Equação de Lyapunov

Leandro Elias

USP, São Carlos

1 Semestre 2017

Equação de Lyapunov

Equação de Lyapunov

Teorema

Considere o sistema linear $\dot{x} = Ax$ com $det(A) \neq 0$ e $x_e = 0$. Considere $V(x) = x'Px$, com $P = P' > 0$. Então, $V(x)$ é uma função de Lyapunov do sistema linear se, e somente se, para qualquer $Q = Q' > 0$ existe $P = P' > 0$ tal que $A'P + P'A = -Q$.

Exemplo 1

Exemplo

Considere o pêndulo simples. Esse sistema pode representar um atuador robótico com u o torque fornecido por um motor e θ o ângulo do braço. A dinâmica do pêndulo pode ser descrita por: $mL^2\ddot{\theta} + b\dot{\theta} + mgL\sin\theta = u$, em que u é o torque externo aplicado ao pêndulo, b é o coeficiente de atrito no apoio e g é a aceleração gravitacional. Para $m = 0.1\,kg$, $L = 0.2\,m$ e $g = 9,81\,m/s$ e definindo o vetor de estado $x = [\omega \quad \theta]'$ com $\omega = \dot{\theta}$, linearizando o sistema em torno de $x_e = [0 \quad 0]$ e para $u = 0$, tem-se:

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1.0000 \\ -49.0500 & -3.7500 \end{bmatrix} x \tag{1}$$

onde pode se verificar que a matriz A satisfaz as condições do teorema e que seus autovalores possuem parte real negativa.

Equação de Lyapunov para o exemplo 1

Com o comando "*lyap*" do Matlab, a solução X é obtida para a equação:

$$AX + XA' + R = 0 \tag{2}$$

Pré multiplicando essa equação por X^{-1} e pós multiplicando por X^{-1} tem-se:

$$X^{-1}(AX + XA' + R)X^{-1} = 0$$
$$X^{-1}A + A'X^{-1} + X^{-1}RX^{-1} = 0$$

então:

$$P = X^{-1} \quad \text{e} \quad Q = X^{-1}RX^{-1}$$

Contraexemplo

Ao se tomar uma matriz A com autovalores de parte real positiva, tal como $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 5 & -7 \end{bmatrix}$ verifica-se que o teorema não é satisfeito.

Ao se tentar obter uma P com o comando lyap, verifica-se que a matriz P obtida não é definida positiva.

Minimização por LMI

Observe que determinar $P > 0$ na inequação

$$A'P + PA < 0 \tag{3}$$

é equivalente a resolver a equação de Lyapunov $A'P + PA = -Q$ para $Q > 0$.
Também é possível utilizar a inequação

$$A'P + PA < \gamma I \tag{4}$$

onde o valor de γ pode ser otimizado (tomar próximo de zero).

Deslocamento dos autovalores da matriz A

A equação de Lyapunov pode ser tomada da seguinte forma

$$A'P + PA + 2\mu P = -N \tag{5}$$

com $-\mu < 0$ e $N = N' > 0$.
Que pode ser reescrita da seguinte forma

$$(A + \mu I)' P + P (A + \mu I) = -N \tag{6}$$

onde os autovalores de A ficam descolados de μ. Observe que se os autovalores de A possuem parte real negativa, então a equação de Lyapunov é satisfeita. Ao deslocá-los em μ, deve-se tomar μ de modo que $Re(\lambda_i(A)) + \mu < 0$.

Deslocamento dos autovalores da matriz A

De forma análoga a equação (6) pode ser reescrita como uma inequação

$$(A + \mu I)' P + P (A + \mu I) < 0 \tag{7}$$

onde é possível obter valores de $P > 0$ para $Re(\lambda_i(A)) + \mu < 0$.
As inequações matriciais descritas nos slides foram resolvidas em Matlab com os pacotes SeDuMi e YALMIP.