7600054 — Sistemas Complexos

Gonzalo Travieso

2020-03-18

Outline

Representação de estado

Podemos representar o estado de um sistema através de um conjunto de variáveis, que por conveniência representaremos como um vetor

$$\mathbf{x} \in \mathcal{S},$$

onde $\mathcal{S}$ é o conjunto de todos os valores possíveis para as variáveis de estado.

Exemplos

- O estado de uma lâmpada pode ser representado por uma variável com os valores *acesa* ou *apagada*.
- O estado de um conjunto de lâmpadas de enfeite que piscam todas juntas também pode ser representado apenas por uma variável com dois valores: *aceso* e *apagado*.
- Se cada lâmpada pode ser acendida ou apagada independentemente, então precisamos n variáveis que podem ter dois valores, onde n é o número de lâmpadas no enfeite.
- Se das diversas lâmpadas do enfeite exatamente uma é acendida por vêz, então o estado é um inteiro indicando qual a lâmpada está acesa.

Exemplos (cont.)

- O estado de um gás em equilíbrio pode ser representado por temperatura e pressão. Usando SI ambos terâo valores reais positivos.
- O estado de uma partícula pode ser representado pela sua posição e velocidade. Ambos serão representados por um vetor tridimensional.
- Um sistema com m partículas no espaço tridimensional necessita de m vetores para a posição e m vetores para a velocidade, e portanto tem um total de $n = 6m$ variáveis de estado.

Espaço de Estado ou Espaço de Fase

- Se o vetor $\mathbf{x} \in \mathcal{S}$ consiste num conjunto mínimo de valores suficiente para descrever o estado do sistema, então dizemos que $\mathcal{S}$ é o espaço de estado ou espaço de fase do sistema.
- O espaço de fase inclui todos os valores de estado possíveis do sistema.
- O espaço de fase depende da representação usada.

Exemplos

- Para uma lâmpada, o espaço de estado é o conjunto $\{\mathrm{L}, \mathrm{D}\}$, usando L para a lâmpada acesa e D para a lâmpada apagada.
- Para n lâmpadas independentes, o espaço de estado é o conjunto $\{\mathrm{L}, \mathrm{D}\}^n$. Por exemplo, com $n = 2$, $\{(\mathrm{D}, \mathrm{D}), (\mathrm{D}, \mathrm{L}), (\mathrm{L}, \mathrm{D}), (\mathrm{L}, \mathrm{L})\}$.
- Para um sistema com n partículas, usando representação cartesiana, o espaço de estado é (ignorando a relatividade) $\mathbb{R}^{6n}$.
- Para uma partícula, podemos usar representação cartesiana, caso em que o espaço de estado será $\mathbb{R}^6$, ou representação esférica, caso em que o espaço será $[0, 2\pi) \times [0, \pi] \times \mathbb{R}^3$.

Sistema dinâmico

- Um sistema cujo estado evolui com o tempo.
- Representação matemática:

  Tempo contínuo Um sistema de equações diferenciais

  $$\frac{d}{dt}\mathbf{x}(t) = \mathbf{f}(\mathbf{x}(t), t).$$

  Tempo discreto Uma equação de recorrência

  $$\mathbf{x}_{t+1} = \mathbf{f}(\mathbf{x}_t, t)$$

Em ambos os casos, $\mathbf{f}$ é uma função vetorial, com n componentes $f_i(\mathbf{x}) = f_i(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ onde n é o número de variáveis de estado.

Exemplos

- $$\frac{dx}{dt} = 2x.$$

  Neste caso, $f(x) = 2x$.

- $$x_{t+1} = 2x_t.$$

  Neste caso, $f(x) = 2x$.

- $$\begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &= 3x_1 + x_2, \qquad (1) \\ \frac{dx_2}{dt} &= x_1 - 2x_2. \qquad (2) \end{aligned}$$

Neste caso, $f_1(x_1, x_2) = 3x_1 + x_2$ e $f_2(x_1, x_2) = x_1 - 2x_2$.

Equações de primeira ordem

Na descrição do sistema dinâmico, usamos equações de primeira ordem:

- equações diferenciais de primeira ordem: apenas primeiras derivadas em relação ao tempo;
- equação de recorrência de primeira ordem: apenas valores do instante anterior aparecem no expressão de recorrência

Equações de mais alta ordem podem ser reduzidas para primeira ordem pela inserção de novas variáveis.

Exemplos

- $\frac{d^2x}{dt^2} = -x$ é de segundo grau. Reduzimos a primeiro grau introduzindo $v = dx/dt$:

$$\frac{dx}{dt} = v \tag{3}$$

$$\frac{dv}{dt} = -x. \tag{4}$$

- $x_{t+1} = 2x_t - x_{t-1} + x_{t-2}$ é de terceiro grau. Reduzimos para primeiro grau introduzindo $y_t = x_{t-1}$ e $z_t = x_{t-2}$:

$$x_{t+1} = 2x_t - y_t + z_t \tag{5}$$

$$y_{t+1} = x_t \tag{6}$$

$$z_{t+1} = y_t. \tag{7}$$

Sistema autônomo

- Também denominado *fixo* ou *invariante no tempo* ou *estacionário*, é um sistema cuja evolução no tempo não depende explicitamente do tempo:
$$\frac{d}{dt}\mathbf{x}(t) = \mathbf{f}(\mathbf{x}(t))$$
ou
$$\mathbf{x}_{t+1} = \mathbf{f}(\mathbf{x}_t).$$
- Nos ocuparemos apenas de sistemas autônomos.
- Sistemas não-autônomos podem ser transformados em autônomos inserindo uma variável de estado para representar o tempo.

Exemplos

- $\frac{dx}{dt} = 2x$ é autônomo.
- $\frac{dx}{dt} = x + 2t$ não é autônomo.
- Podemos transformar o sistema do item anterior em autônomo incluindo a variável de estado $y = t$:

$$\frac{dx}{dt} = x + 2y, \tag{8}$$

$$\frac{dy}{dt} = 1. \tag{9}$$

Sistema Mecânico

- Um sistema que pode ser escrito na forma

$$\frac{d^2x_i}{dt^2} = f_i(\mathbf{x}, \frac{d}{dt}\mathbf{x}) \quad i = 1 \dots r$$

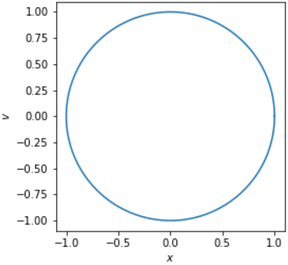
  é chamado um sistema mecânico.
- r é denominado graus de liberdade.
- O espaço de estado tem $2r$ dimensões.

Órbita ou Trajetória

- A solução das equações de um sistema dada uma condição inicial é chamada um órbita ou trajetória no espaço de estado.
- A condição inicial é um ponto no espaço de estado, e a órbita associada diz para onde o sistema será levado partindo desse ponto.
- Em sistemas determinísticos, dado que o sistema está no ponto $\mathbf{x}_0$ no instante t_0, a órbita para $t > t_0$ é única
- O conjunto de todas as possíveis trajetórias de um sistema no espaço de estado é denominado retrato de fase (*phase portrait*).

Exemplo

- O sistema $\frac{d^2x}{dt^2} = -x$ com $x = 1$ e $\frac{dx}{dt} = 0$ em $t = 0$ tem como órbita $x(t) = \cos(t)$ para $t > 0$.
- Neste caso, $\frac{dx}{dt} = -\sin(t)$.
- O sistema fica, portanto, restrito ao círculo unitário (unidimensional) no espaço de fase bidimensional.



Constantes de Movimento ou Quantidade Convervada

- Uma função $F(\mathbf{x})$ no espaço de estado de um sistema é uma constante de movimento se ela é conservada pela evolução do sistema, isto é, ela é constante em cada órbita (mas pode variar de uma órbita para outra).
- Em sistemas de tempo contínuo:

$$\frac{d}{dt}F(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i} F(\mathbf{x}) \frac{d}{dt} x_i \equiv 0.$$

Sistema Mecânico Integrável

- Um sistema mecânico com r graus de liberdade e r constantes de movimento independentes $F_k(\mathbf{x}, \frac{d}{dt}\mathbf{x})$, $k = 1 \ldots r$ é chamado integrável.
- O movimento desses sistemas no espaço de estado de $2r$ dimensões é restrito a um subspaço de r dimensões.

Sistema Ergódico

- Um sistema dinâmico cujas órbitas chegam arbitrariamente próximo de qualquer ponto no espaço de estado, independente de condições iniciais, é denominado ergódico.
- A ergodicidade só é válida considerando as constantes de movimento, isto é, chega-se arbitrariamente próximo de qualquer ponto partindo de condições iniciais que tenham constantes de movimento arbitrariamente próximas das do ponto desejado.