

ELEMENTOS DE MÁQUINAS (SEM 0241)

Notas de Aulas v.2018

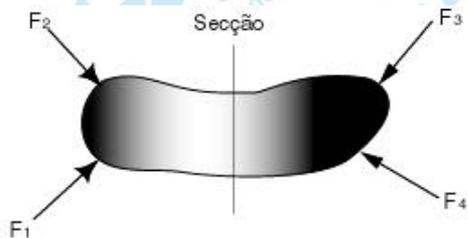
Aula 03 – Resistência dos Materiais aplicada à elementos de máquinas

Professores: Ernesto Massaroppi Junior
Jonas de Carvalho
Carlos Alberto Fortulan

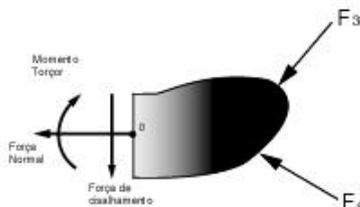
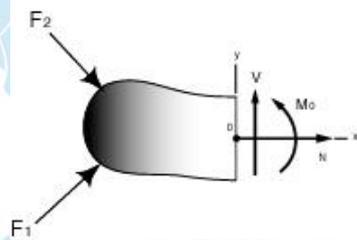
Aula 03 – RM aplicada a elementos de máquinas

O projeto de um elemento de máquina se inicia com a especificação de sua função: recebem e transmitem esforços. Os principais são: eixos, fusos, mancais, chavetas, engrenagens, polias, molas, componentes estruturais e outros.

Em muitos casos um diagrama de corpo livre é construído para a determinação da atuação das forças e momentos.



$$\Sigma F=0 \rightarrow \Sigma F_x=0; \Sigma F_y=0; \Sigma F_z=0$$

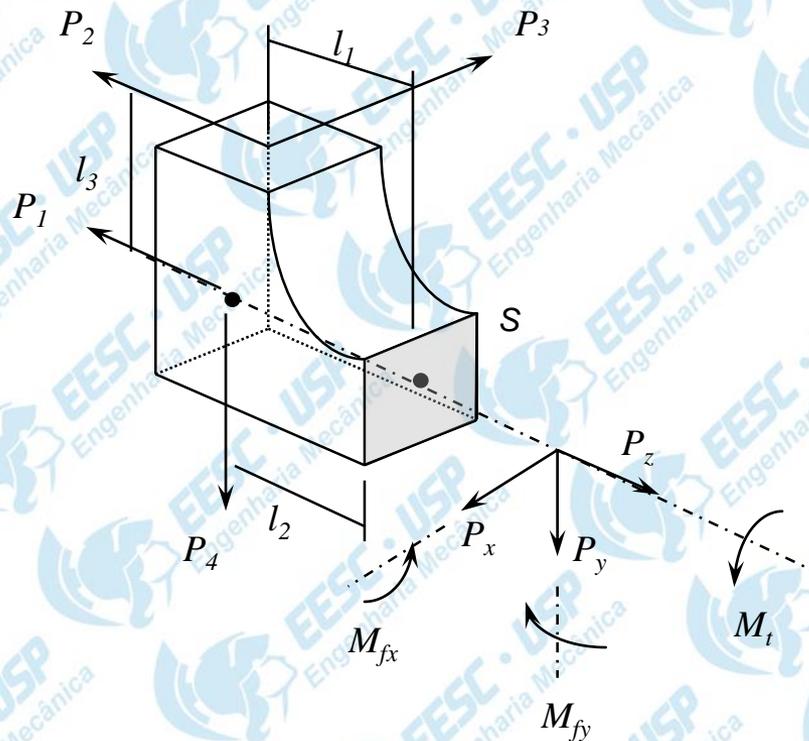


$$\Sigma M_0=0 \rightarrow \Sigma M_x=0; \Sigma M_y=0; \Sigma M_z=0$$

Forças externas e internas atuante nos elementos

- Força externa – devido a energia, potência ou torque transmitidos para parte da máquina, chamado de "*carga útil*";
- Força estática - devido ao peso das estruturas "*peso morto*";
- Força devido à resistência ao atrito;
- Força de inércia devido à mudança na velocidade linear ou angular;
- Força centrífuga devido à mudança na direção da velocidade;
- Força devido ao gradiente térmico ou variação de temperatura;
- Força devido à forma particular da peça, como a concentração de tensão devido à mudança abrupta na seção transversal.
- Outras forças...

3.1- Esforços solicitantes



P_z - Força normal

P_x, P_y - Forças cortantes

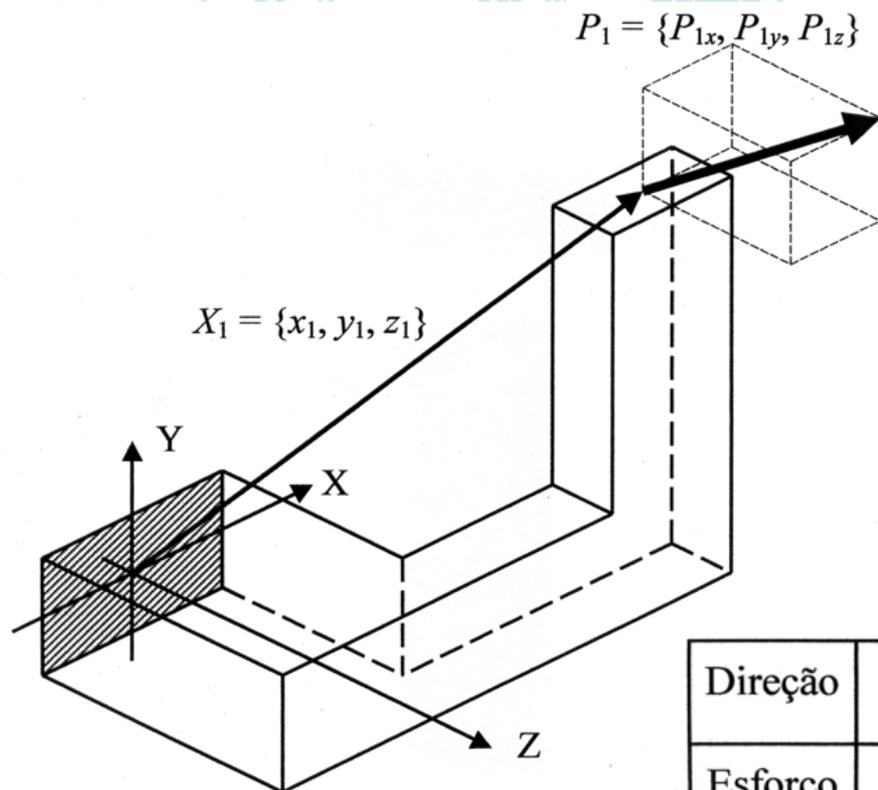
M_{fx}, M_{fy} - Momentos de flexão

M_t - Momento de torção

Condições de equilíbrio na seção S:

$$\begin{cases} P_x - P_3 = 0 \\ P_4 + P_y = 0 \\ P_z - P_1 - P_2 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} M_{fx} + P_2 \cdot L_3 + P_4 \cdot L_2 = 0 \\ M_{fy} + P_3 \cdot L_1 = 0 \\ M_t - P_3 \cdot L_3 = 0 \end{cases}$$



Condições de equilíbrio

Direção	X	Y	Z	θX	θY	θZ
Esforço	Q_x	Q_y	N_z	M_{fx}	M_{fy}	M_{tz}
P_{1x}	$+ P_{1x}$	-----	-----	-----	$+ P_{1x} \cdot z_1$	$- P_{1x} \cdot y_1$
P_{1y}	-----	$+ P_{1y}$	-----	$- P_{1y} \cdot z_1$	-----	$+ P_{1y} \cdot x_1$
P_{1z}	-----	-----	$+ P_{1z}$	$+ P_{1z} \cdot y_1$	$- P_{1z} \cdot x_1$	-----

3.2 - Reações vinculares - Diagramas M, N, Q

Determinação estática

- Regime elástico
 - Indeterminado (móvel) , hipostático
 - Determinado , isostático
 - Superdeterminado , hiperestático

✓ Sistemas móveis: Não suportam carga (Exceções - corda pendurada);

✓ **Sistemas isostáticos: Normais.**

✓ Sistemas hiperestáticos : Cálculos mais difíceis (Elementos Finitos);

Condições de equilíbrio

$$\sum F_x = 0$$

$$\sum F_y = 0$$

$$\sum M = 0$$

Tensões Principais

$$\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$$

Direções Principais

$$\alpha, \beta, \gamma$$

REAÇÕES
VINCULARES

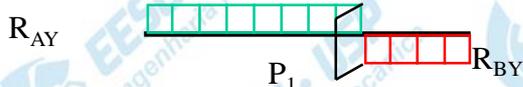
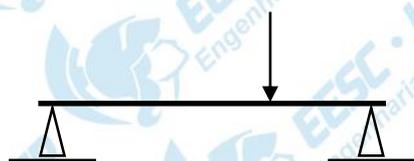
DIAGRAMAS
M, N, Q

σ, τ

Modelagem (hipóteses simplificadoras)

As forças que atuam no elemento de máquina são assumidas como sendo concentradas em alguns pontos ou distribuídas em áreas específicas.

A experiência é essencial para fazer tais pressupostos na análise dos esforços.



Convenção de sinal:

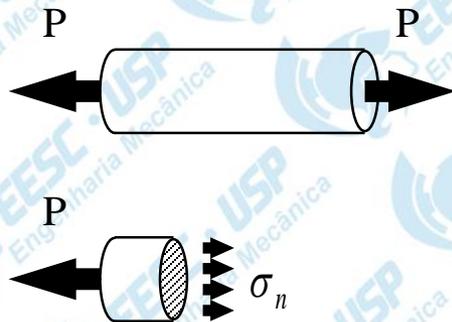
(N) { + tração
- Compressão

(Q) { + sentido horário
- sentido anti-horário

(M) { + tração no lado inferior (desenha-se diagrama do lado tracionado)

	Mancal	Representação	Simb.	Tipo da Reação		Restrição de Liberdade
				no plano	no Espaço	
Livre	Transversal			F_{Ay}	F_{Ay}, F_{Az}	1 2
	Articulado			F_{Ay}	F_{Az}	1 1
	Rolo			F_{Ay}	$(F_{Ay}), F_{Az}$	1 1 (2)
	Pendular ou corda			F_A	F_A	1 1
Bloqueado	Transversal e Longitudinal			F_{Ax}, F_{Ay}	F_{Ax}, F_{Ay}, F_{Az}	2 3
	Articulado			F_{Ax}, F_{Ay}	F_{Ax}, F_{Ay}, F_{Az}	2 3
	Engastado			F_{Ax}, F_{Ay}, M_E	M_{Lx}, M_{Ly}, M_{Lz} F_{Ax}, F_{Ay}, F_{Az}	3 6

3.3- Tensão normal



Estado uniaxial de tensão

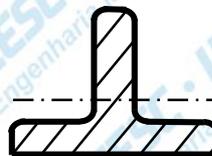
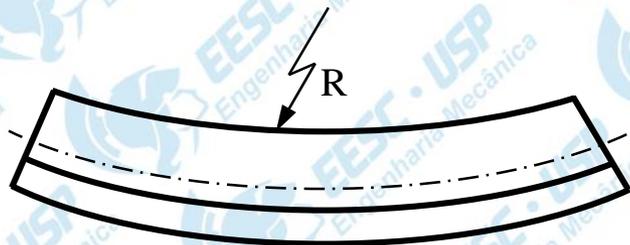
$$\sigma_n = \frac{P}{S}$$

[N/m²]
[MPa]

Sistema de unidades:

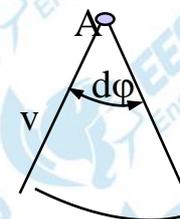
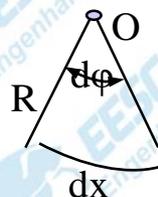
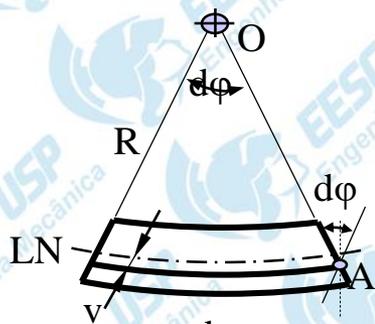
- Cuidado!
- Dê preferência ao S.I. (MKS)
- Pode-se usar unidades de maior sensibilidade para engenharia (Kgf/mm²).

3.4 - Tensão normal oriunda de momento fletor



HIPÓTESES:

- Flexão pura (só Momento fletor)
- Seções planas permanecem planas após flexão
- Raio de curvatura R para cada ponto



Arco = raio x ângulo

$$S = R \cdot \theta$$

Acréscimo em dx

$$\varepsilon = \frac{\Delta l}{l} = \frac{v \cdot d\phi}{dx}$$

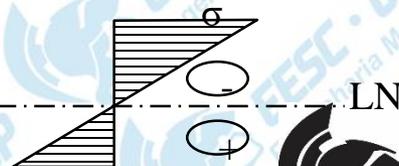
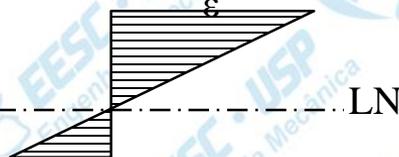
$$dx = R \cdot d\phi$$

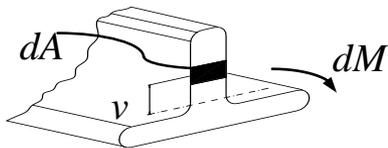
$$\varepsilon = \frac{v}{R} \frac{d\phi}{d\phi} \Rightarrow \text{mas } \varepsilon = \frac{1}{R} v \Rightarrow \varepsilon \propto v$$

Lei de Hooke

$$\sigma = E \varepsilon$$

$$\Rightarrow \sigma = \frac{1}{R} E \cdot v$$





- Num elemento de área
- Não há força normal na seção devida à flexão

$$\Rightarrow dF = \sigma \cdot dA$$

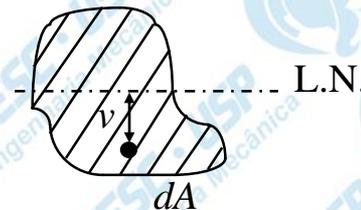
$$\Rightarrow F = \int_s \sigma \cdot dA = 0$$

$$\int \frac{E \cdot v}{R} \cdot dA = 0 \Rightarrow \int_s v \cdot dA = 0$$

\Rightarrow LN passa pelo CG na flexão simples

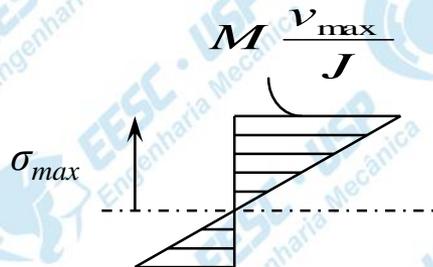
$$dF = \sigma \cdot dA \quad \text{e} \quad dM = dF \cdot v = v \cdot \sigma \cdot dA$$

$$M = \int_s v \cdot \sigma \cdot dA = \int_s v \cdot \frac{E \cdot v}{R} \cdot dA = \frac{E}{R} \cdot \underbrace{\int_s v^2 \cdot dA}_J$$



Segundo momento de área ou momento de inércia de área

$$\sigma = \frac{1}{R} E \cdot v \Rightarrow \frac{E}{R} = \frac{\sigma}{v} \Rightarrow M = \sigma \cdot \frac{J}{v} \Rightarrow \boxed{\sigma = M \cdot \frac{v}{J}}$$

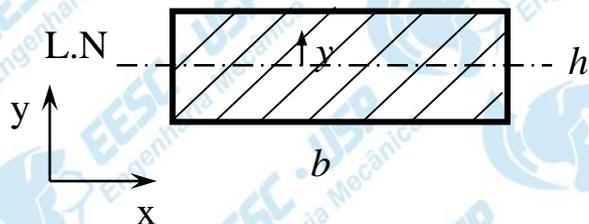


$$\Rightarrow \boxed{\sigma_{max} = \frac{M}{W_f}} \quad \text{com} \quad W_f = \frac{J}{v_{max}}$$

$W_f =$ Módulo de resistência à flexão

Determinação de J de seções

a) Seções simples



$$J_x = \int_S y^2 \cdot dS = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} b \cdot y^2 \cdot dy = b \cdot \frac{y^3}{3} \Big|_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}}$$

$$J_x = \frac{b \cdot h^3}{12}$$

$$J_y = \frac{b^3 \cdot h}{12}$$

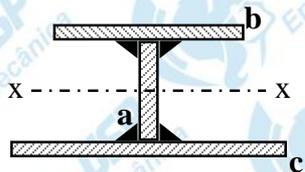
Seções simples



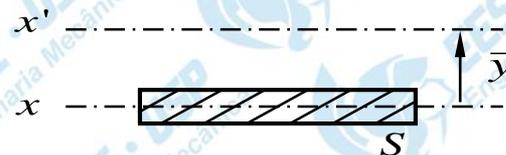
Tabelas de J 's

c) Seções compostas

c₁) Teorema dos eixos paralelos ou de Steiner



$$J_{x'} = J_x + \bar{y}^2 \cdot dS$$



No exemplo acima:

$$J_{x-x} = b_a \cdot h_a^3 \cdot \frac{1}{12} + b_b \cdot h_b^3 \cdot \frac{1}{12} + \left(\frac{h_a}{2} + \frac{h_b}{2} \right)^2 \cdot b_b \cdot h_b + b_c \cdot h_c^3 \cdot \frac{1}{12} + \left(\frac{h_a}{2} + \frac{h_c}{2} \right)^2 \cdot b_c \cdot h_c$$

OBS: x-x da figura pode não ser L.N. !

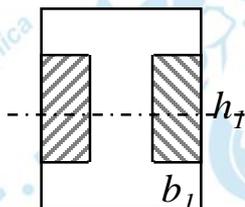
c₂) Soma de J's

$$J_x = \int_S y^2 \cdot dS$$

$$\int_{S_1 \pm S_2} f(x) \cdot dx = \int_{S_1} f(x) \cdot dx + \int_{S_2} f(x) \cdot dx$$

$$J = \sum J_i$$

Referidos ao mesmo eixo !



$$J_{\text{perfil}} = J_{\text{total}} - 2 \cdot \frac{b_1 \cdot h_1^3}{12}$$

$$J_{\Delta} = \frac{1}{2} \cdot J_{\circ}$$

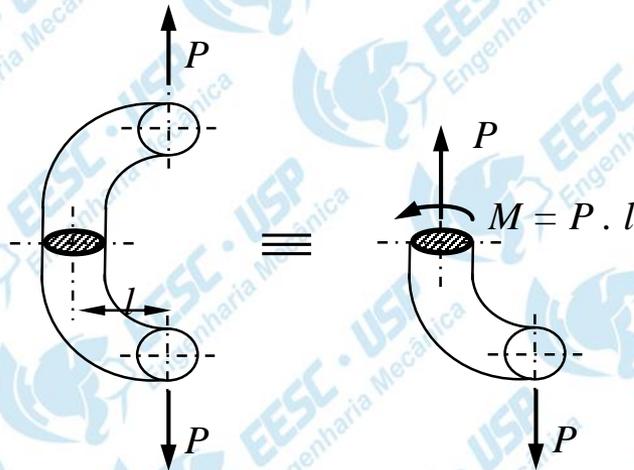
$$J_{\Delta} = \frac{\pi d^4}{128}$$



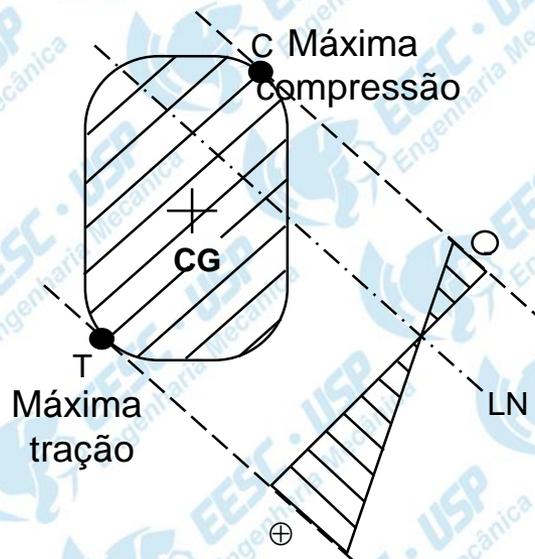
3.6- Tensão normal resultante de força normal e momento fletor

Princípio da superposição:

- Efeito de carregamento complexo é a soma de efeitos de carregamentos simples.
- Válido para pequenas deformações em regime elástico



$$\sigma = \frac{P_X}{S} + \frac{M_{fx}}{J_X} \cdot y + \frac{M_{fy}}{J_Y} \cdot x$$

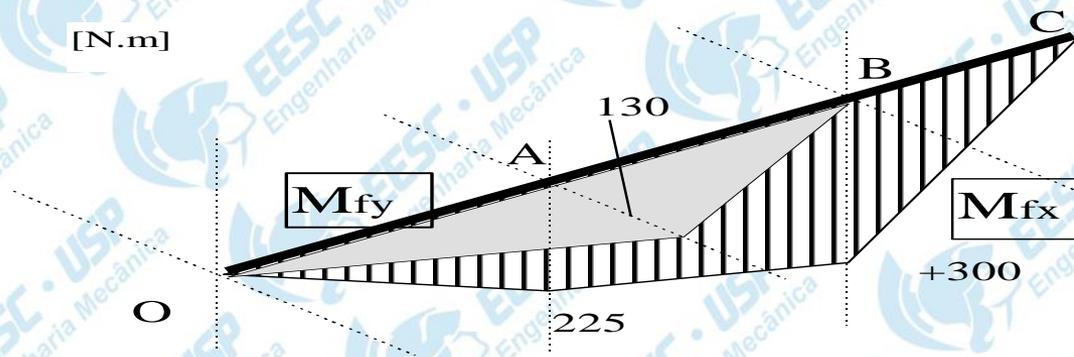


Impondo $\sigma = 0$:

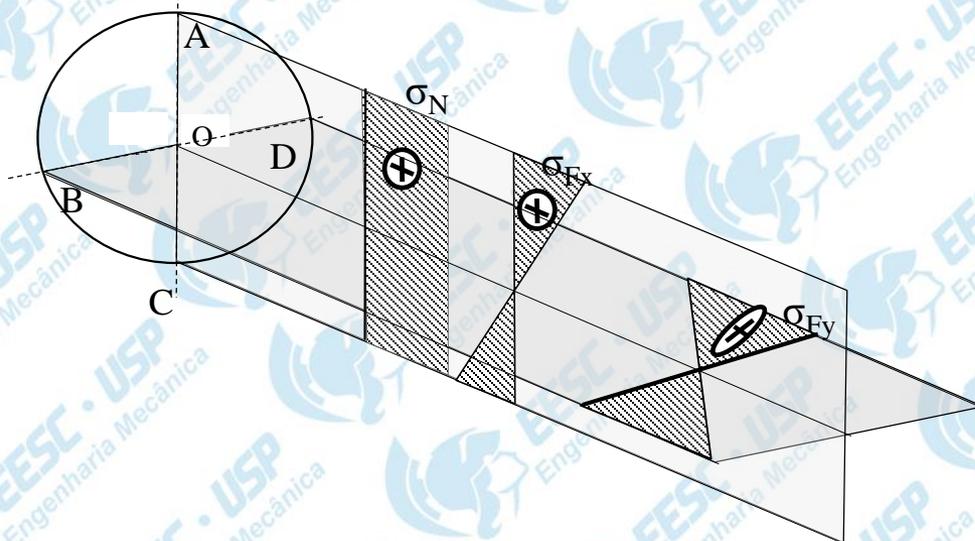
$$A \cdot x + B \cdot y + C = 0 \quad (\text{Equação da LN})$$

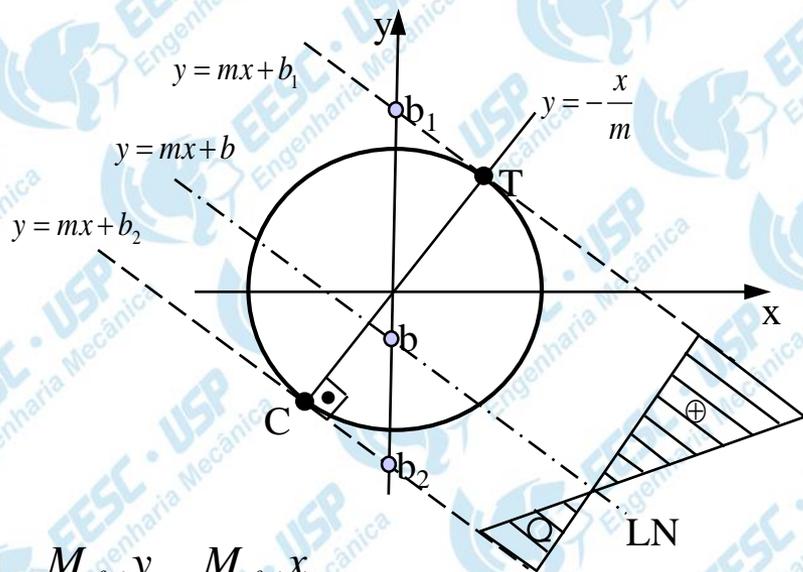
LN não passa pelo CG !

$$\sigma_{\max - \text{tração}} = \sigma_T = \frac{P_Z}{S} + \frac{M_{fx}}{J_X} \cdot y_T + \frac{M_{fy}}{J_Y} \cdot x_T$$



Notar que os momentos M_{fx} e M_{fy} (como na figura acima) e as tensões normais devidas a eles estão em planos diferentes, normais entre si (como na figura abaixo). As tensões normais entretanto tem a mesma direção e portanto podem ser somadas.





$$\sigma = \frac{P_Z}{S} + \frac{M_{fx} \cdot y}{J_X} + \frac{M_{fy} \cdot x}{J_Y}$$

Para $\sigma = 0 \rightarrow$ Equação da LN

$$y = - \left(\frac{M_{fy}}{M_{fx}} \cdot \frac{J_X}{J_Y} \right) \cdot x - \frac{P_Z}{S} \cdot \frac{J_X}{M_{fx}}$$

$$y = m \cdot x + b \Rightarrow$$

$$\begin{cases} m = - \frac{M_{fy}}{M_{fx}} \\ b = - \frac{P_Z \cdot J}{S \cdot M_{fx}} \end{cases}$$

Pontos de tração e compressão máximas:

$$\begin{cases} y = - \frac{1}{m} \cdot x \\ y^2 + x^2 = r^2 \end{cases} \Rightarrow \left(- \frac{1}{m} \cdot x \right)^2 + x^2 = r^2 \quad x^2 = \frac{r^2}{1 + \frac{1}{m^2}} \quad y^2 = \frac{r^2}{1 + m^2}$$

$$x^2 = \frac{1}{1 + \left(-\frac{M_{fy}}{M_{fx}}\right)^2} \cdot r^2 = \frac{M_{fy}^2}{M_{fy}^2 + M_{fx}^2} \cdot r^2 \quad x_{T,C} = \pm \frac{M_{fy} \cdot r}{\sqrt{M_{fy}^2 + M_{fx}^2}}$$

$$y^2 = \frac{1}{1 + \left(-\frac{M_{fx}}{M_{fy}}\right)^2} \cdot r^2 = \frac{M_{fx}^2}{M_{fx}^2 + M_{fy}^2} \cdot r^2 \quad y_{T,C} = \pm \frac{M_{fx} \cdot r}{\sqrt{M_{fx}^2 + M_{fy}^2}}$$

$$M_R = \sqrt{M_{fx}^2 + M_{fy}^2} \quad \rightarrow \text{momento resultante}$$

como $\sigma = \frac{P_Z}{S} + \frac{1}{J} \cdot (M_{fx} \cdot y + M_{fy} \cdot x)$, temos:

$$\sigma_T = \frac{P_Z}{S} + \frac{1}{J} \cdot \left(M_{fx} \cdot \frac{M_{fx} \cdot r}{\sqrt{M_{fx}^2 + M_{fy}^2}} + M_{fy} \cdot \frac{M_{fy} \cdot r}{\sqrt{M_{fx}^2 + M_{fy}^2}} \right)$$

$$\sigma_T = \frac{P_Z}{S} + \frac{r}{J} \cdot \left(\frac{M_{fx}^2 + M_{fy}^2}{M_R} \right) = \frac{P_Z}{S} + \frac{r}{J} \cdot \frac{M_R^2}{M_R}$$

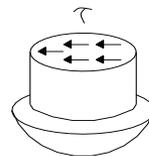
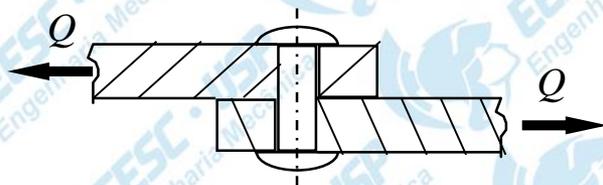
$$\sigma_T = \frac{P_Z}{S} + \frac{r}{J} \cdot M_R \quad \text{ou} \quad \sigma_T = \frac{P_Z}{S} + \frac{M_R}{W_f}$$

$$W_f = \text{módulo de resistência à flexão} = \frac{J}{r}$$

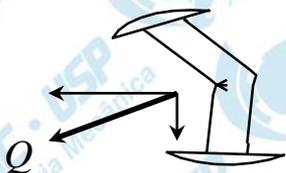
para $\left| \frac{P_Z}{S} \right| > \left| \frac{M_R}{W_f} \right| \Rightarrow$ só tração ou só compressão

3.7- Tensão de cisalhamento

a) Cisalhamento puro (“corte”)



$$\tau_m = \frac{Q}{S}$$



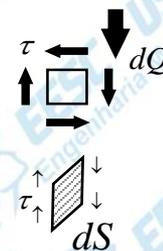
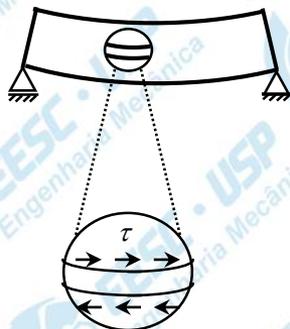
- distribuição de τ não é uniforme sobre a seção transversal
- despreza-se flexão e normal

$$\tau_{m(adm)} \leq \tau_{adm} = 0.55 \text{ a } 0.60 \cdot \sigma_{adm} \Rightarrow \text{Fadiga}$$

$$\tau_{m(adm)} \leq \tau_{adm} = 0.80 \cdot \sigma_{adm} \Rightarrow \text{Estático}$$

b) Cisalhamento em flexão (efeito Q)

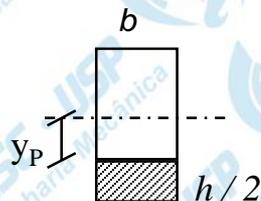
b.1- em uma viga de seção retangular



$$\int_S \tau \cdot dS = dQ$$

$$\tau = \frac{Q \cdot M_S}{b \cdot J}$$

M_S = Momento estático da seção



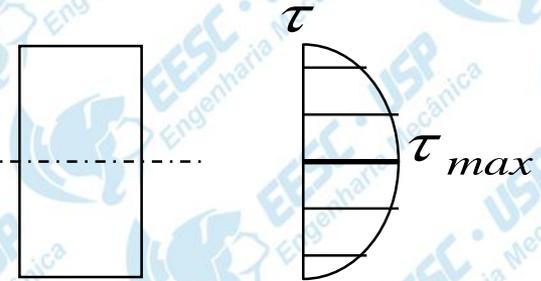
$$M_S = \int_{y_P}^{\frac{h}{2}} y \cdot dS = b \cdot \frac{y^2}{2} \Big|_y^{\frac{h}{2}}$$

$$M_S = \frac{b}{2} \cdot y^2 \Big|_y^{\frac{h}{2}} = \frac{b \cdot h^2}{8} \cdot \left[1 - \left(\frac{2 \cdot y}{h} \right)^2 \right]$$

** A tensão de cisalhamento devido a cortante será máxima na linha neutra ($y=0$) e nula na fibra externa ($y=h/2$), o inverso do que é observado nas tensões normais devido a flexão, raramente um estado de tensão originará situação de tensão no interior pior que o verificado nas fibras externas.

$$M_S = A \cdot B \cdot y^2$$

- Quadrática em y
- Depende da forma da seção



$$\tau_{\text{retang}} = \frac{3}{2} \cdot \frac{Q}{b \cdot h} \cdot \left[1 - \left(\frac{2 \cdot y}{h} \right)^2 \right], \quad \tau_{\text{max}} = \frac{3}{2} \cdot \frac{Q}{b \cdot h} = \frac{3}{2} \cdot \tau_{\text{med}}$$

b.2- em uma eixo de seção circular

$$\tau \cdot dx \cdot dz = dT_x$$

$$T_x = \int_y^{y_1} \frac{M_x}{J} \cdot y \cdot dS = \frac{M_x}{J} \cdot M_s$$

$$T_{x+dX} = \frac{M_{x+dX}}{J} \cdot M_s$$

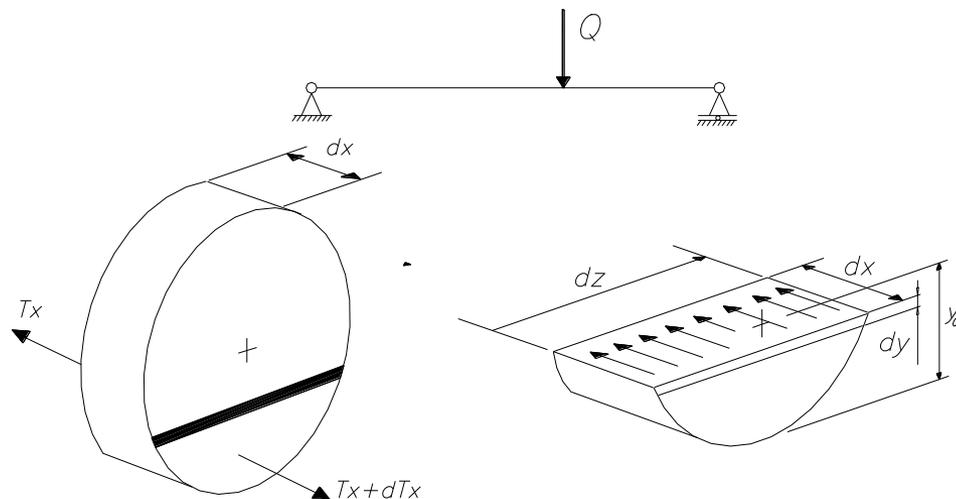
$$\therefore dT_x = T_{x+dX} - T_x = \frac{M_{x+dX} - M_x}{J} \cdot M_s$$

como $dM = Q \cdot dx$ temos:

$$\tau \cdot dx \cdot dz = dT_x = \frac{Q \cdot dx}{J} \cdot M_s$$

$$\tau \cdot dz = \frac{Q}{J} \cdot M_s$$

$$\tau(y) = \frac{Q}{J} \cdot \frac{1}{dz} \cdot M_s$$



$$\tau_{\Theta} = \frac{Q}{J} \cdot \frac{1}{dz} \cdot \int_y^r y \cdot dS = \frac{Q}{J} \cdot \frac{1}{dz} \cdot \int_y^r y \cdot dz \cdot dy$$

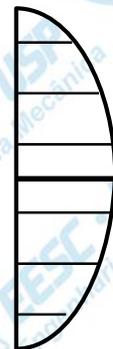
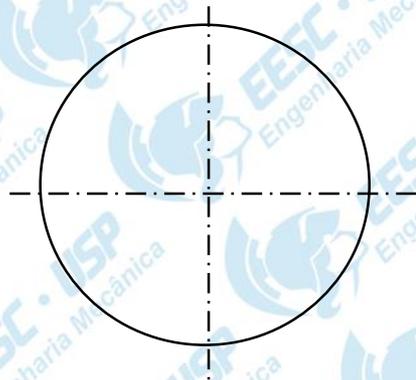
$$\tau_{\Theta}(y) = \frac{Q}{J} \cdot \int_y^r y \cdot dr = \frac{Q}{J} \cdot \frac{y^2}{2} \Big|_y^r = \frac{Q}{J} \cdot \left(\frac{r^2}{2} - \frac{y^2}{2} \right)$$

para seção circular:

$$J = \frac{\pi \cdot d^4}{64} = \frac{\pi \cdot r^4}{2}$$

$$\tau(y) = \frac{Q}{\pi \cdot r^4} \cdot \frac{r^2}{2} \cdot \left[1 - \left(\frac{y}{r} \right)^2 \right] = \frac{4}{3} \frac{Q}{\pi \cdot r^2} \cdot \left[1 - \left(\frac{y}{r} \right)^2 \right]$$

$$\tau_y = \tau_m \cdot \left[1 - \left(\frac{y}{r} \right)^2 \right]$$



$$\tau_{\max} = \frac{4}{3} \frac{Q}{\pi \cdot r^2}$$

Observações:

1. τ não é distribuído uniformemente e depende da forma da seção

2. Para $\frac{l}{h} > 5$, ($l =$ vão) τ_{\max} é 2% a 5% de $\sigma_{\text{flexão}}$

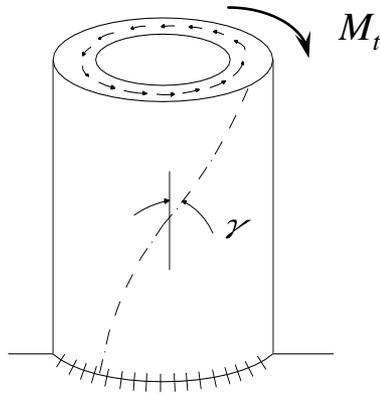
\Rightarrow desprezível! Se $\frac{l}{h} < 3$ a teoria apresentada não vale!

3. Em alguns casos somente se preocupa com τ na flexão.

Ex: colagem, rebites

4. Se a seção não é simétrica em relação a P_y , Q não se aplica no C.G. mas no centro de torção T da seção.

3.8- Tensão de cisalhamento devido ao Momento Torçor



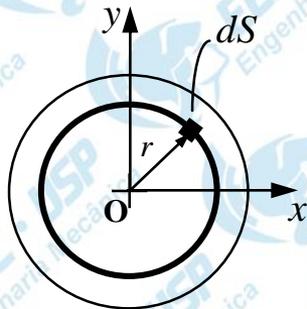
$$\tau = G \cdot \gamma$$

$$G = \frac{E}{2 \cdot (1 + \nu)}$$

$$\tau_{\max} = \frac{M_t}{W_t} \quad ; \quad W_t = \frac{J_t}{y_{\max}}$$

- Distribuição de τ não é linear em geral
- empenamento (*warp*) em seções não-circulares

Momento de Inércia de Torção (Polar) : J_T ou J_Z



$$J_p = \int r^2 ds \quad \text{mas} \quad r^2 = x^2 + y^2 \quad \text{quando} \quad O \equiv CG$$

$$J_p = \int r^2 dS = \int x^2 \cdot dS + \int y^2 \cdot dS \quad \Rightarrow \quad \boxed{J_P = J_Y + J_X}$$

No caso do círculo :

$$J_P = \int r^2 \cdot dS \quad \text{com} \quad dS = 2\pi \cdot r \cdot dr$$

$$J_P = 2\pi \cdot \int_S r^2 \cdot r \cdot dr = 2\pi \cdot \left. \frac{r^4}{4} \right|_0^{\frac{d}{2}} \quad \Rightarrow \quad \boxed{J_P = \frac{\pi \cdot d^4}{32}}$$

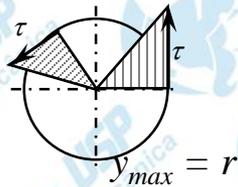
Como

$$J_P = J_X + J_Y$$

$$\text{e} \quad J_X = J_Y$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{J_{\text{círculo}} = \frac{\pi \cdot d^4}{64}}$$

a) Seções circulares

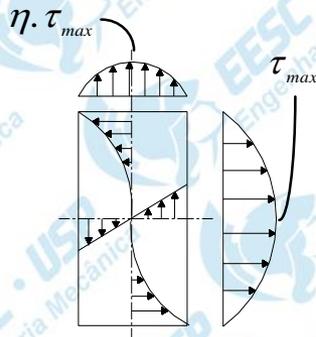


- Distribuição linear

$$J_t = J_p = J_X + J_Y = \frac{\pi \cdot d^4}{32}, \quad W_t = \frac{\pi \cdot d^3}{16}$$

$$J_t = \frac{b \cdot h^3}{12} + \frac{h \cdot b^3}{12}, \quad y_{\max} = \frac{h}{2} \text{ ou } \frac{b}{2}$$

b) Seções retangulares



- Nas faces: parábolas $p/h < 3b$
parábola achatada $p/h > 3b$

face maior

$$\tau_{\max} = \frac{M_t}{W_t}, \quad W_t = \eta_2 \cdot b^2 \cdot h$$

$$J_t = \eta_3 \cdot b^3 \cdot h$$

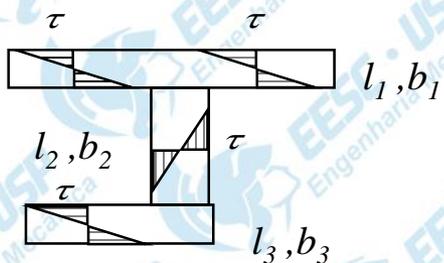
face menor

$$\tau_{\max \text{ menor}} = \eta_1 \cdot \tau_{\max}$$

$\eta_1, \eta_2, \eta_3 \rightarrow$ tabelados (Ex tab. 3.1 Nieman)

- no inferior : não-linear

c) Seções compostas



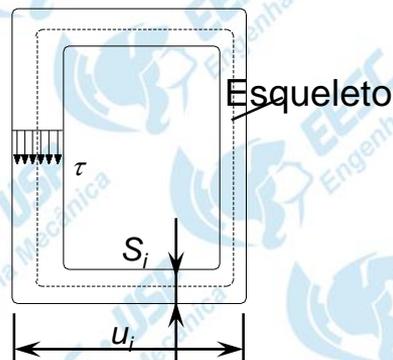
$$\tau_{\max} = \frac{M_t}{J_t} \cdot b_{\max}$$

$$J_t \cong \frac{1}{3} \cdot (b_1^3 \cdot l_1 + b_2^3 \cdot l_2 + \dots)$$

$$W_t = \frac{J_t}{b_{\max}}$$

d) Tubos de paredes finas

- Distribuição cte ao longo da espessura



$$\tau_{\max} = \frac{M_t}{2 \cdot S_{\mu} \cdot s_{\min}}$$

S_{μ} = área interna do esqueleto

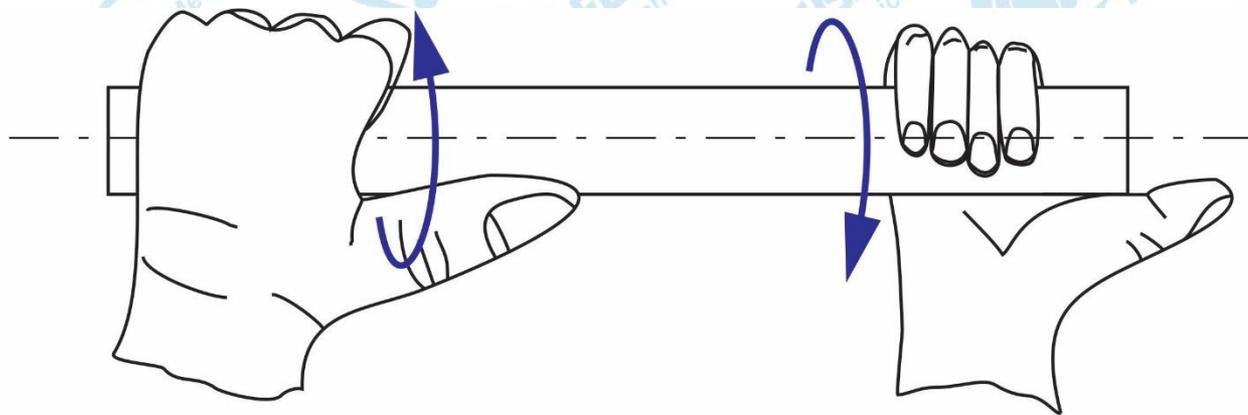
s_{\min} = espessura mínima

$$J_t = \frac{4 \cdot S_{\mu}^2}{\sum \frac{\mu_i}{s_i}}$$

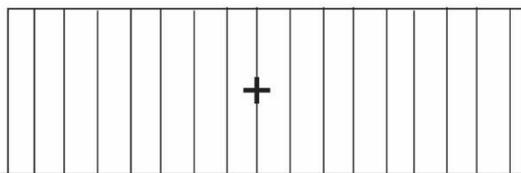
$$; \quad W_t = 2 \cdot S_{\mu} \cdot s_{\min}$$

Convenção de Sinal

Tanto o plano de saída (direita) como o de entrada (esquerda) giram no sentido horário (olhando de frente para plano), portanto, momento torçor positivo.



Mt



Ângulo de torção

$$\theta = \frac{M_t \cdot l_0}{G \cdot J_t}$$

θ , ângulo de torção em radianos

J_t , segundo momento polar de área

G , módulo de rigidez

Potência (P) = Quantidade de energia (ou trabalho de uma força) x Unidade de tempo ($P = M_t \cdot \omega$; $P = F \cdot v$)

$$M_t = \frac{P}{\omega} \quad \begin{matrix} (W) \\ (rad / s) \end{matrix} \quad \begin{matrix} 1HP = 746,6 W \\ 1rpm = \frac{2\pi (rad)}{60 (s)} \end{matrix}$$



$$M_t = 7130 \frac{N}{n}$$

onde : M_t = momentotorçor em N.m

N = potência em HP

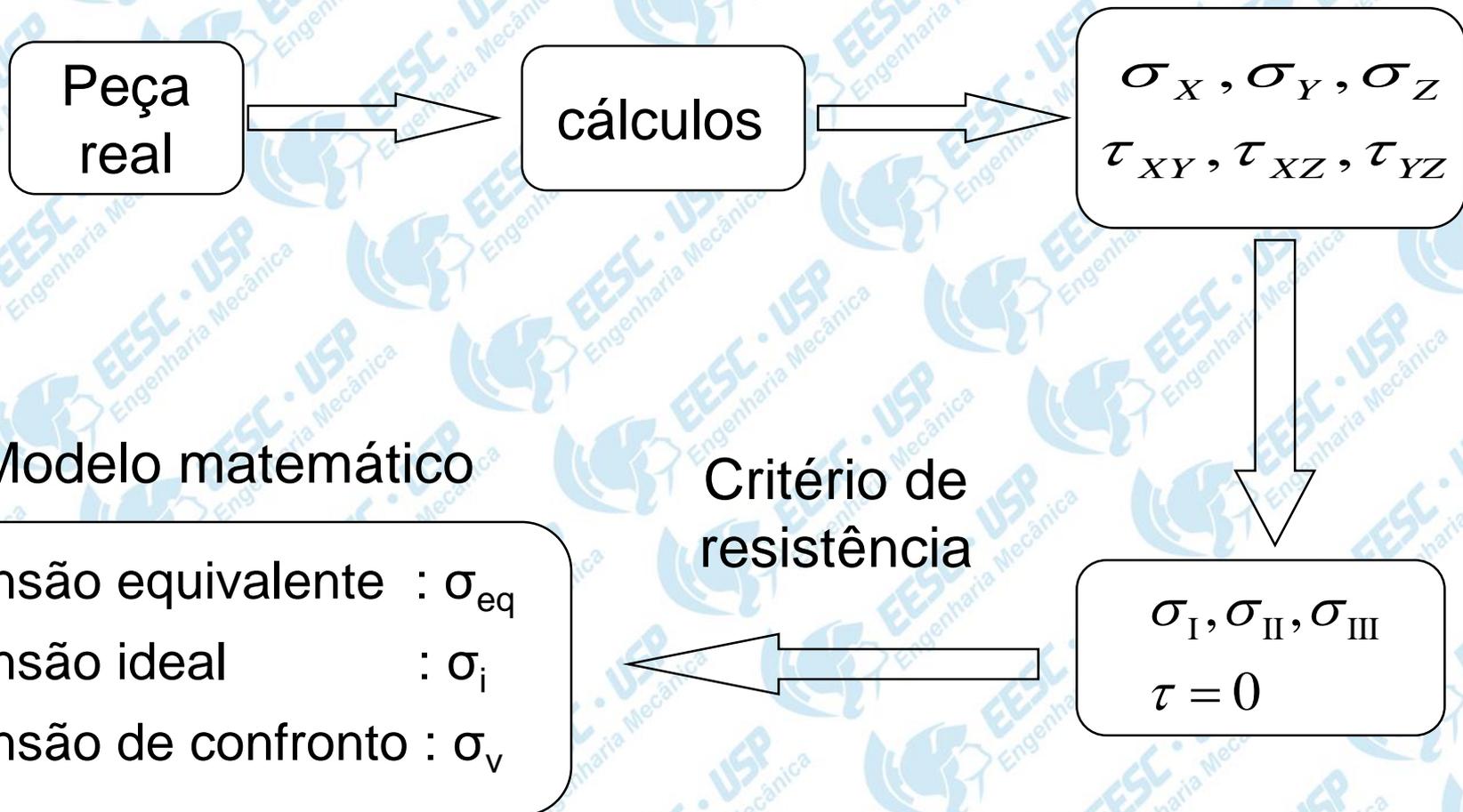
n = rotação em rpm

$$M_t = 9450 \frac{N}{n}, \text{ onde : } M_t = \text{momentotorçor em N.m}$$

N = potência em KW

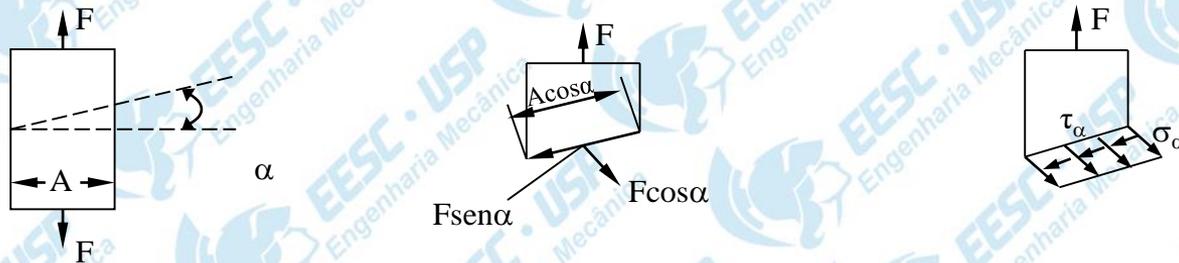
n = rotação em rpm

3.9- Tensão equivalente e tensão admissível



3.9.1- Estado de tensões

a) Estado simples de tensões

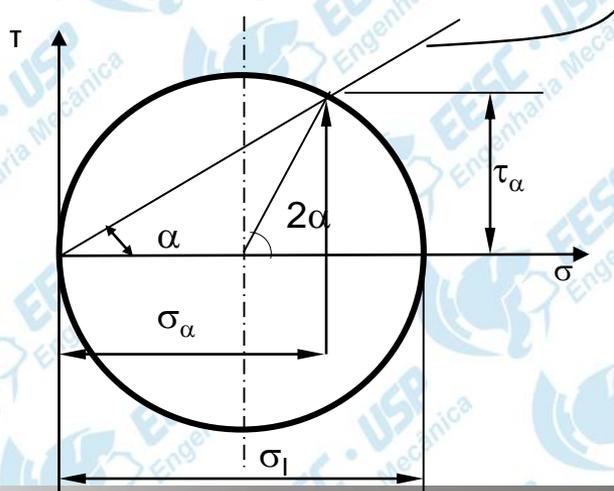


Tensão normal :
$$\sigma_{\alpha} = \frac{F}{A} \cdot \cos^2 \alpha = \frac{F}{2 \cdot A} \cdot (1 + \cos(2 \cdot \alpha))$$

Tensão tangencial :
$$\tau_{\alpha} = \frac{F}{A} \cdot \sin \alpha \cdot \cos \alpha = \frac{F}{2 \cdot A} \cdot \sin(2 \cdot \alpha)$$

Equações
paramétricas
do círculo

Círculo de Mohr

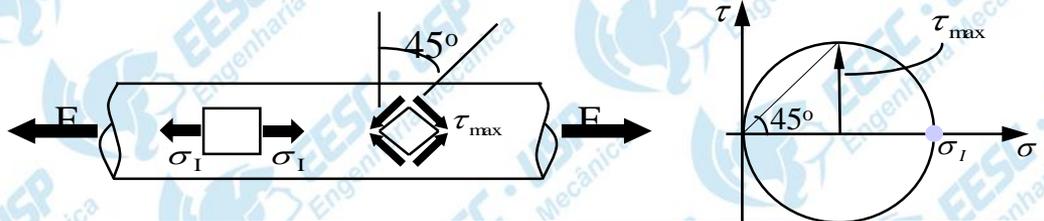
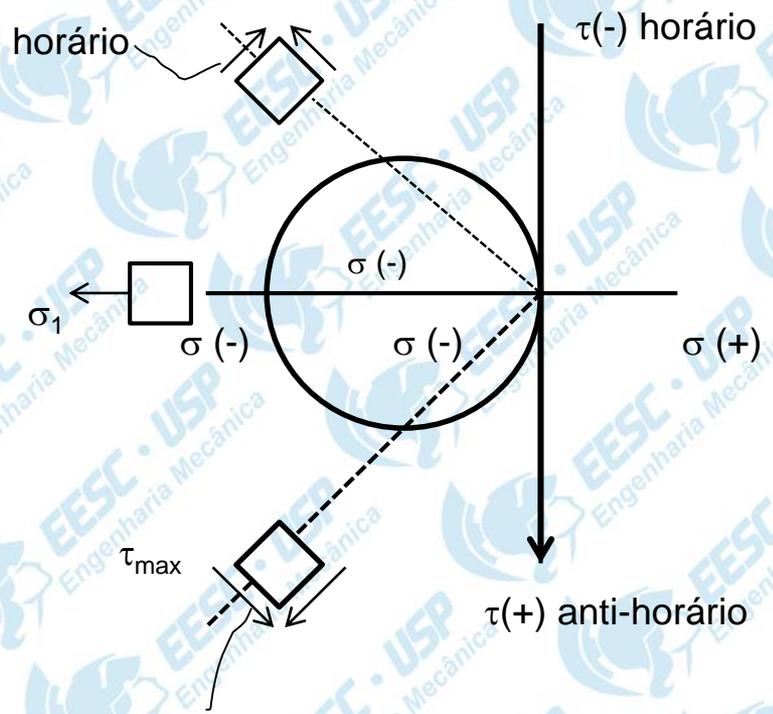
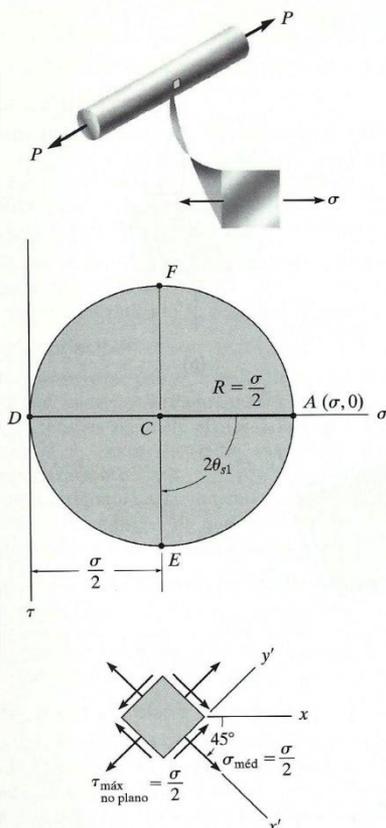


Direção do plano
onde atuam σ_{α} e τ_{α}

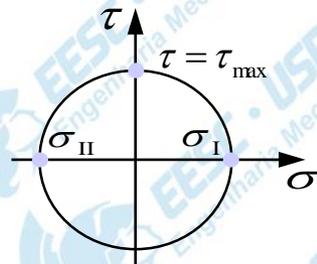
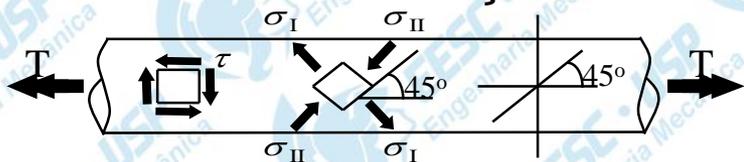
Tracionada

Em uma barra

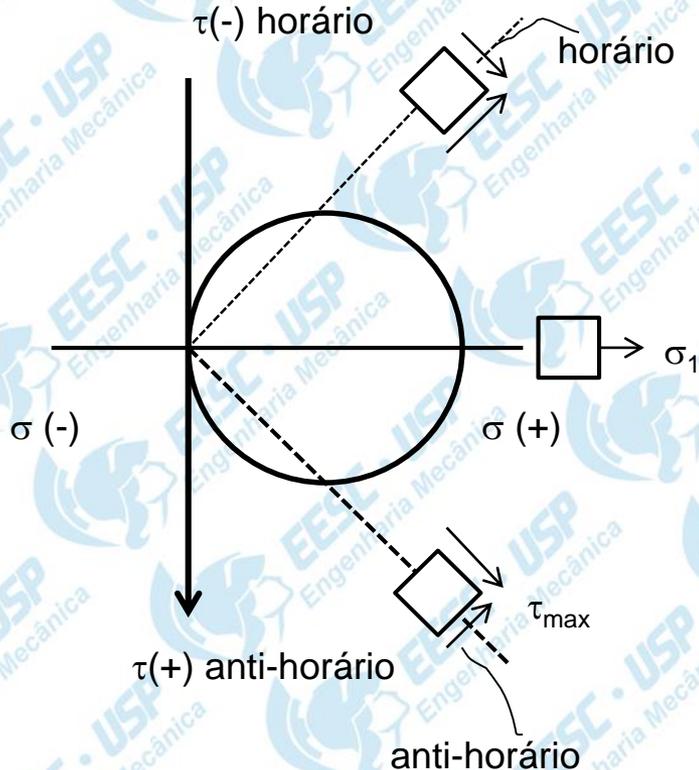
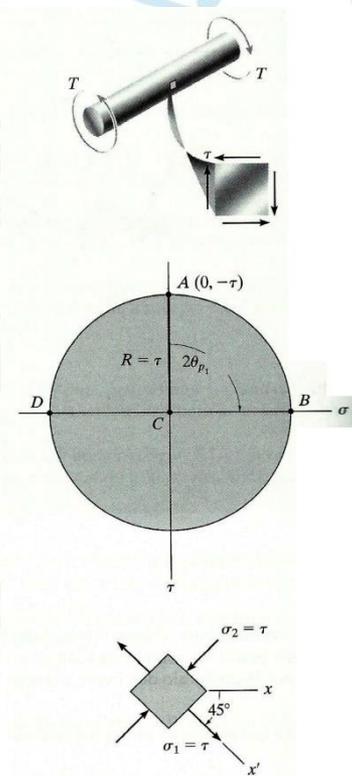
Comprimida



• Eixo solicitado à torção



$$\sigma_{I,II} = \pm \tau = \pm \tau_{max}$$

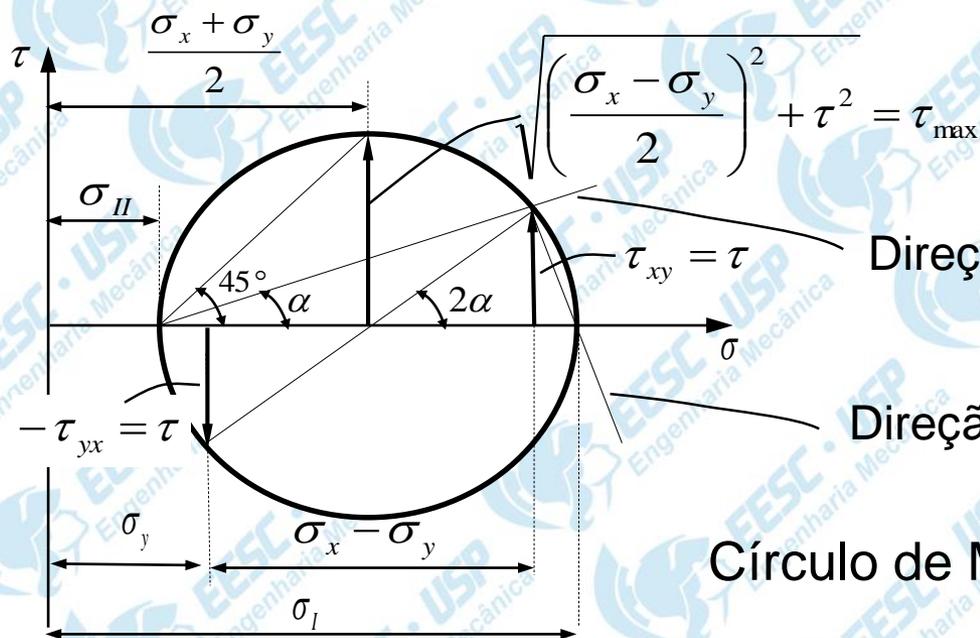
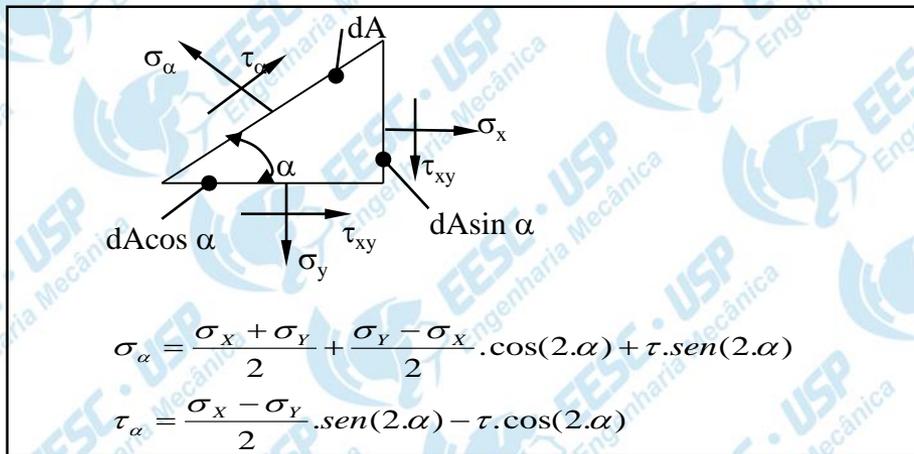
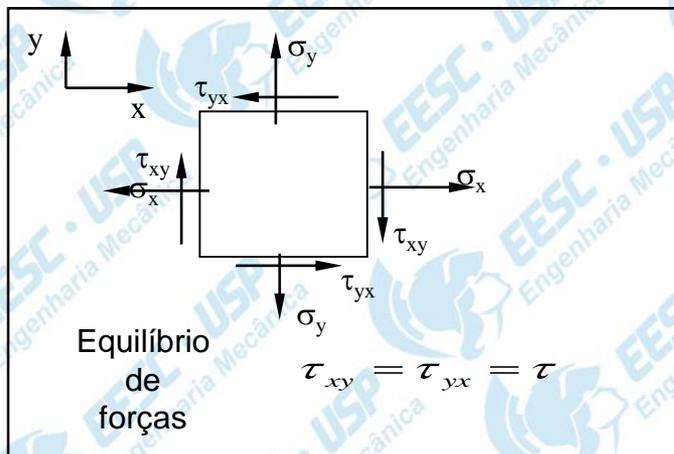


Observe que os elementos, em ambos quadrantes, são idênticos se observado o sentido de giro em relação ao eixo x' .

Adaptado de HIBBELER RC. Resistência dos materiais. Pearson São Paulo 7ª ed. (2009) 334-345.

Elementos de Máquina (SEM 0241) – MASSAROPPI E, LIRANI J, CARVALHO J, FORTULAN CA (2018)

b) Estado duplo de tensões

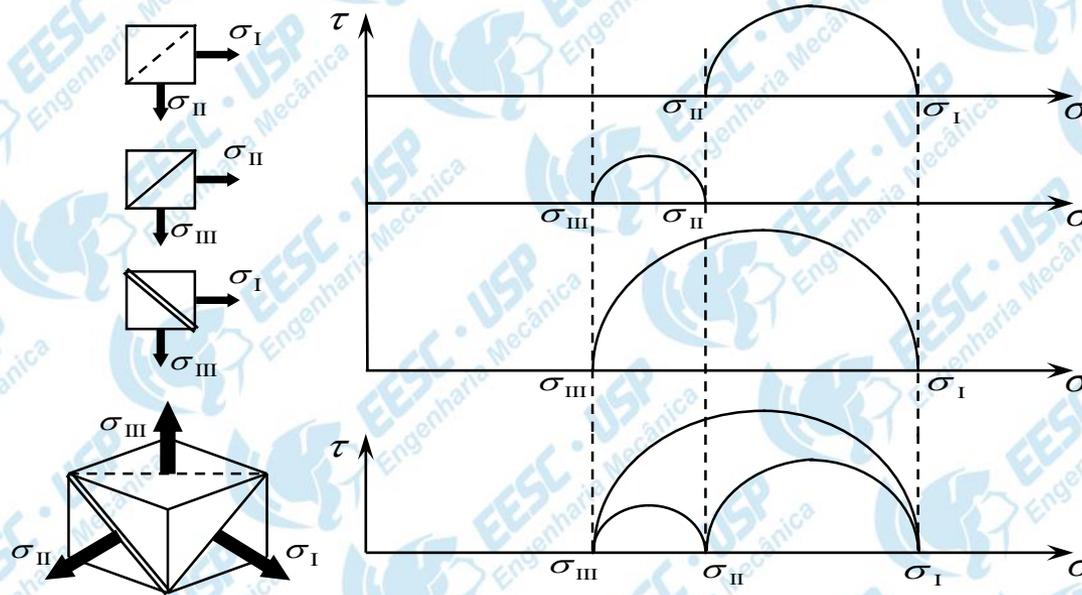


Direção do plano onde atua σ_x

Direção do plano onde atua σ_y

Círculo de Mohr

c) Estado tripla de tensões



- Tensões principais
- Tensão tangencial máxima
- Ângulo dos planos principais
- Tensões em um ângulo qualquer

$$\sigma_{I,II} = \frac{\sigma_X + \sigma_Y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_X - \sigma_Y}{2}\right)^2 + \tau^2}$$

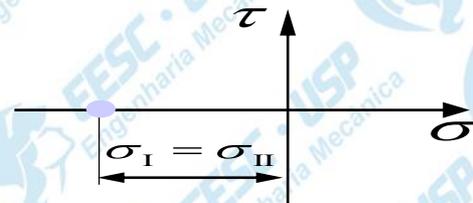
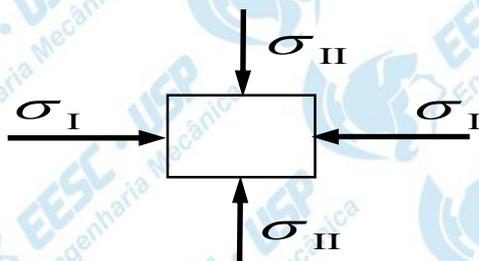
$$\tau_{max} = \sqrt{\left(\frac{\sigma_X - \sigma_Y}{2}\right)^2 + \tau^2}$$

$$\tan(2.\alpha) = \frac{2.\tau}{\sigma_X - \sigma_Y}$$

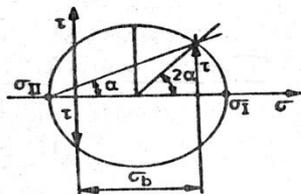
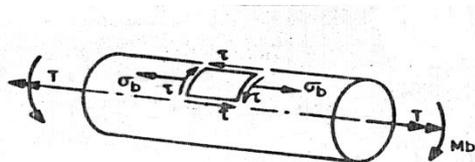
$$\begin{cases} \sigma_{X,Y} = \frac{\sigma_I + \sigma_{II}}{2} + \frac{\sigma_I - \sigma_{II}}{2} \cdot \cos(2.\alpha) \\ \tau = \frac{\sigma_I - \sigma_{II}}{2} \cdot \sin(2.\alpha) \end{cases}$$

3.9.2. Círculos de Mohr: particulares de sollicitações

- Pressão hidrostática biaxial



- Eixo sollicitado à flexo-torção



$$\sigma_{I,II} = \frac{\sigma_b}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_b}{2}\right)^2 + \tau^2} ; \tau_{\max} = \sqrt{\left(\frac{\sigma_b}{2}\right)^2 + \tau^2}$$

3.9.3. Critérios de resistência

Um componente mecânico, associado em conjunto a outros componentes, tem seu comportamento não tão bem delimitado e podem apresentar falha. São aplicados **Critérios de Resistências** que se utilizam de conceitos de segurança para o dimensionamento de componentes.

Resistência de uma peça mecânica (projeto)

- ✓ material;
- ✓ tratamento térmico;
- ✓ processamento.

Utiliza-se de dados de corpos de prova → mesmas condições de carregamento, fabricação, acabamento.

Resistência da peça fabricada

- ✓ quantidade do lote;
- ✓ variações no processo;
- ✓ acabamento superficial;
- ✓ esforços na conformação;
- ✓ combinações com outros no conjunto.

Falha

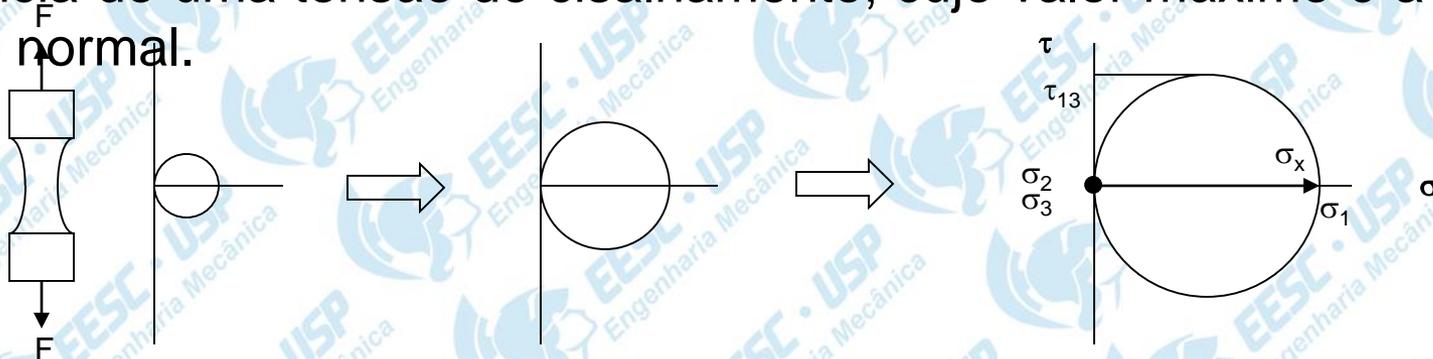
- ✓ quebra;
- ✓ deformação permanente;

A falha depende de:

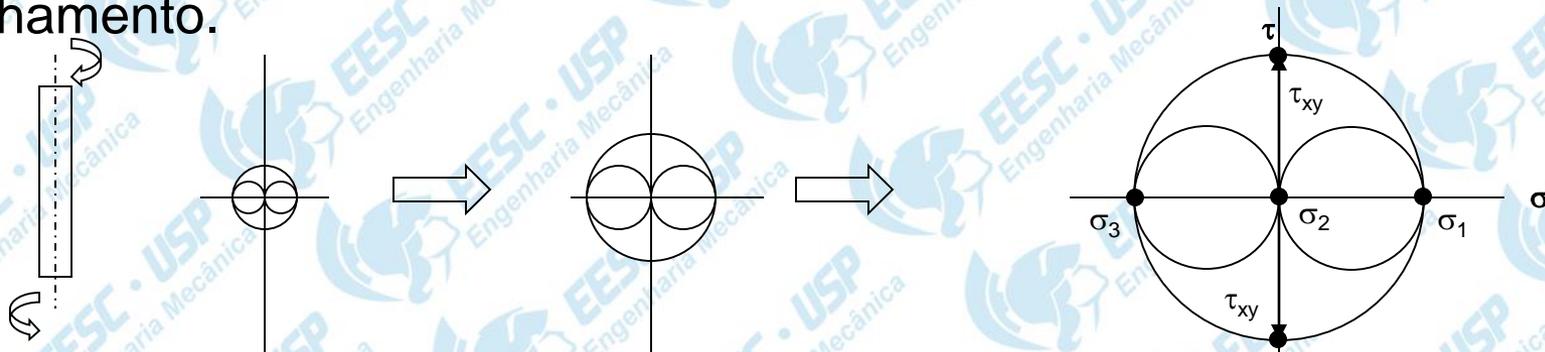
- ✓ tipo de tensão (tração, compressão, cisalhamento);
- ✓ tipo de carregamento (estático, dinâmico).

Qual tensão causou a falha??

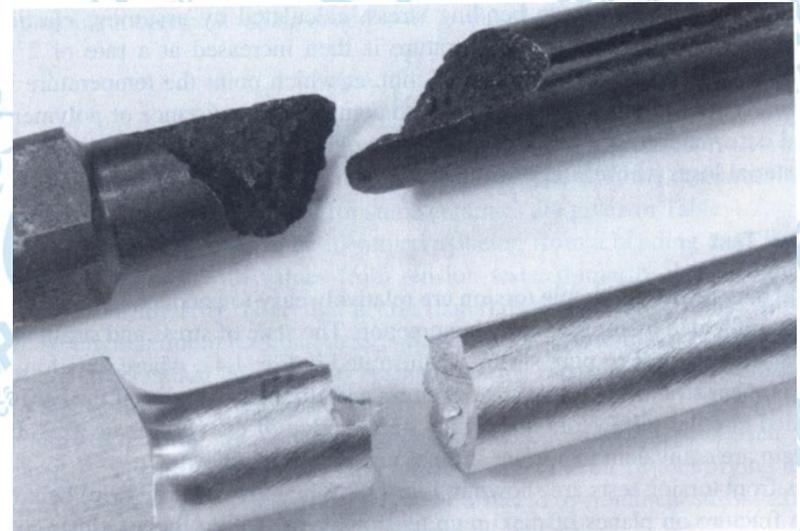
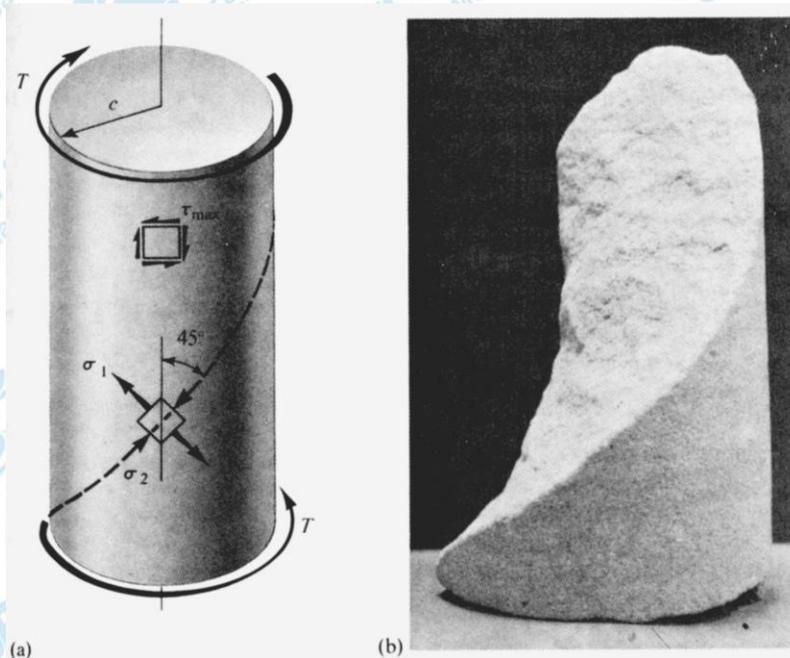
Pelo círculo de Mohr, para tração pura aplicada lentamente, também há a existência de uma tensão de cisalhamento, cujo valor máximo é a metade da tensão normal.



Pelo círculo de Mohr, para torção pura aplicada lentamente, também há a presença de tensão normal cujo valor máximo é igual a tensão de cisalhamento.



Em geral materiais dúcteis submetidos a carregamentos estáticos são limitados pelas suas tensões de cisalhamento, enquanto que os materiais frágeis pela tensão normal. *Lembre que $\tau_{adm} \sim 0,8 \sigma_{adm}$.*



Acima: Ferro fundido cinzento,
Abaixo: liga de alumínio 2024-T351

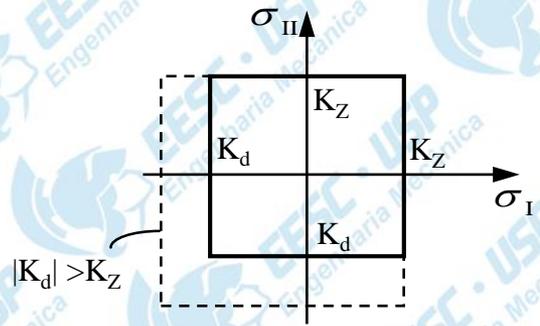
a) Descrição alternativa das tensões para um eixo em torção, b) amostra de pedra arenosa após ensaio de torção

c) Torção em materiais de baixa resistência ao cisalhamento, quebra perpendicular ao eixo.

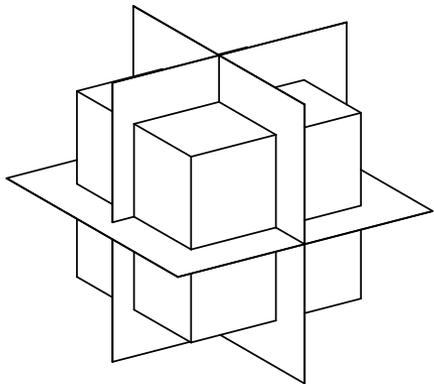
Fonte: POPOV EP. *Introdução à mecânica dos sólidos*. Trad. AMORELLI MOC. Ed. Edgard Blücher, 1978.

Fonte: Dowling NE. *Mechanical Behavior of Materials*. 3ª ed Ed. Pearson Prentice Hall.2007. p.156.

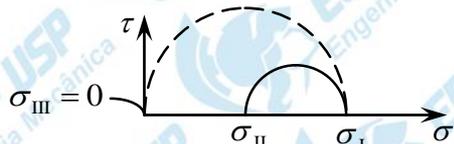
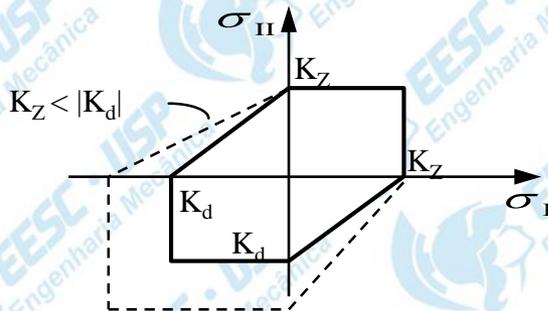
a) Máxima tensão normal



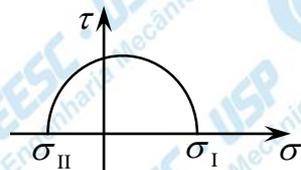
$$\sigma_V = \sigma_I \leq K_Z \text{ ou } D$$



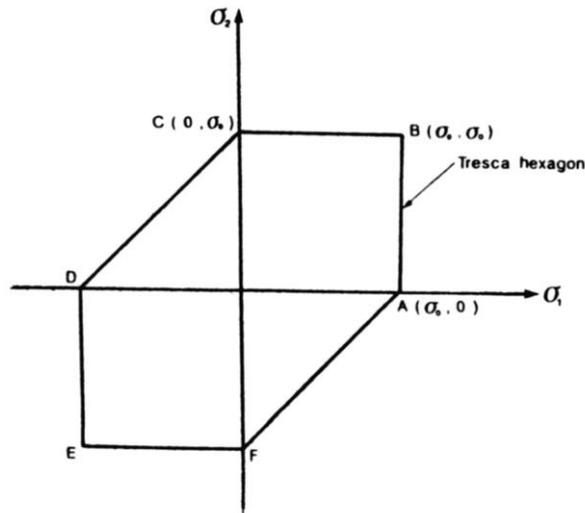
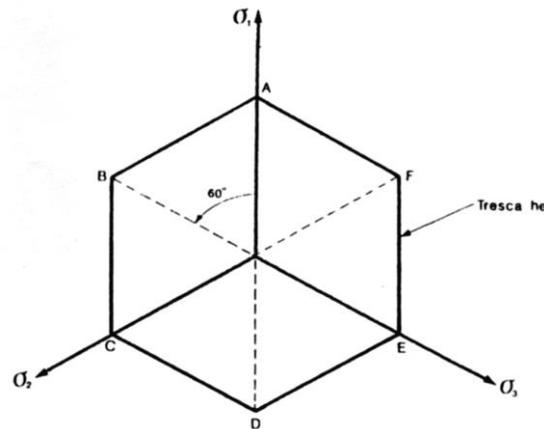
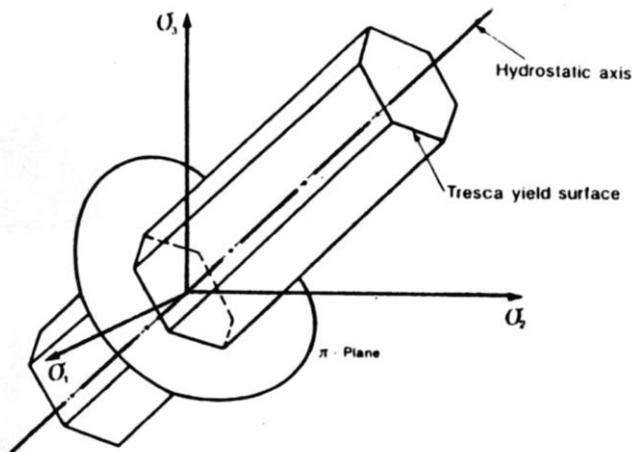
b) Máxima tensão tangencial (Tresca)



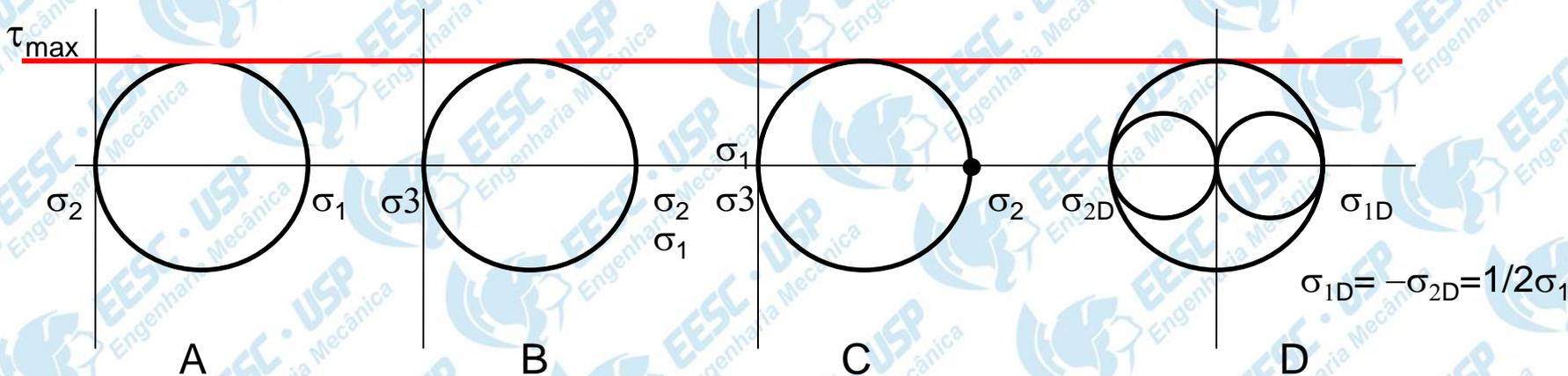
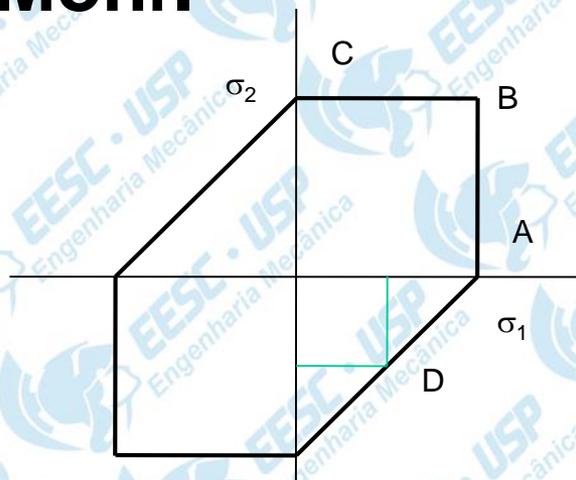
$$\sigma_V = \sigma_I \leq K_Z \text{ ou } D$$



$$\sigma_V = \pm(\sigma_I + \sigma_{II}) \leq K$$



b) Máxima tensão tangencial (Tresca), explicada pelo círculo de Mohr.



c) Máxima energia de distorção (von Mises)

A energia total de deformação em uma peça carregada consiste em duas componentes: uma devido ao carregamento hidrostático que muda seu volume; e outra devido a distorção que muda sua forma.

A tensão de cisalhamento presente deve-se a parcela da energia de distorção.

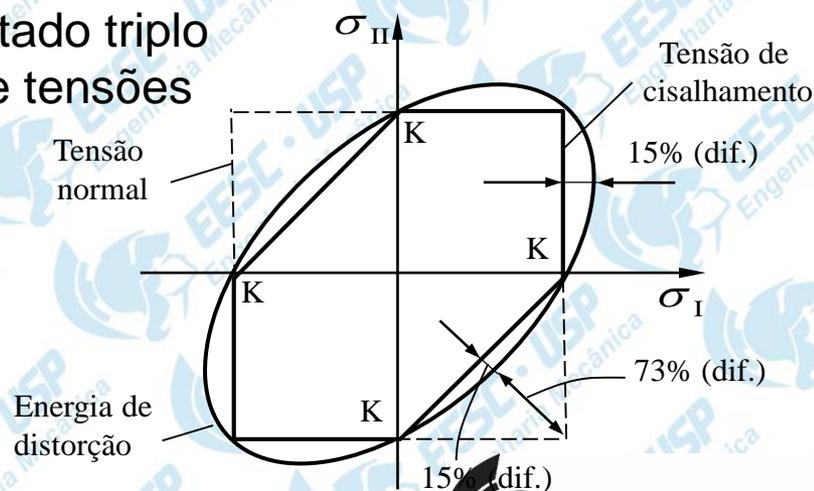
Elipse inclinada à 45° com semi-eixos $\begin{cases} K \cdot \sqrt{2} \\ K \cdot \sqrt{2/3} \end{cases}$

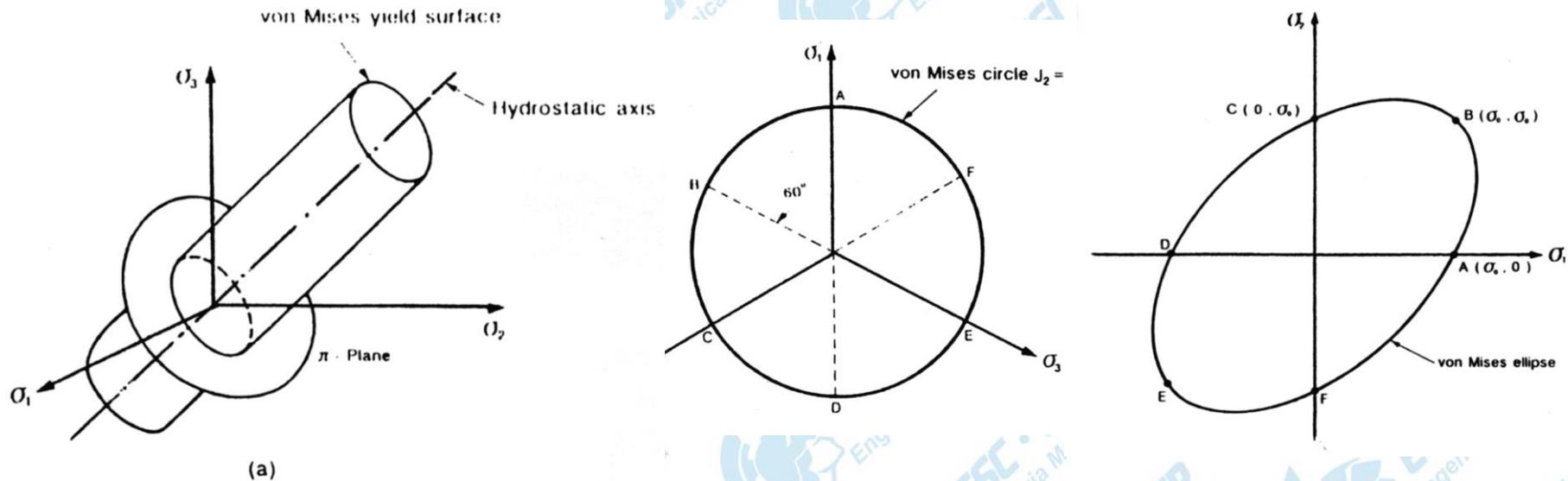
$$\sigma_V = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \sqrt{(\sigma_I - \sigma_{II})^2 + (\sigma_{II} - \sigma_{III})^2 + (\sigma_{III} - \sigma_I)^2}$$

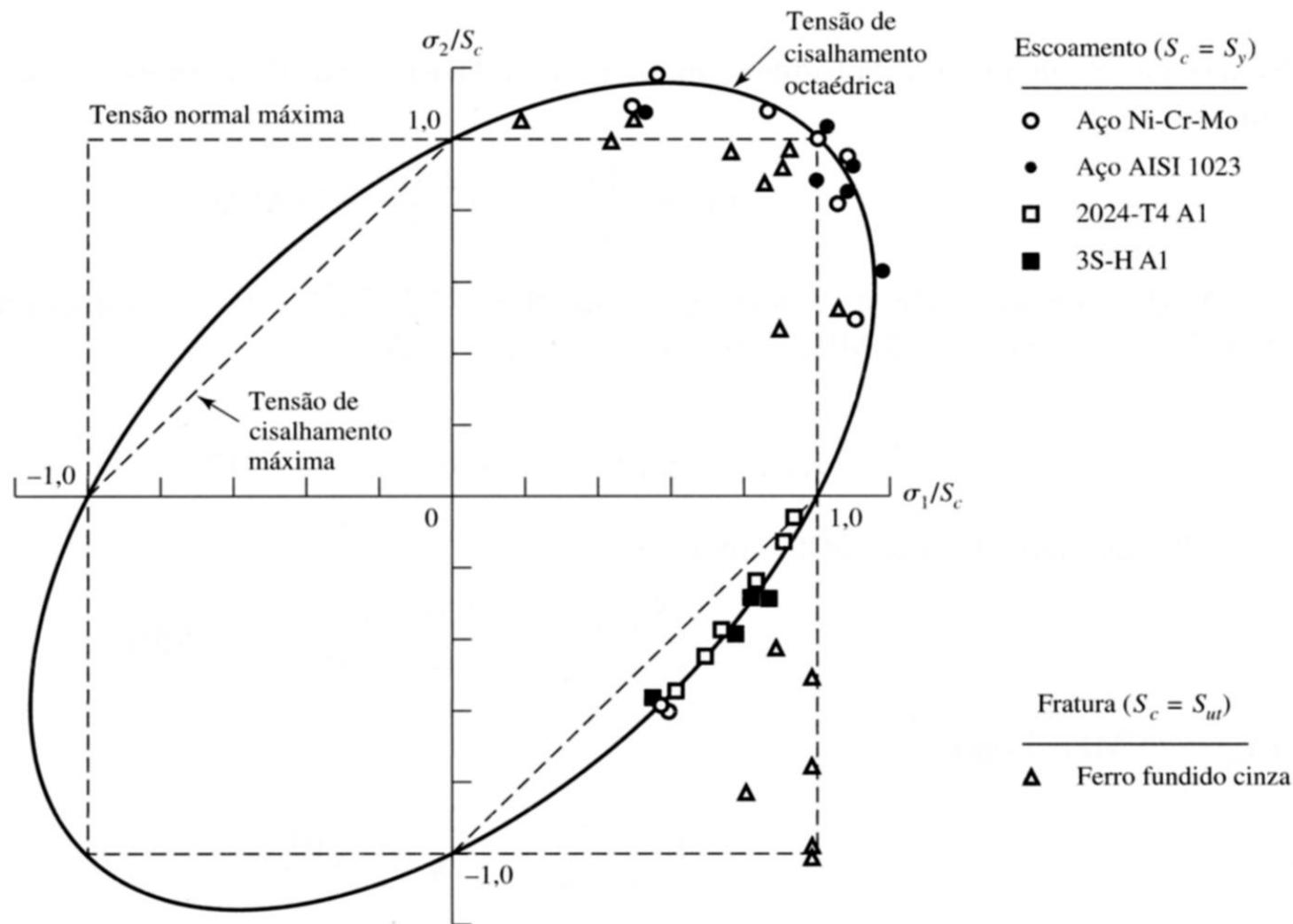
$$\sigma_V = \sqrt{\sigma_I^2 - \sigma_I \cdot \sigma_{II} + \sigma_{II}^2}$$

Estado duplo de tensões

Estado triplo de tensões







Dados experimentais sobrepostos a teorias de falha. (Reproduzida da Figura 7.11, p. 257, Mechanical Behavior of Materials, 2nd ed., N. E. Dowling, Prentice Hall, Englewood Cliffs, N.J., 1999.)

3.9.4. Casos estáticos

a) Tensão equivalente

Critério + usado p/ aço \Rightarrow energia de distorção (von Mises)

$$\left. \begin{array}{l} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \end{array} \right\} \Rightarrow \text{tensões principais} \quad \sigma_1, \sigma_2, \sigma_3 \quad \Rightarrow \quad \sigma_e = \sqrt{\frac{1}{2} \left[(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2 \right]}$$

$$b) \quad N_{(\text{coef. de segurança})} = \frac{\sigma_{adm}}{\sigma_{equivalente}}$$

3.9.5. Casos de sollicitação dinâmica (fadiga)

a) Tensão equivalente

Critério leva em conta a fadiga do material

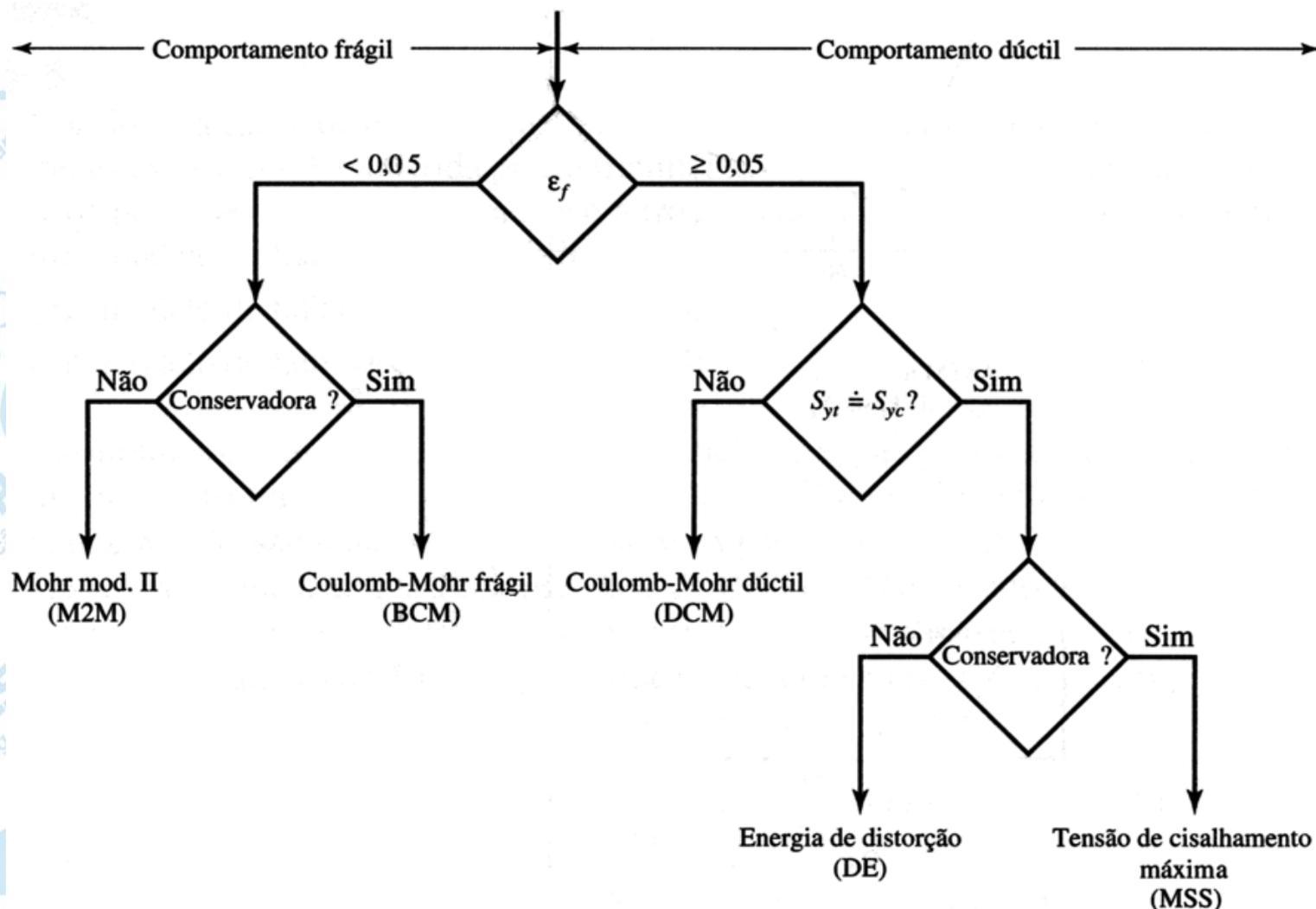
$$\sigma_e = \sqrt{(\sigma_{\max} \cdot \beta_{Kf})^2 + H^2 \cdot (\tau_{\max} \cdot \beta_{Kt})^2}$$

β_K 's = coef. de entalhe

$$H = \frac{\sigma_{\text{lim. fadiga}}}{\tau_{\text{lim. fadiga}}}$$

b) Tensão admissível $\sigma_{adm} \rightarrow$ teoria de fadiga

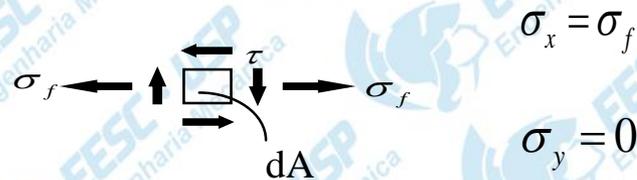
3.9.6- Seleção para o critério de resistência



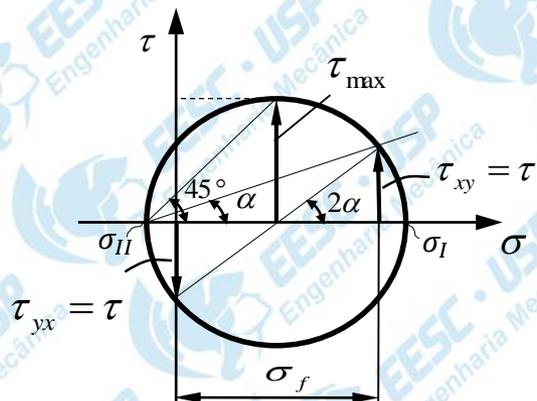
Fonte: SHIGLEY JE, Projeto de engenharia mecânica, Ed. Bookman, 7ed, 2005

3.9.7. Aplicação dos critérios de resistência

- Eixo submetido à flexo-torção



- Círculo de Mohr



$$\sigma_{I,II} = \frac{\sigma_f}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_f}{2}\right)^2 + \tau^2}$$

$$\tau_{\max} = \sqrt{\left(\frac{\sigma_f}{2}\right)^2 + \tau^2}$$

Critério de Resistência

Tensão de Confronto (σ_v)

Máx. tensão normal

$$\sigma_v = \sigma_I = \frac{\sigma_f}{2} + \sqrt{\left(\frac{\sigma_f}{2}\right)^2 + \tau^2}$$

Máx. tensão tangencial

$$\sigma_v = \sqrt{\sigma_f^2 + 4\tau^2}$$

Máx. energia de distorção

$$\sigma_v = \sqrt{\sigma_f^2 + 3\tau^2}$$

3.10. Referências

- Dowling NE. *Mechanical Behavior of Materials*. 3ª ed Ed. Pearson Prentice Hall.2007.
- Niemann G. *Elementos de Máquinas*, vol. I, Editora Edgard Blucher, 1991.
- Popov EP. *Introdução à mecânica dos sólidos*. Trad. Amorelli, M.O.C. Ed. Edgard Blücher, 1978.
- ShigleyJE, Mitchell LD. *Projeto de Engenharia Mecânica*, 7th ed., Bookman, Porto Alegre 2005.