse caso?

$$\omega_1 = \frac{\sigma_2}{\sigma_1 + \sigma_2} = \frac{2,95}{2,95 + 5,68} = 0,3418,$$
$$P = 0,3418 \times 14,5\% + 0,6582 \times 9,25\% = 11,044\%$$

Exemplo de 2 Ativos - Caso Geral

Tabela: Média e Desvio Padrão de R_1 e R_2

	R_1	R_2
média	μ_1	μ_2
desvio padrão	σ_1	σ_2

correlação entre R_1 e R_2 é ρ.

$$cov(R_1, R_2) = \rho\sigma_1\sigma_2.$$

Exemplo de 2 Ativos

$$\begin{aligned} P &= \omega_1 R_1 + (1-\omega_1) R_2, \\ \mu &= \omega_1 \mu_1 + (1-\omega_1)\mu_2 \\ &= (\mu_1 - \mu_2)\omega_1 + \mu_2 \end{aligned}$$

Exemplo de 2 Ativos

$$
\begin{aligned}
\sigma^2 &= a\omega_1^2 + b\omega_1 + c, \\
a &= \sigma_1^2 + \sigma_2^2 - 2\rho\sigma_1\sigma_2, \\
b &= -2\sigma_2(\sigma_2 - \rho\sigma_1), \\
c &= \sigma_2^2
\end{aligned}
$$

Exemplo de 2 Ativos

Pode-se obter também a composição do portfolio que fornece a variância (risco) mínimo. Para isto deve-se notar que para uma função

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

onde $a > 0$, o mínimo da função é em:

$$x_{\text{min}} = \frac{-b}{2a},$$

e o valor da função nesse ponto é:

$$f(x_{\text{min}}) = c - \frac{b^2}{4a}.$$

Exemplo de 2 Ativos

Voltando ao exemplo com dois ativos, considere uma carteira com rentabilidade P tal que

$$P = \omega_1 R_1 + (1 - \omega_1) R_2.$$

Temos que

$$Var(P) = 0,00437\omega_1^2 - 0,00201\omega_1 + 0,00087$$

A equação para o retorno é:

$$\begin{aligned} E(P) &= \omega_1 14,5\% + (1 - \omega_1) 9,25\% \\ &= 0,0525\omega_1 + 0,0925. \end{aligned}$$

Exemplo de 2 Ativos

Podemos obter a relação risco X retorno para vários valores de ω_1.
Obtemos a tabela abaixo:

Tabela: Relação risco X retorno para vários valores de ω_1

ω_1	risco	retorno
$0,0$	$2,95\%$	$9,25\%$
$0,1$	$2,67\%$	$9,78\%$
$0,2$	$2,53\%$	$10,30\%$
$0,3$	$2,57\%$	$10,83\%$
$0,4$	$2,76\%$	$11,35\%$
$0,5$	$3,09\%$	$11,88\%$
$0,6$	$3,51\%$	$12,40\%$
$0,7$	$4,00\%$	$12,93\%$
$0,8$	$4,53\%$	$13,45\%$
$0,9$	$5,10\%$	$13,98\%$
$1,0$	$5,68\%$	$14,5\%$

Exemplo de 2 Ativos

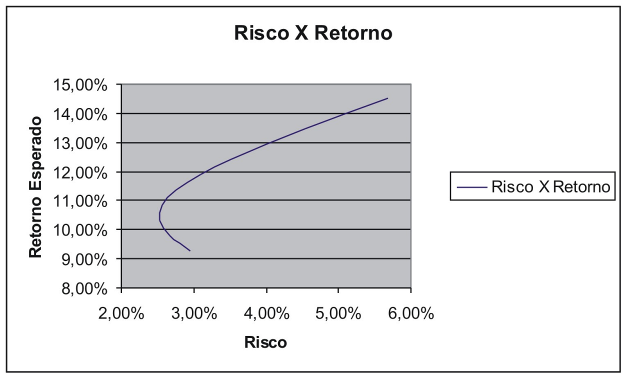

Figura: Gráfico Risco X Retorno

Exemplo de 2 Ativos

No nosso caso obtemos:

$$\begin{aligned} Var(P) &= 0,00437\omega_1^2 - 0,00201\omega_1 + 0,00087 \\ a &= 0,00437 \\ b &= -0,00201, \\ \omega_1 &= \frac{0,00201}{0,00874} = 0,23 \end{aligned}$$

Exemplo de 2 Ativos

Para esta composição de portfolio (23% no ativo 1, e 77% no ativo 2) obtemos o portfolio de risco mínimo, com

$$\sigma_{min} = 2,52\%,$$
$$\mu_{min} = 10,46\%$$

Percebe-se que $\sigma_{min} < \sigma_i$, $i = 1,2$ com $r_1 < \mu_{min} < r_2$, exemplificando o efeito da diversificação para redução dos riscos.

Exemplo de 2 Fundos

Considere dois fundos com as características abaixo:

Tabela: Média e Desvio Padrão do Fundo A e Fundo B

	A	B
média	12%	15%
desvio padrão	20%	18%

Suponha que o fator de correlação seja:

$$\rho = 0,277.$$

Vale a pena investir no Fundo A?

Tem-se que

$$\begin{aligned}
\mu &= 12\omega + 15(1-\omega) \\
\sigma^2 &= 0,2^2\omega^2 + 0,18^2(1-\omega)^2 + 2 \times 0,2 \times 0,18 \times 0,277 \times \omega(1-\omega) \\
&= 0,04\omega^2 + 0,0324(1-\omega)^2 + 0,02\omega(1-\omega) \\
&= 0,0524\omega^2 - 0,0448\omega + 0,0324
\end{aligned}$$

Considere a seguinte composição: 25% no Fundo A, 75% no Fundo B. Tem-se que $\omega = 0,25$ e

$$\mu = 12 \times 0,25 + 15 \times 0,75 = 14,25\%$$

$$\sigma^2 = 0,2^2 \times 0,25^2 + 0,18^2 \times 0,75^2 +$$

$$2 \times 0,2 \times 0,18 \times 0,277 \times 0,27 \times 0,75 = 0,0245$$

$$\sigma = 15,64\%.$$

Ou seja, através da diversificação conseguimos uma carteira com risco menor que os riscos dos Fundos A e B, e rentabilidade próxima à maior das rentabilidades.

$$\mu_A = 12\% < \mu = 14,25\% < \mu_B = 15\%$$

$$\sigma = 15,64 < \sigma_B = 18\% < \sigma_A = 20\%$$

A carteira de mínima variância é obtida fazendo

$$\omega = \frac{0,0448}{0,1048} = 42,75\%$$

Ou seja deve-se aplicar 42, 75% no Fundo A e 57, 25% no Fundo B. Tem-se nesse caso que:

$$\mu = 13,72\%,$$

$$\sigma = 15,10\%.$$

Exercício

Considere 2 ativos com retornos R_1 e R_2 e fator de correlação, médias, e desvios padrão dados por

$$\rho = -0,5, \; r_1 = 15\%, \; r_2 = 20\%, \; \sigma_1 = 20\%, \; \sigma_2 = 40\%.$$

Considere um portfolio com retorno

$$P = \omega_1 R_1 + (1 - \omega_1) R_2.$$

Item a)

Suponha que voce seja um investidor cauteloso, e que deseje um investimento de modo a minimizar o seu risco. Quanto voce deve alocar no ativo 1 e no ativo 2 nesse caso? Qual é o valor do retorno esperado e desvio padrão de seu portfolio nesse caso?

Item b)

Suponha agora que voce seja um investidor mais arrojado, e deseje um portfolio com desvio padrão $\sigma = 20\%$ e maior retorno esperado μ possível (isto é, maior que 15%). Isto é possível? Caso seja, determine a composição de seu portfolio e o valor esperado de seu retorno.

Vetor Gaussiano

$X = \begin{pmatrix} X_1 \\ \vdots \\ X_n \end{pmatrix}$ $\rightarrow$vetor gaussiano com parâmetros $\mu = \begin{pmatrix} \mu_1 \\ \vdots \\ \mu_n \end{pmatrix}$ e matriz n por n Σ. Neste caso a função densidade de probabilidade $f_X(x)$ é dada por

Vetor Gaussiano

$$f_X(x) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}(det(\Sigma))^{1/2}} exp\{-\frac{1}{2}(x-\mu)'\Sigma^{-1}(x-\mu)\}.$$

Verifica-se que $E(X) = \mu$ e $Cov(X) = \Sigma$. No caso em que as variáveis $X_1, \ldots, X_n$ são descorrelacionadas, tem-se que

$$\Sigma = \begin{pmatrix} \sigma_1^2 & \ldots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ldots & \sigma_n^2 \end{pmatrix}$$

Vetor Gaussiano

e segue que

$$f_X(x) = \prod_{i=1}^{n} \frac{1}{(2\pi)^{\frac{1}{2}}\sigma_i} exp\{-\frac{1}{2\sigma_i^2}(x_i - \mu_i)^2\} = f_{X_1}(x_1)\dots f_{X_n}(x_n),$$

ou seja, $X_1, \dots, X_n$ são independentes. Portanto para variáveis aleatórias conjuntamente gaussianas, descorrelacionadas é equivalente a independentes.

Vetor Gaussiano

Outra propriedade importante é que se X é um vetor gaussiano com parâmetros μ e Σ, e

$$Y = AX + b,$$

então Y também é um vetor gaussiano com vetor de média μ_Y e matriz de covariância Σ_Y dados por

$$\mu_Y = A\mu + b,$$
$$\Sigma_Y = A\Sigma A'.$$

Value at Risk

O retorno P de um portfolio é dado por

$$P = \omega' R = \omega_1 R_1 + \ldots + \omega_n R_n$$

onde R representa o vetor com os retornos dos ativos e ω o vetor com as proporções investidas em cada ativo. Suponha que R seja um vetor gaussiano, com média μ e matriz de covariancia Σ. Considere também o valor inicial da carteira como sendo V_0. Qual é a perda máxima da carteira com 95% de chances?

Value at Risk

Pelo exemplo anterior temos que P também é gaussiano com média $\mu_P = \omega'\mu$ e variância $\sigma_P^2 = \omega'\Sigma\omega$. Temos também que o valor final da carteira é dado por: $V_f = (1+P)V_0 = V_0 + V_0 P$ e portanto V_f também é uma variável gaussiana com média $\mu_{V_f} = (1+\mu_P)V_0$ e variância $\sigma_{V_f}^2 = V_0^2\sigma_P^2$. Temos dessa forma que

Value at Risk

$$\frac{V_f - (1+\mu_P)V_0}{V_0\sigma_P}$$

é uma variável aleatória gaussiana padrão, e portanto pela tabela segue que

$$P\Big(\frac{V_f - (1+\mu_P)V_0}{V_0\sigma_P} \leq -1,65\Big) = 0,05.$$

Ou seja, com 95% de chances,

$$V_f \geq V_0\Big[(1+\mu_P) - 1,65\sigma_P\Big].$$

Value at Risk

Considerando o exemplo anterior, temos que $\mu_P = 13,72\%$ e $\sigma_P = 15,10\%$. Segue que

$$(1 + \mu_P) - 1,65\sigma_P = 1,1372 - 0,24915 = 0,88805.$$

Ou seja, com 95% de chances, a perda máxima da carteira (Var) será de 11,195%.