João Paulo Cerri

Regulador Robusto Recursivo para Sistemas Lineares de Tempo Discreto no Espaço de Estado

Dissertação apresentada à Escola de Engenharia de São Carlos da Universidade de São Paulo, como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Engenharia Elétrica.

Área de Concentração: Sistemas Dinâmicos
Orientador: Prof. Dr. Marco Henrique Terra

São Carlos
2009

Ficha catalográfica preparada pela Seção de Tratamento
da Informação do Serviço de Biblioteca – EESC/USP

C417r

Cerri, João Paulo
Regulador robusto recursivo para sistemas lineares de tempo discreto no espaço de estado / João Paulo Cerri ; orientador Marco Henrique Terra. –- São Carlos, 2009.

Dissertação (Mestrado-Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica e Área de Concentração em Sistemas Dinâmicos) –- Escola de Engenharia de São Carlos da Universidade de São Paulo, 2009.

1. Equação de Riccati. 2. Funções penalidade. 3. Mínimos quadrados. 4. Regulador robusto. 5. Sistemas discretos. 6. Problema min-max. I. Título.

FOLHA DE JULGAMENTO

Candidato: Bacharel **JOÃO PAULO CERRI.**

Dissertação defendida e julgada em 29/05/2009 perante a Comissão Julgadora:

Aprovado

Prof. Associado **MARCO HENRIQUE TERRA (Orientador)**
(Escola de Engenharia de São Carlos/USP)

APROVADO

Prof. Dr. **JOÃO YOSHIYUKI ISHIHARA**
(Universidade de Brasília/UnB)

Aprovado.

Prof. Dr. **JOSÉ CLÁUDIO GEROMEL**
(Universidade Estadual de Campinas/UNICAMP)

Prof. Titular **GERALDO ROBERTO MARTINS DA COSTA**
Coordenador do Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica e
Presidente da Comissão de Pós-Graduação

Dedicatória

Dedico este trabalho aos meus pais, Ademir e Rosemeire, a base sólida das minhas conquistas, por suportarem minha ausência, por todo esforço, apoio e dedicação incomensuráveis, pelas inúmeras vezes terem me mostrado que este sonho era possível e por terem me concedido, sempre, a preciosa oportunidade de realizar-me cada vez mais nos estudos.

Agradecimentos

Ao meu orientador, Prof. Dr. Marco Henrique Terra, meus sinceros agradecimentos pelo empenho e dedicação demonstrados, pela competência, pelo incentivo, simpatia e presteza no auxílio às atividades e pelas valiosas discussões durante o andamento da pesquisa, pelo auxílio no desenvolvimento desta Dissertação e, principalmente, pela confiança depositada em mim.

Ao Prof. Dr João Yoshiyuki Ishihara pela competência, pela atenção e pelas proveitosas sugestões para com a pesquisa.

A instituição Universidade de São Paulo em São Carlos por toda a infraestruta oferecida.

A todos os professores pela dedicação e entusiasmo demonstrado ao longo das disciplinas que cursei e aos demais funcionários do Departamento de Engenharia Elétrica da USP São Carlos que de alguma forma, direta ou indiretamente, contribuíram com o trabalho.

Aos colegas do Laboratório de Sistemas Inteligentes - LASI pela recepção, pelos bons momentos que passamos juntos e pela espontaneidade na troca de informações e materiais numa grandiosa demonstração de amizade.

A CAPES (Comissão de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior) pela bolsa de mestrado concedida para o desenvolvimento deste trabalho.

A todos aqueles que através de uma simples sugestão, uma crítica ou um pensamento positivo, colaboraram de alguma forma com o sucesso deste trabalho.

Aos meus pais e ao meu irmão Julio Cesar pela presença constante nas horas de alegria e pelo apoio incondicional nos momentos mais difíceis nesta e nas outras jornadas.

E, finalmente, a Deus pela benção, pela saúde, pela oportunidade e pelo privilégio que me foi concedido ao frequentar este curso e poder estabelecer mais esta etapa em minha vida.

Epígrafe

"Nenhum homem realmente produtivo pensa como se estivesse escrevendo uma dissertação."

Albert Einstein

Resumo

CERRI, J. P. *Regulador Robusto Recursivo para Sistemas Lineares de Tempo Discreto no Espaço de Estado.* São Carlos, 2009, Dissertação (Mestrado) - Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo.

Esta dissertação de mestrado aborda o problema de regulação robusta recursiva para sistemas lineares discretos sujeitos a incertezas paramétricas. Um novo funcional quadrático, baseado na combinação de função penalidade e função custo do tipo jogos, é projetado para lidar com este problema. Uma característica interessante desta abordagem é que a recursividade pode ser realizada sem a necessidade do ajuste de parâmetros auxiliares. Bastante útil para aplicações online. A solução proposta é baseada numa equação recursiva de Riccati. Também, a convergência e a estabilidade do regulador para o sistema linear incerto invariante no tempo são garantidas.

Palavras–Chave: Equação de Riccati, funções penalidade, mínimos quadrados, regulador robusto, sistemas discretos, problema min-max.

Abstract

CERRI, J. P. Recursive Robust Regulator for Discrete-time State-Space Systems. São Carlos, 2009, Dissertation (Master) - Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo.

This dissertation deals with robust recursive regulators for discrete-time systems subject to parametric uncertainties. A new quadratic functional based on the combination of penalty functions and game theory is proposed to solve this class of problems. An important issue of this approach is that the recursiveness can be performed without the need of adjusting auxiliary parameters. It is useful for online applications. The solution proposed is based on Riccati equation which guarantees the convergence and stability of the time-invariant system.

Keywords: *Riccati Equation, penalty function, least squares, robust regulator, discrete-time systems, min-max problem.*

SUMÁRIO

LISTA DE FIGURAS

Lista de Abreviaturas e Siglas

DML - **D**esigualdade **M**atricial **L**inear

MQ - **M**ínimos **Q**uadrados

MQP - **M**ínimos **Q**uadrados **P**onderados

MQR - **M**ínimos **Q**uadrados **R**egularizados

MQRI - **M**ínimos **Q**uadrados **R**egularizados com **I**ncertezas

RLQ - **R**egulador **L**inear **Q**uadrático

RP - **R**egulador **P**adrão

RR - **R**egulador **R**obusto

Lista de Símbolos

$\mathbb{N}$	conjunto dos números naturais
$\mathbb{R}$	conjunto dos números reais
$\mathbb{C}$	conjunto dos números complexos
$\mathbb{R}^n$	conjunto dos vetores reais n-dimensionais
$\mathbb{R}^{n\times m}$	conjunto das matrizes reais $n \times m$
I_n	matriz identidade de dimensão n
$posto(A)$	posto da matriz A
$A^\dagger$	pseudo-inversa da matriz A
A^{-1}	inversa da matriz A
A^T	transposta da matriz A
$A^{\frac{1}{2}}$	raiz quadrada da matriz semidefinida positiva A
M/A	complemento de Schur da submatriz A na matiz particionada M
$\rho(A)$	raio espectral da matriz A
$A \succeq 0$	A é uma matriz semidefinida positiva
$A \succ 0$	A é uma matriz definida positiva
$A \succeq B$	$A - B$ é uma matriz semidefinida positiva
$A \succ B$	$A - B$ é uma matriz definida positiva
$a > 0$	número real positivo
$A \bigoplus B$	matriz diagonal composta pelos elementos matriciais A e B
$\|x\|$	norma Euclidiana de x definida por $(x^T x)^{\frac{1}{2}}$
$\|x\|_P$	norma ponderada de x definida por $(x^T P x)^{\frac{1}{2}}$ com $P \succ 0$
$x^T W(\bullet)$	expressão simplificada para $x^T W x$

CAPÍTULO 1

Introdução

1.1 Motivação

Neste trabalho será abordado o problema de controle robusto recursivo para sistemas lineares de tempo discreto sujeitos a incertezas paramétricas. Um grande número de resultados sobre este tópico de pesquisa tem aparecido na literatura nas últimas décadas para as mais variadas estruturas de incertezas, veja [3], [18], [20], [22], [29], [31], [32], [35], [37], [41] e as referências contidas nelas.

Em especial, o estudo de controladores robustos para sistemas sujeitos a incertezas nas matrizes de parâmetros das variáveis de estado e de controle tem despertado grande interesse da comunidade de controle, veja por exemplo: [3], [8], [20], [27], [28], [39], [38], [40], [41], [42] e [43].

Uma técnica que tem sido amplamente utilizada para resolver esta classe de problema é baseada em Desigualdades Matriciais Lineares (DMLs), como por exemplo nos trabalhos desenvolvidos em [20], [40] e [42]. No entanto, o uso de tal ferramenta apresenta algumas limitações. Dentre as quais destacamos, principalmente, as limitações em aplicações online. As DMLs devem ser resolvidas offline pois em geral não há garantia de soluções factíveis para os reguladores robustos.

Uma outra abordagem para o tratamento deste problema é a extensão das técnicas de projeto de controle nominal recursivo baseadas em equações de Riccati, veja por exemplo os trabalhos de [17], [32], [37] e [39]. Tal abordagem apresenta vantagens, se comparada à técnica de DMLs, já que a existência de solução e a recursividade são algumas das principais características das equações de Riccati. Além disso, na ausência de incertezas no modelo, a solução se reduz ao regulador ótimo nominal clássico.

Em [37], os autores propuseram um procedimento de projeto que possibilita ajustar reguladores robustos para sistemas incertos baseado nas características estruturais dos projetos de custos quadráticos clássicos. O procedimento foi desenvolvido com base em um problema de otimização do tipo min-max. Entretanto, a solução recursiva proposta nessa referência é dependente de um parâmetro de otimização que precisa ser atualizado a cada novo passo, o que torna difícil a implementação em situações práticas.

Este trabalho tem por objetivo apresentar um novo projeto de controle robusto recursivo baseado em funções penalidade e teoria de jogos. Com uma definição apropriada das matrizes que definem os limites das incertezas dos parâmetros envolvidos e havendo um número suficiente de entradas de controle, o regulador proposto garante estabilidade e robustez do sistema sem a necessidade de ajuste de nenhum parâmetro auxiliar.

1.2 Organização do Texto

Este texto está organizado, a partir daqui, da seguinte maneira:

- **Capítulo 2:** serão apresentados, sem demonstração, alguns resultados básicos sobre a teoria de minimização restrita. Em especial, os resultados relacionados com a técnica de multiplicadores de Lagrange, programação convexa e quadrática. Será apresentado ainda um estudo introdutório sobre a aplicação do método de funções penalidade na solução de problemas de minimização restrita.

- **Capítulo 3:** serão apresentados alguns problemas de Mínimos Quadrados (MQ). Estruturas alternativas para a solução dos problemas de Mínimos Quadrados Ponderados (MQP) e Mínimos Quadrados Regularizados com Incertezas (MQRI) serão deduzidas. O problema de MQP sujeito a uma restrição de igualdade linear será resolvido combinando as técnicas de funções penalidade e solução ótima do problema de MQP irrestrito.

- **Capítulo 4:** será apresentada uma formulação alternativa do problema do Regulador Linear Quadrático e, também, a respectiva solução recursiva proposta sob uma estrutura matricial diferenciada. A equivalência com a estrutura da solução clássica também será demonstrada.

- **Capítulo 5:** um funcional quadrático será projetado e o regulador robusto recursivo será deduzido para uma determinada categoria de sistemas lineares incertos. O projeto do funcional quadrático será baseado numa extensão direta do funcional quadrático utilizado para a dedução do regulador nominal no Capítulo 4. Uma característica importante deste funcional é que na ausência de incertezas no modelo, a solução reduz-se ao regulador ótimo nominal clássico.

- **Capítulo 6:** inicialmente, será mostrado que a solução proposta é dada em termos uma equação recursiva de Riccati quando identificações adequadas são realizadas. Na sequência, a convergência e a estabilidade do regulador robusto recursivo serão demonstradas para o caso em que as matrizes de ponderação e de parâmetros do sistema são assumidas invariantes no tempo.

- **Apêndice A:** alguns aspectos complementares sobre o regulador robusto recursivo projetado no Capítulo 5 serão brevemente analisados. Como o comportamento, quando $\mu \rightarrow +\infty$, do termo quadrático obtido após as etapas de maximização e minimização, além de, uma análise preliminar sobre a existência do ganho de realimentação estabilizante de acordo com a estrutura das matrizes de incerteza do sistema.

- **Apêndice B:** algumas definições básicas, notações e resultados da análise matricial que foram utilizados neste texto serão apresentados.

1.3 Artigos Publicados

(a) - Cerri, J. P., Terra M. H., e Ishihara, J. Y. (2008) Nova Abordagem para sistemas de controle ótimo linear. *Anais do XVII Congresso Brasileiro de Automática, Juiz de Fora, Brasil.*

(b) - Cerri, J. P., Terra M. H., e Ishihara, J. Y. (2009) Recursive Robust Regulator for Discrete-time State-space Systems. *In Proceedings of the American Control Conference - ACC2009, St. Louis, Missouri, USA.*

CAPÍTULO 2

Minimização Restrita

Revisaremos neste capítulo alguns tópicos clássicos relacionados com problemas de minimização com restrições de igualdade. Um dos mais conceituados resultados da teoria de otimização para esta classe de problemas está relacionado com multiplicadores de Lagrange. Um destaque especial será dado aos resultados que tratam de problemas de minimização convexa com restrição de igualdade linear. Apresentaremos alguns resultados fundamentais sobre as soluções ótimas para esta categoria de problema. Outro procedimento clássico, para lidar com problemas de minimização com restrições, que será descrito neste capítulo é o método de funções penalidade. Ele é caracterizado principalmente pela sua simplicidade conceitual e pela sua eficiência prática para determinados tipos de problemas restritos.

2.1 Conceitos Preliminares

Considere o problema de minimização

$$\begin{array}{c} \min\limits_{x \in \mathbb{R}^n} \{f(x)\} \\ s.a \;\; c_i(x) \, = \, 0, \;\; i = 1, ..., m \end{array} , \tag{2.1}$$

sendo $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ a função objetivo e $c_i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, \forall\, i = 1, ..., m$ as funções de restrição. Assuma que as funções f e c_i, $\forall\, i = 1, ..., m$ são contínuas para todo $x \in \mathbb{R}^n$.

Definição 2.1.1. *[15] Se um ponto x^f satisfaz todas as funções de restrição do problema de minimização (2.1) então x^f é denominado um ponto factível do problema de minimização.*

Definição 2.1.2. *[15] Defina*

$$\mathcal{R}^f := \{x \in \mathbb{R}^n \,:\, c_i(x) = 0, \forall\, i = 1, ..., m\}, \tag{2.2}$$

ou seja, $\mathcal{R}^f$ é o conjunto de todos os ponto factíveis do problema de minimização. Denomina-se o conjunto $\mathcal{R}^f$ como uma região factível do problema de minimização.

Definição 2.1.3. *[15] Seja x^* um ponto factível do problema de minimização (2.1). Se $f(x^*) \leq f(x)$ para todo $x \in \mathbb{R}^n$ satisfazendo a restrição do problema e suficientemente próximo de x^*, então x^* é dito um minimizador local restrito (solução ótima) do problema (2.1).*

Baseado nos conceitos acima, o problema de minimização (2.1) pode ser reformulado como

$$\min_{x \in \mathcal{R}^f} \{f(x)\} \ . \tag{2.3}$$

Suponhamos que as funções objetivo e de restrições sejam suaves e que admitam derivadas contínuas de primeira e segunda ordem. Estabeleceremos também as seguintes notações $g := \nabla_x f$ e $G := \nabla_x^2 f$ para o vetor gradiente e para a matriz Hessiana da função f, respectivamente. As notações $\nabla_x c_i$ e $\nabla_x^2 c_i$ serão utilizadas para denotar a primeira e a segunda derivadas, respectivamente, da função de restrição $c_i(x)$, $\forall\, i = 1, ..., m$. O vetor $\nabla_x c_i$ será denotado por a_i e corresponderá ao vetor normal da restrição c_i. Os vetores a_i, quando arranjados em colunas, compõem o que chamamos de matriz Jacobiana A.

2.2 Multiplicadores de Lagrange

Dentre todos os resultados da teoria de minimização restrita, o conceito mais relevante para o tipo de problema que iremos abordar é o de multiplicadores de Lagrange. A definição abaixo estabelece um aspecto fundamental quando lidamos, porém, com o problema de minimização irrestrita.

Definição 2.2.1. *[15] Seja $x_e \in \mathbb{R}^n$ tal que $g(x_e) = \nabla_x f(x_e) = 0$. Diz-se então que x_e é um ponto estacionário de $f(x)$.*

Já no problema de minimização restrita ocorre uma complicação adicional da região factível. Dessa maneira, um minimizador local deve satisfazer, além da condição de ponto factível, outras condições necessárias. Os multiplicadores de Lagrange surgem quando condições necessárias similares são solicitadas para a solução ótima x^* do problema (2.1).

Condições Necessárias de Primeira Ordem

O método dos multiplicadores de Lagrange baseia-se em encontrar o par $(x, \lambda) = (x^*, \lambda^*)$ que satisfaça o sistema de equações

$$\begin{cases} g(x) + \sum_{i=1}^{m} a_i(x)\lambda_i = 0 \\ c_i(x) = 0, \forall\, i = 1, ..., m \end{cases}, \tag{2.4}$$

onde $x = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$, $\lambda = \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_m \end{bmatrix}$ e os termos λ_i na combinação linear são denominados multiplicadores de Lagrange. Se o problema admite m restrições de igualdade, então as condições acima levam à obtenção de um sistema de equações com $n+m$ equações e $n+m$ incógnitas. Os detalhes de como tais condições são obtidas podem ser encontradas em [15].

Costuma-se estabelecer o sistema de equações (2.4) introduzindo o que chamamos de Função Lagrangiana

$$\mathcal{L}(x, \lambda) = f(x) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i c_i(x). \tag{2.5}$$

As condições acima podem ser reescritas então através de uma expressão mais simples, ou seja, encontrar a solução $(x, \lambda) = (x^*, \lambda^*)$ de $\nabla\mathcal{L}(x, \lambda) = 0$ onde $\nabla = \begin{bmatrix} \nabla_x \\ \nabla_\lambda \end{bmatrix}$. Então, uma condição necessária para um minimizador local do problema (2.1) é que (x^*, λ^*) seja um ponto estacionário da Função Lagrangiana $\mathcal{L}(x, \lambda)$.

Teorema 2.2.1. *([15], [26]) (Condições Necessárias de Primeira Ordem) Se x^* é um minimizador local do problema de minimização, então existe um multiplicador de Lagrange λ^* tal que o par (x^*, λ^*) satisfaz o seguinte sistema de equações*

$$\begin{cases} \nabla_x \mathcal{L}(x, \lambda) = 0 \\ c_i(x) = 0, \forall\, i = 1, ..., m \end{cases}. \tag{2.6}$$

□

Em alguns problemas, as condições necessárias para a otimalidade também são suficientes.

Este é o caso, por exemplo, quando a função objetivo f é convexa diferenciável e as restrições de igualdade c_i são funções lineares.

Condições de Segunda Ordem

Suponha que exista uma solução local x^* no qual os vetores $a_i^* = a_i(x^*)$, $\forall\, i = 1, ..., m$ sejam linearmente independentes e que exista um único vetor de multiplicadores λ^* satisfazendo $g^* = A^*\lambda^*$. Dessa maneira, uma condição necessária para um minimizador local é que seja satisfeita a seguinte relação $s^T W^* s \geq 0$ para todo s satisfazendo $(A^*)^T s = 0$, onde

$$W^* = \nabla_x^2 \mathcal{L}(x^*, \lambda^*) = \nabla_x^2 f(x^*) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i^* \nabla_x^2 c_i(x^*)$$

denota a matriz Hessiana com relação a x da função Lagrangiana. É possível estabelecer também uma condição suficiente para que x^* seja um minimizador local. Tal condição suficiente é dada por: se x^* um ponto factível satisfazendo a relação $g^* = A^*\lambda^*$ e se W^* é uma matriz definida positiva para todo s satisfazendo $(A^*)^T s = 0$, então x^* é um minimizador local isolado do problema de minimização. Para maiores detalhes consulte [15].

2.3 Programação Convexa

O tópico de convexidade de conjuntos e funções é frequentemente abordado em textos que tratam de teoria de otimização. É relevante destacar a possibilidade de se estabelecer alguns resultados importantes para um problema de programação convexa no que diz respeito a natureza global das soluções e, inclusive, sobre a suficiência das condições de primeira ordem já vistas acima. Dessa forma, uma breve revisão de alguns conceitos chaves sobre convexidade é apresentada preliminarmente na sequência objetivando principalmente o estabelecimento destes resultados. Nenhuma demonstração será apresentada. No entanto, maiores detalhes poderão ser encontrados em [15].

Definição 2.3.1. *[15] Um conjunto $K \subset \mathbb{R}^n$ é dito convexo se para todo $x_0, x_1 \in K$, segue que $x_\theta \in K$ onde*

$$x_\theta = (1 - \theta)x_0 + \theta x_1, \quad \forall\, \theta \in [0, 1].$$

Lema 2.3.1. *[15] Se K_i, $i = 1, 2, ..., m$ são conjuntos convexos então a intersecção $K = \bigcap_{i=1}^{m} K_i$ é também um conjunto convexo.*

Definição 2.3.2. *[15] Seja $f : K \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ uma função contínua e K um conjunto convexo. Uma função convexa é definida pela condição que para quaisquer $x_0, x_1 \in K$, segue que*

$$f_\theta \leq (1-\theta)f_0 + \theta f_1, \quad \forall\, \theta \in [0,1], \tag{2.7}$$

onde $f_\theta := f(x_\theta)$, $f_0 := f(x_0)$ e $f_1 := f(x_1)$.

Definição 2.3.3. *[15] Uma função $f(x)$ é dita estritamente convexa quando a desigualdade em (2.7) é estrita para todo x_0, x_1 com $x_0 \neq x_1$ e para todo $\theta \in (0,1)$.*

Definição 2.3.4. *[15] Uma função côncava $f(x)$ é definida como uma função para a qual $-f(x)$ é convexa. Da mesma forma, uma função estritamente côncava $f(x)$ é aquela tal que $-f(x)$ é estritamente convexa.*

Exemplo 2.3.1. *[15] São exemplos de conjuntos convexos: conjunto vazio, um ponto, $\mathbb{R}^n$ e uma reta. São exemplos de funções convexas: função linear (côncava e convexa), função quadrática é convexa quando a matriz Hessiana é semidefinida positiva e estritamente convexa quando a Hessiana é definida positiva, $\|x\|$ (para qualquer norma).*

Feitas estas considerações iniciais, nós temos agora condições teóricas suficientes para a formulação do problema de programação convexa. Considere então o seguinte problema de minimização

$$\min_{x \in \mathcal{K}} \{f(x)\} \ , \tag{2.8}$$

sendo $f : \mathcal{K} \to \mathbb{R}$ uma função convexa, $c_i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $i = 1, ..., m$ funções côncavas e o conjunto $\mathcal{K}$ definido através de

$$\mathcal{K} := \{x \in \mathbb{R}^n \,:\, c_i(x) \geq 0, \;\; i = 1, ..., m\}.$$

É possível verificar que o conjunto $\mathcal{K}$, na forma como foi construído, é convexo. Este fato é uma consequência do lema que vem a seguir e do lema 2.3.1.

Lema 2.3.2. *[15] Se $c(x)$ é uma função côncava então o conjunto $S_k = \{x \in \mathbb{R}^n \,:\, c(x) \geq k\}$ é convexo para cada $k \in \mathbb{R}$.*

Definição 2.3.5. *[15] O problema de minimização de uma função convexa f sobre um convexo $\mathcal{K}$ é denominado problema de programação convexa.*

Alguns aspectos a respeito da hipótese de convexidade da função objetivo e do conjunto restrição devem ser destacados:

(i) - a existência de soluções locais que não sejam globais são excluídas para este tipo de problema de acordo com o Teorema 2.3.1. Uma hipótese adicional sobre a função f permite ainda uma conclusão sobre a unicidade da solução global, como estabelece o Corolário 2.3.1 e

(ii) - as condições necessárias de primeira ordem tornam-se também suficientes para uma solução global do problema (2.9), como estabelece o Teorema 2.3.2.

Teorema 2.3.1. *[15] Toda solução local x^* para o problema (2.8) é uma solução global. Além disso, o conjunto das soluções globais é convexo.*

Corolário 2.3.1. *[15] Se $f(x)$ é uma função estritamente convexa então a solução global é única.*

Observe que o problema de minimização (2.8) não permite restrições de igualdade gerais, embora seja sempre possível incluir qualquer restrição de igualdade linear $c(x) = 0$ como a intersecção de $c(x) \geq 0$ e $-c(x) \geq 0$. Este é o caso de maior interesse nesta seção. Consideremos a partir de agora o seguinte problema de programação convexa um pouco mais particular que (2.8) dado por

$$\begin{array}{c} \min\limits_{x \in \mathbb{R}^n} \{f(x)\} \\ s.a \;\; c_i(x) \; = \; 0, \;\; i = 1, ..., m \end{array}, \tag{2.9}$$

sendo $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ uma função convexa diferenciável e $c_i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $i = 1, ..., m$ funções lineares.

Para x^* ser uma solução ótima do problema (2.9) as condições estabelecidas pelo resultado a seguir são suficientes.

Teorema 2.3.2. *[15] No problema de programação convexa (2.9), se as seguintes condições*

$$\begin{cases} \nabla_x \mathcal{L}(x, \lambda) \; = \; 0 \\ c_i(x) = 0, \; \forall i = 1, ..., m \end{cases} \tag{2.10}$$

valem em $(x, \lambda) = (x^*, \lambda^*)$, então x^* é uma solução global para (2.9).

Um exemplo do problema (2.9) é o problema de programação linear, ou seja, as funções objetivo e de restrições de igualdade são lineares. Outro exemplo é o problema de programação quadrática quando a função objetivo é quadrática com matriz Hessiana semidefinida positiva (definida positiva) e as restrições de igualdade são funções lineares, ou seja, a função objetivo é convexa (estritamente convexa).

2.4 Programação Quadrática

Considere o problema de encontrar uma solução ótima x^* para

$$\begin{aligned} &\min_{x \in \mathbb{R}^m} \{f(x)\} \\ &s.a \;\; c(x) = 0 \end{aligned}, \tag{2.11}$$

sendo a função objetivo $f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ uma função quadrática e a função restrição de igualdade $c : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ uma função linear. Suponha que o problema (2.11) admita pelo menos uma solução x^*. Se a matriz Hessiana da função objetivo é semidefinida positiva, então x^* é uma solução global. Caso a matriz Hessiana seja definida positiva, então a solução global x^* é única.

Sejam $V \in \mathbb{R}^{n \times n}$ definida positiva, $H \in \mathbb{R}^{n \times m}$ posto coluna pleno $(n \geq m)$, $G \in \mathbb{R}^{k \times m}$ posto linha pleno, $z \in \mathbb{R}^n$ e $u \in \mathbb{R}^k$ e $x \in \mathbb{R}^m$ o vetor incógnita. No próximo capítulo trataremos, particularmente, do problema de programação quadrática para a função objetivo

$$f(x) = (Hx - z)^T V (Hx - z),$$

e para a restrição de igualdade linear

$$c(x) = Gx - u,$$

aplicando o método de funções penalidade.

Observe que, a função $f(x)$ é estritamente convexa e a restrição de igualdade $c(x)$ é uma função linear e, portanto, a situação proposta é um típico problema de programação convexa. Este problema será denominado, adiante, como um problema de MQP sujeito a uma restrição de igualdade linear.

Por enquanto, abordaremos este problema sob o ponto de vista da técnica de multiplicadores de Lagrange. Considere então

$$\begin{aligned} &\min_{x \in \mathbb{R}^m} \left\{(Hx - z)^T V (Hx - z)\right\} \\ &s.a \;\; Gx - u = 0 \end{aligned} \tag{2.12}$$

e a função Lagrangiana associada

$$\mathcal{L}(x, \lambda) = f(x) + \lambda^T c(x).$$

Por se tratar de um problema de programação convexa, as condições suficientes para otimalidade são

$$\begin{cases} \nabla_x \mathcal{L}(x,\lambda) & = & 0 \\ c(x) & = & 0 \end{cases}. \tag{2.13}$$

Ou seja,

$$\begin{cases} 2(H^TVH)x & + & G^T\lambda & = & 2H^TVz \\ Gx & & & = & u \end{cases}, \tag{2.14}$$

que na forma matricial tornam-se

$$\begin{bmatrix} 2(H^TVH) & G^T \\ G & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ \lambda \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2H^TVz \\ u \end{bmatrix}. \tag{2.15}$$

De acordo com o Lema B.3.6, o sistema admite uma única solução (x^*, λ^*) dada por

$$\begin{bmatrix} x^* \\ \lambda^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2(H^TVH) & G^T \\ G & 0 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 2H^TVz \\ u \end{bmatrix}. \tag{2.16}$$

Ou ainda, a solução x^* é dada explicitamente por

$$x^* = \begin{bmatrix} I \\ 0 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} 2(H^TVH) & G^T \\ G & 0 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 2H^TVz \\ u \end{bmatrix}. \tag{2.17}$$

Definindo a variável $\bar{\lambda} := \frac{1}{2}\lambda$, a partir de (2.14) obtemos o sistema equivalente

$$\begin{cases} H^TV(Hx - z) & + & G^T\bar{\lambda} & = & 0 \\ Gx & & & = & u \end{cases}. \tag{2.18}$$

Definindo $y := -V(Hx - z)$, então $V^{-1}y + Hx = z$ e o sistema (2.18) pode ser reescrito como

$$\begin{cases} V^{-1}y & + & 0\bar{\lambda} & + & Hx & = & z \\ 0y & + & 0\bar{\lambda} & + & Gx & = & u \\ -H^Ty & + & G^T\bar{\lambda} & + & 0x & = & 0 \end{cases}. \tag{2.19}$$

Definindo $\tilde{\lambda} := -\bar{\lambda}$ obtemos

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcl} V^{-1}y & + & 0\tilde{\lambda} & + & Hx & = & z \\ 0y & + & 0\tilde{\lambda} & + & Gx & = & u \\ H^T y & + & G^T\tilde{\lambda} & + & 0x & = & 0 \end{array}\right. , \tag{2.20}$$

que na forma matricial, torna-se

$$\begin{bmatrix} V^{-1} & 0 & H \\ 0 & 0 & G \\ H^T & G^T & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y \\ \tilde{\lambda} \\ x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z \\ u \\ 0 \end{bmatrix}. \tag{2.21}$$

De acordo com o Lema B.3.7, o sistema admite uma única solução dada por

$$\begin{bmatrix} y^* \\ \tilde{\lambda}^* \\ x^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} V^{-1} & 0 & H \\ 0 & 0 & G \\ H^T & G^T & 0 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} z \\ u \\ 0 \end{bmatrix}, \tag{2.22}$$

sendo $\lambda^* = -2\tilde{\lambda}^*$. Ou melhor,

$$x^* = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ I \end{bmatrix}^T \underbrace{\begin{bmatrix} V^{-1} & 0 & H \\ 0 & 0 & G \\ H^T & G^T & 0 \end{bmatrix}^{-1}}_{\mathcal{M}} \underbrace{\begin{bmatrix} z \\ u \\ 0 \end{bmatrix}}_{w}. \tag{2.23}$$

Concluímos então que o problema (2.12) admite uma única solução x^* dada pelas expressões (2.17) ou (2.23). Observe a forma simétrica como as matrizes V^{-1}, H e G são dispostas no bloco matricial $\mathcal{M}$ em (2.23), e para os vetores conhecidos z e u compondo o vetor aumentado w. Além disso, cada uma das entradas do bloco matricial $\mathcal{M}$ é composta por uma única matriz, diferentemente da estrutura de solução apresentada em (2.17). No próximo capítulo, este mesmo problema será resolvido utilizando a técnica de funções penalidade.

Este arranjo matricial para a solução do problema (2.12) será de grande utilidade para a apresentação das equações recursivas, sob uma estrutura alternativa, para o problema de controle nominal que será abordado no Capítulo 4.

2.5 Funções Penalidade

O método de funções penalidade é um procedimento para aproximação de problemas de otimização restrita por problemas irrestritos. A aproximação é efetuada ao adicionar à função objetivo um termo que impõe um alto custo pela violação das restrições do problema. Associado a este método está um parâmetro μ que determina a severidade da penalidade e, consequentemente, o grau pelo qual o problema irrestrito se aproxima do problema restrito original. À medida que $\mu \to +\infty$, a aproximação torna-se mais precisa. Este método gera uma sequência de pontos cujo ponto limite é uma solução ótima para o problema original.

Detalhes do uso da técnica de funções penalidade são geralmente encontrados na literatura que trata da teoria de programação não-linear. Em particular, na literatura que diz respeito aos métodos de otimização restrita. Este trabalho baseou-se principalmente na teoria de funções penalidade desenvolvida nas referências [1], [4], [15], [16], [26] e [44].

2.5.1 Método

Considere o problema de minimização restrita

$$\min_{x \in S}\{f(x)\} \ , \tag{2.24}$$

sendo $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ uma função contínua e $S \subset \mathbb{R}^n$ um conjunto de restrição. A ideia fundamental do método de funções penalidade é substituir o problema (2.24) por um problema irrestrito da forma

$$\min_{x \in \mathbb{R}^n}\{f(x) \ + \ \mu P(x)\}, \tag{2.25}$$

sendo μ uma constante real positiva e $P(x)$ satisfazendo:

(a) - $P : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ é uma função contínua;

(b) - $P(x) \geq 0$ para todo $x \in \mathbb{R}^n$;

(c) - $P(x) = 0 \Leftrightarrow x \in S$.

O termo $\mu P(x)$ em (2.25) é definido como *função penalidade.*

O procedimento para resolução do problema (2.24) pelo método de funções penalidade é definido como segue:

- seja $\{\mu_k\}_{k=1}^{+\infty}$ uma seqüência de número reais satisfazendo:

$$\mu_k > 0; \;\; \mu_{k+1} > \mu_k \;\text{ e }\; \lim_{k\to+\infty} \mu_k = +\infty; \tag{2.26}$$

- defina para cada μ_k a função $q(\mu_k, x) = f(x) + \mu_k P(x)$;

- para cada k resolva o problema $\min_x\{q(\mu_k, x)\}$, obtendo uma solução x_k.

Observação 2.5.1. *Assuma para cada k que o problema $min_x\{q(\mu_k, x)\}$ admita solução.* □

Algoritmo [4]:

- **Passo de Inicialização:** Seja $\epsilon > 0$ uma precisão pré-estabelecida. Escolha um ponto inicial x_1, um parâmetro de penalidade $\mu_1 > 0$ e um escalar $\beta > 1$. Faça $k = 1$ e vá para o passo principal.

  Passo Principal:

  1. Começando com x_k, resolva o seguinte problema

  $$\min_{x\in\mathbb{R}^n}\{f(x) + \mu_k P(x)\}. \tag{2.27}$$

     Seja x_{k+1} uma solução ótima e vá para o Passo 2.

  2. Se $\mu_k P(x_{k+1}) < \epsilon$, então pare. Caso contrário, faça $\mu_{k+1} = \beta\mu_k$, substitua k por $k+1$ e vá para o Passo 1.

2.5.2 Convergência

A convergência do método estabelecido acima será mostrada a seguir. Dois lemas serão demonstrados antes de se estabelecer o resultado principal. As demonstrações destes resultados podem ser encontradas em [26]. Porém, neste trabalho elas serão reproduzidas com maiores detalhes.

Lema 2.5.1. *[26] Sejam $\{\mu_k\}_{k=1}^{+\infty}$ uma seqüência de números reais definida como em (2.26) e $q(\mu_k, x)$ a função dada por $q(\mu_k, x) = f(x) + \mu_k P(x)$. Então, são verdadeiras as seguintes sentenças:*

(i) - $q(\mu_k, x_k) \leq q(\mu_{k+1}, x_{k+1})$;

(ii) - $P(x_k) \geq P(x_{k+1})$;

(iii) - $f(x_k) \leq f(x_{k+1})$.

Demonstração. (i) - Observe que

$$q(\mu_{k+1}, x_{k+1}) \; = \; f(x_{k+1}) \; + \; \mu_{k+1} P(x_{k+1}) \geq f(x_{k+1}) \; + \; \mu_k P(x_{k+1}),$$

pois $\mu_{k+1} > \mu_k$ e $P(x_{k+1}) \geq 0$. Lembrando que x_k é solução do problema $\min_x\{q(\mu_k, x)\}$, segue que $f(x_{k+1}) \; + \; \mu_k P(x_{k+1}) \geq f(x_k) + \mu_k P(x_k) \; = \; q(\mu_k, x_k)$.

Então, $q(\mu_k, x_k) \leq q(\mu_{k+1}, x_{k+1})$.

(ii) - De acordo com a definição de x_k, são válidas as seguintes desigualdades:

$$f(x_k) + \mu_k P(x_k) \leq f(x_{k+1}) + \mu_k P(x_{k+1});$$

$$f(x_{k+1}) + \mu_{k+1} P(x_{k+1}) \leq f(x_k) + \mu_{k+1} P(x_k).$$

Somando membro a membro as desigualdades acima resulta

$$(\mu_{k+1} - \mu_k) P(x_{k+1}) \leq (\mu_{k+1} - \mu_k) P(x_k).$$

Então, $P(x_k) \geq P(x_{k+1})$ já que $\mu_{k+1} > \mu_k$.

(iii) - Sabe-se que:

$$f(x_{k+1}) + \mu_k P(x_{k+1}) \geq f(x_k) + \mu_k P(x_k) \;\; \Rightarrow \;\; f(x_{k+1}) - f(x_k) \geq \mu_k (P(x_k) - P(x_{k+1})).$$

Do item (ii) temos que $P(x_k) \geq P(x_{k+1})$. Logo, $f(x_{k+1}) \geq f(x_k)$ pois $\mu_k > 0$.

Então, $f(x_k) \leq f(x_{k+1})$.

□

Lema 2.5.2. *[26] Seja x^* uma solução para o problema (2.24). Então, para cada $k = 1, ..., +\infty$ tem-se*

$$f(x^*) \geq q(\mu_k, x_k) \geq f(x_k).$$

Demonstração. Se x^* é a solução para o problema (2.24), então $x^* \in S$. Logo, $P(x^*) = 0$ e para cada k tem-se que

$$f(x^*) = f(x^*) + \mu_k P(x^*) \geq f(x_k) + \mu_k P(x_k) \geq f(x_k).$$

□

Definição 2.5.1. *[26] Um ponto* **a** *é um ponto limite da sequência* $\{a_k\}$ *se existe uma subsequência de* $\{a_k\}$ *que converge para* **a**. *Dessa maneira,* **a** *é uma ponto limite de* $\{a_k\}$ *se existe um subconjunto* K *dos inteiros positivos tal que a sequência* $\{a_k\}_{k \in K}$ *converge para* **a**.

A verificação que qualquer ponto limite da sequência é uma solução para o problema de minimização (2.24) é dada pelo teorema abaixo e segue dos lemas vistos acima.

Teorema 2.5.1. *[26] Seja* $\{x_k\}$ *uma seqüência gerada pelo método de funções penalidade. Então, qualquer ponto limite da seqüência é uma solução para (2.24).*

Demonstração. Considere a sequência de soluções $\{x_k\}_{k=1}^{+\infty}$ gerada pelo método de funções penalidade descrito acima. Suponha que $\{x_k\}_{k \in K}$ seja uma subsequência convergente com limite $\widehat{x}$ da sequência $\{x_k\}_{k=1}^{+\infty}$, ou seja, $\widehat{x} = \lim_{k \in K} x_k$.

Usando a hipótese de que a função objetivo f é contínua, resulta

$$\lim_{k \in K} f(x_k) = f(\widehat{x}).$$

Suponha x^* como sendo a solução ótima para o problema (2.24). Isto significa que

$$f(x^*) \leq f(x); \ \ \forall x \in S.$$

De acordo com os lemas 2.5.1 e 2.5.2 a sequência $\{q(\mu_k, x_k)\}_{k=1}^{+\infty}$ é crescente e limitada superiormente por $f^* = f(x^*)$, logo

$$\lim_{k \in K} q(\mu_k, x_k) = q^* \leq f^*.$$

Por definição, temos $q(\mu_k, x_k) = f(x_k) + \mu_k P(x_k)$. Observe então que

$$\lim_{k \in K} (q(\mu_k, x_k) - f(x_k)) \ = \ q^* - f(\widehat{x})$$

é finito. Como

$$\lim_{k \in K} (q(\mu_k, x_k) - f(x_k)) \;=\; \lim_{k \in K} \mu_k P(x_k),$$

então $\lim_{k \in K} \mu_k P(x_k)$ existe e é finito.

Por hipótese $\{\mu_k\}_{k=1}^{+\infty}$ é uma seqüência de número reais tal que para cada k tem-se

$$\mu_k > 0; \;\; \mu_{k+1} > \mu_k \;\text{ e }\; \lim_{k \to +\infty} \mu_k \;=\; +\infty.$$

Além disso, pela definição de função penalidade, $P(x_k) \geq 0$. Como $\mu_k \to +\infty$ e $P(x_k) \geq 0$, a existência do limite finito tem como conseqüência $\lim_{k \in K} P(x_k) \;=\; 0$. Ao passo que, se $\lim_{k \in K} P(x_k) \;=\; P > 0$ então $\lim_{k \in K} \mu_k P(x_k) \;=\; +\infty$, o que contradiz a justificativa da existência do limite finito.

Pela definição de função penalidade temos também que P é contínua, logo

$$\lim_{k \in K} P(x_k) \;=\; 0 \Rightarrow P(\widehat{x}) = 0 \Rightarrow \widehat{x} \in S.$$

Concluímos então que $\widehat{x}$ é um ponto factível para o problema (2.24).

Resta mostrar somente que $\widehat{x}$ trata-se de uma solução ótima. Do Lema 2.5.2 temos que $f(x_k) \leq f(x^*)$. Assim, $f(\widehat{x}) = \lim_{k \in K} f(x_k) \leq f(x^*)$. Sabemos ainda que $f(x^*) \leq f(x)$, $\forall x \in S$. Em particular, vale para $\widehat{x} \in S$. Logo, $f(\widehat{x}) \leq f(x^*) \leq f(\widehat{x})$. Então,

$$f(\widehat{x}) = f(x^*).$$

Note ainda, de acordo com o Lema 2.5.2, que $f(x^*) \geq q(\mu_k, x_k) \geq f(x_k)$. Assim,

$$\lim_{k \in K} f(x^*) \geq \lim_{k \in K} q(\mu_k, x_k) \geq \lim_{k \in K} f(x_k)$$

$$f(x^*) \geq q^* \geq f(x^*) \Rightarrow q^* \;=\; f(x^*).$$

Dessa maneira, $\lim_{k \in K} \mu_k P(x_k) \;=\; \lim_{k \in K} (q(\mu_k, x_k) - f(x_k)) \;=\; q^* - f(\widehat{x}) = 0$. Então,

$$\lim_{k \in K} \mu_k P(x_k) \;=\; 0.$$

Isto quer dizer que $\mu_k P(x_k) \to 0$ quando $k \to +\infty$. $\square$

Exemplo 2.5.1. *[4] Considere o seguinte problema de minimização restrita*

$$\min_{x_1,x_2} \left\{x_1^2 + x_2^2\right\}$$
$$s.a \;\; x_1 + x_2 - 1 = 0$$

Encontre a solução ótima e valor ótimo da função objetivo do problema.

Solução: *Seja* $\{\mu_k\}_{k=1}^{+\infty}$ *uma seqüência de número reais satisfazendo:*

$$\mu_k > 0; \;\; \mu_{k+1} > \mu_k \;\; e \;\; \lim_{k\to+\infty} \mu_k = +\infty.$$

Considere $P(x_1, x_2) = (x_1 + x_2 - 1)^2$ *e o seguinte problema de minimização irrestrita*

$$\min_{(x_1,x_2)\in\mathbb{R}^2} \left\{x_1^2 + x_2^2 + \mu_k(x_1 + x_2 - 1)^2\right\} \;,$$

onde $\mu_k > 0$ *é o parâmetro de penalidade. Observe que a função objetivo do problema irrestrito acima é uma função convexa para todo* $\mu_k > 0$*. Logo, uma condição necessária e suficiente para a otimalidade é que o gradiente de* $x_1^2 + x_2^2 + \mu_k(x_1 + x_2 - 1)^2$ *seja nulo. Isto resulta em:*

$$\begin{array}{l} \frac{\partial}{\partial x_1}(x_1^2 + x_2^2 + \mu_k(x_1 + x_2 - 1)^2) = x_1 + \mu_k(x_1 + x_2 - 1) = 0 \\ \frac{\partial}{\partial x_2}(x_1^1 + x_2^2 + \mu_k(x_1 + x_2 - 1)^2) = x_2 + \mu_k(x_1 + x_2 - 1) = 0 \end{array} . \tag{2.28}$$

Resolvendo simultaneamente as equações em (2.28), encontramos $x_1^k = x_2^k = \dfrac{\mu_k}{(2\mu_k + 1)}$*. Fazendo* $k \to +\infty$*, obtemos* $x_1^* = x_2^* = \frac{1}{2}$*. Já o valor ótimo da função objetivo é* $\frac{1}{2}$*.* □

CAPÍTULO 3

Minimizações Quadráticas

Neste capítulo será estabelecido o problema de MQP sujeito a uma restrição de igualdade linear. Este problema será resolvido através do uso do método de funções penalidade e solução ótima do problema de MQP irrestrito. Isto é, um funcional quadrático estritamente convexo será minimizado de forma iterativa sob uma restrição de igualdade linear. Embora o método de funções penalidade dependa apenas da incógnita x, este método é particularmente atrativo para lidar com problemas de programação quadrática com restrição de igualdade linear. Antes disso, formas alternativas da estrutura da solução ótima dos problemas de MQP e MQRI, apresentados na Seção 3.1, serão exibidas.

3.1 Problema de Mínimos Quadrados

3.1.1 Mínimos Quadrados Não-Regularizados

Seja $J : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$ a função quadrática dada por

$$J(x) = \|Ax - b\|^2 = (Ax - b)^T(Ax - b), \tag{3.1}$$

sendo $A \in \mathbb{R}^{n \times m}$ $(n \geq m)$ e $b \in \mathbb{R}^n$ assumidos conhecidos e $x \in \mathbb{R}^m$ o vetor incógnita. Considere o problema de mínimos quadrados não-regularizados definido a partir do seguinte problema de minimização irrestrita

$$\min_{x \in \mathbb{R}^m} \{J(x)\}. \tag{3.2}$$

Definição 3.1.1. *[21] Uma solução mínima quadrática, $\widehat{x}$, é uma solução com a seguinte propriedade*

$$\|A\widehat{x} - b\|^2 \leq \|Ax - b\|^2, \tag{3.3}$$

para todo $x \in \mathbb{R}^m$.

Lema 3.1.1. *[21] Um vetor $\widehat{x}$ é um minimizador da função (3.1)-(3.2) se e somente se ele satisfaz a chamada equação normal*

$$A^T A\widehat{x} = A^T b. \tag{3.4}$$

O valor mínimo assumido pela função $J(x)$ é dado por

$$J(\widehat{x}) = \|A\widehat{x} - b\|^2 = \|b\|^2 - \|A\widehat{x}\|^2. \tag{3.5}$$

Lema 3.1.2. *[21] Quando a matriz A tem posto completo m, existe um único $\widehat{x}$ satisfazendo (3.3) dado por*

$$\widehat{x} = (A^T A)^{-1} A^T b. \tag{3.6}$$

Além disso, o valor mínimo assumido pela função $J(x)$ é dado por

$$J(\widehat{x}) = \|A\widehat{x} - b\|^2 = b^T \left(I - A(A^T A)^{-1} A^T\right) b. \tag{3.7}$$

3.1.2 Mínimos Quadrados Ponderados

Considere o problema de MQP definido por

$$\min_{x \in \mathbb{R}^m} \{J(x)\}, \tag{3.8}$$

com a função quadrática $J(x)$ dada agora por

$$J(x) = \|Ax - b\|_W^2 = (Ax - b)^T W (Ax - b), \tag{3.9}$$

sendo $W \in \mathbb{R}^{n \times n}$ (matriz de ponderação) simétrica definida positiva, $A \in \mathbb{R}^{n \times m}$ e $b \in \mathbb{R}^n$ assumidos conhecidos e $x \in \mathbb{R}^m$ o vetor incógnita.

Definição 3.1.2. *[21] Uma solução mínima quadrática ponderada, $\widehat{x}_W$, é uma solução com a seguinte propriedade*

$$\|A\widehat{x} - b\|_W^2 \leq \|Ax - b\|_W^2, \tag{3.10}$$

para todo $x \in \mathbb{R}^m$.

Lema 3.1.3. *[21] Um vetor $\widehat{x}_W$ é uma solução mínima quadrática ponderada da função quadrática (3.9) se e somente se ele satisfaz a chamada equação normal*

$$A^T W A \widehat{x} \,=\, A^T W b. \tag{3.11}$$

O valor mínimo assumido pela função $J(x)$ é dado por

$$J(\widehat{x}) \,=\, \|A\widehat{x} \,-\, b\|_W^2 \,=\, b^T W b \,-\, b^T W A \widehat{x}. \tag{3.12}$$

No caso em que A é uma matriz com posto coluna pleno, a única solução mínima quadrática ponderada $\widehat{x}$ é dada por

$$\widehat{x} \,=\, \left(A^T W A\right)^{-1} A^T W b, \tag{3.13}$$

e o valor mínimo da função $J(x)$ pode ser escrito como

$$J(\widehat{x}) \,=\, \|A\widehat{x} \,-\, b\|_W^2 \,=\, b^T(W - WA(A^T W A)^{-1} A^T W)b. \tag{3.14}$$

Uma estrutura alternativa equivalente para a solução do problema (3.8)-(3.9) será apresentada pelo próximo resultado.

Lema 3.1.4. *Considere o problema de MQP estabelecido em (3.8)-(3.9). Então, as expressões (3.13)-(3.14) podem ser reescritas como*

$$\widehat{x} \,=\, \begin{bmatrix} 0 & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} W^{-1} & A \\ A^T & 0 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} b \\ 0 \end{bmatrix}, \tag{3.15}$$

$$J(\widehat{x}) \,=\, \begin{bmatrix} b^T & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} W^{-1} & A \\ A^T & 0 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} b \\ 0 \end{bmatrix} \,=\, -\left(\begin{bmatrix} 0 & 0 & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} W^{-1} & A & b \\ A^T & 0 & 0 \\ b^T & 0 & 0 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ I \end{bmatrix} \right)^{-1}, \tag{3.16}$$

respectivamente.

Demonstração. Imediata. Basta combinar os lemas 3.1.3 e B.2.5. $\square$

3.1.3 Mínimos Quadrados Regularizados

Considere o problema de minimização definido por

$$\min_{x \in \mathbb{R}^m} \{J(x)\}, \tag{3.17}$$

com a função $J(x)$ dada agora por um funcional quadrático regularizado da forma

$$J(x) = \|x\|_Q^2 + \|Ax - b\|_W^2 = x^T Q x + (Ax - b)^T W (Ax - b), \tag{3.18}$$

sendo $Q \in \mathbb{R}^{m \times m}$ (matriz de regularização) simétrica definida positiva, $W \in \mathbb{R}^{n \times n}$ simétrica semidefinida positiva, $A \in \mathbb{R}^{n \times m}$ e $b \in \mathbb{R}^n$ assumidos conhecidos e $x \in \mathbb{R}^m$ o vetor incógnita.

Definição 3.1.3. *Uma solução mínima quadrática regularizada, $\widehat{x}_Q$, é uma solução com a seguinte propriedade*

$$\|\widehat{x}\|_Q^2 + \|A\widehat{x} - b\|_W^2 \leq \|x\|_Q^2 + \|Ax - b\|_W^2 \tag{3.19}$$

para todo $x \in \mathbb{R}^m$.

Lema 3.1.5. *[36] A solução ótima do problema (3.17)-(3.18) é dada por*

$$\widehat{x} = \left(Q + A^T W A\right)^{-1} A^T W b. \tag{3.20}$$

3.1.4 Mínimos Quadrados Regularizados com Incertezas

Considere o problema de MQR estabelecido em (3.17)-(3.18). Suponha agora que a matriz A e o vetor b estejam sujeitos a distúrbios e ou incertezas δA e δb, respectivamente. O funcional quadrático passa a ser escrito da seguinte forma

$$J(x, \delta A, \delta b) = \|x\|_Q^2 + \|(A + \delta A)x - (b + \delta b)\|_W^2. \tag{3.21}$$

Seja o problema de minimização - maximização definido por

$$\min_{x \in \mathbb{R}^m} \max_{\delta A, \delta b} \{J(x, \delta A, \delta b)\}, \tag{3.22}$$

com a função $J(x, \delta A, \delta b)$ dada por (3.21) e as incertezas δA e δb modeladas através de

$$\begin{bmatrix} \delta A & \delta b \end{bmatrix} = H\Delta \begin{bmatrix} E_A & E_b \end{bmatrix}, \tag{3.23}$$

sendo $Q \in \mathbb{R}^{m\times m}$ (matriz de regularização) simétrica definida positiva, $W \in \mathbb{R}^{n\times n}$ simétrica semidefinida positiva, $A \in \mathbb{R}^{n\times m}$, $b \in \mathbb{R}^n$, $\{H,\, E_A,\, E_b\}$ matrizes de dimensões compatíveis, Δ uma matriz de contração arbitrária ($\|\Delta\| \leq 1$) e $x \in \mathbb{R}^m$ o vetor incógnita. Assuma que sejam conhecidos $\{Q,\, W,\, A,\, b,\, H,\, E_A,\, E_b\}$.

A solução ótima do problema min-max estabelecido acima é apresentada no resultado a seguir. Detalhes da demonstração podem ser encontrados em [37], onde um resultado mais geral é provado.

Teorema 3.1.1. *[36] O problema (3.22)-(3.23) admite uma única solução $\widehat{x}$ que é dada por*

$$\widehat{x} = \left(\widehat{Q} + A^T\widehat{W}A\right)^{-1}\left(A^T\widehat{W}b + \widehat{\lambda}E_A^TE_b\right), \tag{3.24}$$

sendo que as matrizes modificadas $\{\widehat{Q}, \widehat{W}\}$ são obtidas a partir de $\{Q, W\}$ via

$$\widehat{Q} := Q + \widehat{\lambda}E_A^TE_A \tag{3.25}$$

$$\widehat{W} := W + WH(\widehat{\lambda}I - H^TWH)^{\dagger}H^TW \tag{3.26}$$

e $\widehat{\lambda}$ é um parâmetro escalar não negativo determinado a partir do problema de otimização

$$\widehat{\lambda} \in \arg \min_{\lambda \geq \|H^TWH\|} \{\Gamma(\lambda)\}, \tag{3.27}$$

sendo a função $\Gamma(\lambda)$ definida como

$$\Gamma(\lambda) := \|x(\lambda)\|_Q^2 + \lambda\|E_Ax(\lambda) - E_b\|^2 + \|Ax(\lambda) - b\|_{W(\lambda)}^2, \tag{3.28}$$

com

$$Q(\lambda) := Q + \lambda E_A^TE_A \tag{3.29}$$

$$W(\lambda) := W + WH(\lambda I - H^TWH)^{\dagger}H^TW \tag{3.30}$$

$$x(\lambda) := \left(Q(\lambda) + A^TW(\lambda)A\right)^{-1}\left(A^TW(\lambda)b + \lambda E_A^TE_b\right). \tag{3.31}$$

Note que todas as formas dos problemas de MQ (sem incertezas) apresentadas nesta seção tratam-se essencialmente de problemas de minimização irrestrita. Na Seção 3.3, nós estabeleceremos o problema de mínimos quadrados ponderados sujeito a uma restrição de igualdade linear. Este problema de minimização restrita será tratado sob o enfoque de funções penalidade, o que permitirá a aproximação por um problema de mínimos quadrados ponderados irrestrito cuja solução já é bem conhecida.

3.2 Estrutura Alternativa para a Solução dos Problemas MQP e MQRI

3.2.1 Problema MQP

Considere novamente o problema de MQP

$$\min_{x\in\mathbb{R}^m} \left\{(Ax-b)^T W(Ax-b)\right\}, \tag{3.32}$$

sendo $x \in \mathbb{R}^m$ o vetor incógnita, $A \in \mathbb{R}^{n\times m}$, $b \in \mathbb{R}^n$ e $W \in \mathbb{R}^{n\times n}$ com $W \succ 0$. O objetivo é mostrar que o problema de minimização (3.32) pode admitir uma representação mais confortável com respeito a estrutura de sua solução ótima. Esta representação alternativa é apresentada no lema que virá a seguir e será a estrutura da solução recursiva proposta neste trabalho para o problema do regulador nominal.

Lema 3.2.1. *Suponha que $W = W^T \succ 0$. Então, as seguintes sentenças são equivalentes:*

(i) - $\widehat{x} \in \arg\min_{x\in\mathbb{R}^m} \left\{(Ax-b)^T W(Ax-b)\right\}$;

(ii) - $x = \widehat{x}$ é uma solução de $A^T WAx = A^T Wb$;

(iii) - $(\lambda, x) = (\widehat{\lambda}, \widehat{x})$ é uma solução de

$$\begin{bmatrix} W^{-1} & A \\ A^T & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda \\ x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b \\ 0 \end{bmatrix}. \tag{3.33}$$

Se A é posto coluna pleno, então $\widehat{x}$ dado por

$$\widehat{x} \;=\; (A^T WA)^{-1}A^T Wb \;=\; \begin{bmatrix} 0 & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} W^{-1} & A \\ A^T & 0 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} b \\ 0 \end{bmatrix} \tag{3.34}$$

é a única solução para a equação em (ii).

Demonstração. $(i) \Rightarrow (ii)$ Defina $J : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ como sendo o funcional quadrático

$$J(x) = (Ax - b)^T W (Ax - b).$$

Considere $J(x)$ reescrito na forma expandida

$$J(x) \;=\; x^T(A^TWA)x \;-\; x^TA^TWb \;-\; b^TWAx \;+\; b^TWb.$$

Derivando $J(x)$ com relação a x, resulta

$$\frac{\partial}{\partial x}J(x) \;=\; (A^TWA)x \;+\; (A^TWA)^Tx \;-\; A^TWb \;-\; (b^TWA)^T \;=\; 2\left[(A^TWA)x \;-\; A^TWb\right].$$

De acordo com (i), ou seja, se $\widehat{x}$ é um ponto de mínimo de $J(x)$ então $\widehat{x}$ deve satisfazer

$$\frac{\partial}{\partial x}J(\widehat{x}) = 0 \Rightarrow (A^TWA)\widehat{x} \;-\; A^TWb \;=\; 0 \Rightarrow (A^TWA)\widehat{x} \;=\; A^TWb.$$

Então, $(A^TWA)\widehat{x} \;=\; A^TWb$.

$(ii) \Rightarrow (i)$ Observe que $\dfrac{\partial^2}{\partial x^2}J(x) \;=\; (A^TWA)$. Por hipótese $W \succ 0$, assim $\dfrac{\partial^2}{\partial x^2}J(x) \succeq 0, \forall x$.

Dessa maneira, se $\widehat{x}$ satisfaz (ii) e $\dfrac{\partial^2}{\partial x^2}J(\widehat{x}) \succeq 0$, então $\widehat{x}$ é um ponto de mínimo.

Logo, $\widehat{x} \in \arg\min_x\{(Ax - b)^TW(Ax - b)\}$.

$(ii) \Leftrightarrow (iii)$ Defina a variável auxiliar $\lambda := -W(Ax - b)$. Dessa forma,

$$A^TWAx \;=\; A^TWb \;\;\Rightarrow\;\; A^T\underbrace{W(Ax - b)}_{-\lambda} = 0 \;\;\Rightarrow\;\; A^T\lambda \;=\; 0.$$

Como $\lambda = -W(Ax - b) \Rightarrow W^{-1}\lambda + Ax = b$, temos então o seguinte sistema de equações

$$\left\{\begin{array}{lcl} W^{-1}\lambda \;+\; Ax & = & b \\ A^T\lambda & = & 0 \end{array}\right. ,$$

que na forma matricial torna-se

$$\begin{bmatrix} W^{-1} & A \\ A^T & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda \\ x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Dado que $W \succ 0$ e a matriz A é posto coluna pleno, então segue dos itens (ii) e (iii) que

$$\widehat{x} = (A^T W A)^{-1} A^T W b = \begin{bmatrix} 0 & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} W^{-1} & A \\ A^T & 0 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} b \\ 0 \end{bmatrix}.$$

A inversa do bloco matricial $\begin{bmatrix} W^{-1} & A \\ A^T & 0 \end{bmatrix}$ fica garantida pelo Lema B.3.6.

□

3.2.2 Problema MQRI

Da mesma forma como foi feito para o problema de MQP, o lema a seguir apresentará a solução ótima do problema de otimização min-max (3.21)-(3.23) numa estrutura alternativa àquela do Teorema 3.1.1.

Lema 3.2.2. *[12] Suponha $Q \succ 0$ e $W \succ 0$. As seguintes sentenças são equivalentes:*

(i) -

$$\widehat{x} \in \arg \min_{x \in \mathbb{R}^m} \max_{\delta A\,,\, \delta b} \left\{ \|x\|_Q^2 + \|(A + \delta A)\,x - (b + \delta b)\|_W^2 \right\}$$

sendo as incertezas δA e δb modeladas como

$$\begin{bmatrix} \delta A & \delta b \end{bmatrix} = H \Delta \begin{bmatrix} E_A & E_b \end{bmatrix},\ \|\Delta\| \leq 1; \tag{3.35}$$

(ii) -

$$\widehat{x} \in \arg \min_{x \in \mathbb{R}^m} \max_{\delta A\,,\, \delta b} \left\{ \left\| \begin{bmatrix} I \\ A + \delta A \end{bmatrix} x - \begin{bmatrix} 0 \\ b + \delta b \end{bmatrix} \right\|_{Q \bigoplus W}^2 \right\}$$

com as incertezas δA e δb definidas em (3.35);

(iii) -

$$\widehat{x} \in \arg\min_{x \in \mathbb{R}^m} \left\{ \|x\|_Q^2 + \left\| \begin{bmatrix} A \\ E_A \end{bmatrix} x - \begin{bmatrix} b \\ E_b \end{bmatrix} \right\|_{\widehat{W} \bigoplus \widehat{\lambda} I}^2 \right\};$$

(iv) -

$$\widehat{x} \in \arg\min_{x \in \mathbb{R}^m} \left\{ \left\| \begin{bmatrix} I \\ A \\ E_A \end{bmatrix} x - \begin{bmatrix} 0 \\ b \\ E_b \end{bmatrix} \right\|_{Q \bigoplus \widehat{W} \bigoplus \widehat{\lambda} I}^2 \right\};$$

(v) - $(\alpha, \beta, \gamma, x) = (\widehat{\alpha}, \widehat{\beta}, \widehat{\gamma}, \widehat{x})$ *é uma solução para*

$$\begin{bmatrix} Q^{-1} & 0 & 0 & I \\ 0 & \widehat{W}^{-1} & 0 & A \\ 0 & 0 & \widehat{\lambda}^{-1} I & E_A \\ I & A^T & E_A^T & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \\ x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ b \\ E_b \\ 0 \end{bmatrix};$$

Para os itens (iii), (iv) e (v), nós temos que $\widehat{\lambda}$ *é um parâmetro escalar não negativo obtido a partir de (3.27). E mais, a única solução* $\widehat{x}$ *pode ser dada, alternativamente, por*

$$\widehat{x} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ I \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} Q^{-1} & 0 & 0 & I \\ 0 & \widehat{W}^{-1} & 0 & A \\ 0 & 0 & \widehat{\lambda}^{-1} I & E_A \\ I & A^T & E_A^T & 0 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ b \\ E_b \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Demonstração. $(i) \Leftrightarrow (ii)$ Observe que

$$J(x) = \|x\|_Q^2 + \|(A + \delta A)\, x - (b + \delta b)\|_W^2 =$$

$$= x^T Q x + ((A + \delta A)\, x - (b + \delta b))^T W ((A + \delta A)\, x - (b + \delta b)) =$$

$$= \left(\begin{bmatrix} I \\ (A + \delta A) \end{bmatrix} x - \begin{bmatrix} 0 \\ (b + \delta b) \end{bmatrix} \right)^T \begin{bmatrix} Q & 0 \\ 0 & W \end{bmatrix} \left(\begin{bmatrix} I \\ (A + \delta A) \end{bmatrix} x - \begin{bmatrix} 0 \\ (b + \delta b) \end{bmatrix} \right) =$$

$$= \left\| \begin{bmatrix} I \\ A + \delta A \end{bmatrix} x - \begin{bmatrix} 0 \\ b + \delta b \end{bmatrix} \right\|_{Q \bigoplus W}^2.$$

$(i) \Leftrightarrow (iii)$ Do Teorema 3.1.1 temos que a solução ótima do problema de otimização min-max é dada por

$$\widehat{x} = \left(\widehat{Q} + A^T\widehat{W}A\right)^{-1}\left(A^T\widehat{W}b + \widehat{\lambda}E_A^TE_b\right),$$

sendo as matrizes modificadas $\{\widehat{Q}, \widehat{W}\}$ obtidas a partir de $\{Q, W\}$ via

$$\begin{aligned}\widehat{Q} &:= Q + \widehat{\lambda}E_A^TE_A \\ \widehat{W} &:= W + WH(\widehat{\lambda}I - H^TWH)^{\dagger}H^TW\end{aligned}$$

e $\widehat{\lambda}$ um parâmetro escalar não negativo determinado a partir do problema de minimização

$$\widehat{\lambda} \in \arg\min_{\lambda \geq \|H^TWH\|}\{\Gamma(\lambda)\}$$

com a função $\Gamma(\lambda)$ definida por

$$\Gamma(\lambda) := \|x(\lambda)\|_Q^2 + \lambda\|E_Ax(\lambda) - E_b\|^2 + \|Ax(\lambda) - b\|_{W(\lambda)}^2.$$

Equivalentemente, na forma de blocos matriciais, temos $\widehat{x}$ dado por

$$\widehat{x} = \left(Q + \begin{bmatrix} A^T & E_A^T \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \widehat{W} & 0 \\ 0 & \widehat{\lambda}I \end{bmatrix}\begin{bmatrix} A \\ E_A \end{bmatrix}\right)^{-1}\begin{bmatrix} A^T & E_A^T \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \widehat{W} & 0 \\ 0 & \widehat{\lambda}I \end{bmatrix}\begin{bmatrix} b \\ E_b \end{bmatrix}.$$

Definindo $\tilde{A} := \begin{bmatrix} A \\ E_A \end{bmatrix}$; $\tilde{b} := \begin{bmatrix} b \\ E_b \end{bmatrix}$ e $\tilde{W} := \begin{bmatrix} \widehat{W} & 0 \\ 0 & \widehat{\lambda}I \end{bmatrix}$, reescrevemos

$$\widehat{x} = \left(Q + \tilde{A}^T\tilde{W}\tilde{A}\right)^{-1}\tilde{A}^T\tilde{W}\tilde{b}.$$

Ou também,

$$\widehat{x} = \left(\begin{bmatrix} I & \tilde{A}^T \end{bmatrix}\begin{bmatrix} Q & 0 \\ 0 & \tilde{W} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} I \\ \tilde{A} \end{bmatrix}\right)^{-1}\begin{bmatrix} I & \tilde{A} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} Q & 0 \\ 0 & \tilde{W} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 \\ \tilde{b} \end{bmatrix}.$$

De acordo com o Lema 3.2.1, segue que

$$\widehat{x} \in \arg\min_{x\in\mathbb{R}^m} \left\{ \left(\begin{bmatrix} I \\ \tilde{A} \end{bmatrix} x - \begin{bmatrix} 0 \\ \tilde{b} \end{bmatrix} \right)^T \begin{bmatrix} Q & 0 \\ 0 & \tilde{W} \end{bmatrix} \left(\begin{bmatrix} I \\ \tilde{A} \end{bmatrix} x - \begin{bmatrix} 0 \\ \tilde{b} \end{bmatrix} \right) \right\},$$

ou ainda,

$$\widehat{x} \in \arg\min_{x\in\mathbb{R}^m} \left\{ x^T Q x + (\tilde{A}x - \tilde{b})^T \tilde{W} (\tilde{A}x - \tilde{b}) \right\}.$$

$(ii) \Leftrightarrow (iii)$ Imediato.

$(iii) \Leftrightarrow (iv)$ Observe que

$$M(x) = \|x\|_Q^2 + \left\| \begin{bmatrix} A \\ E_A \end{bmatrix} x - \begin{bmatrix} b \\ E_b \end{bmatrix} \right\|^2_{\widehat{W} \bigoplus \widehat{\lambda} I} =$$

$$= x^T Q x + \left(\begin{bmatrix} A \\ E_A \end{bmatrix} x - \begin{bmatrix} b \\ E_b \end{bmatrix} \right)^T \begin{bmatrix} \widehat{W} & 0 \\ 0 & \widehat{\lambda} I \end{bmatrix} \left(\begin{bmatrix} A \\ E_A \end{bmatrix} x - \begin{bmatrix} b \\ E_b \end{bmatrix} \right) =$$

$$= \left(\begin{bmatrix} I \\ A \\ E_A \end{bmatrix} x - \begin{bmatrix} 0 \\ b \\ E_b \end{bmatrix} \right)^T \begin{bmatrix} Q & 0 & 0 \\ 0 & \widehat{W} & 0 \\ 0 & 0 & \widehat{\lambda} I \end{bmatrix} \left(\begin{bmatrix} I \\ A \\ E_A \end{bmatrix} x - \begin{bmatrix} 0 \\ b \\ E_b \end{bmatrix} \right) =$$

$$= \left\| \begin{bmatrix} I \\ A \\ E_A \end{bmatrix} x - \begin{bmatrix} 0 \\ b \\ E_b \end{bmatrix} \right\|^2_{Q \bigoplus \widehat{W} \bigoplus \widehat{\lambda} I}.$$

$(iv) \Leftrightarrow (v)$ Considere o problema de MQP

$$\min_{x\in\mathbb{R}^m} \left\{ \left\| \begin{bmatrix} I \\ A \\ E_A \end{bmatrix} x - \begin{bmatrix} 0 \\ b \\ E_b \end{bmatrix} \right\|^2_{Q \bigoplus \widehat{W} \bigoplus \widehat{\lambda} I} \right\}. \tag{3.36}$$

De acordo com o Lema 3.2.1, $\widehat{x}$ é uma solução ótima do problema (3.36) se e somente se

$(\alpha,\, \beta,\, \gamma,\, x) = (\widehat{\alpha},\, \widehat{\beta},\, \widehat{\gamma},\, \widehat{x})$ é uma solução para

$$\begin{bmatrix} Q^{-1} & 0 & 0 & I \\ 0 & \widehat{W}^{-1} & 0 & A \\ 0 & 0 & \widehat{\lambda}^{-1}I & E_A \\ I & A^T & E_A^T & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \\ x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ b \\ E_b \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Segue do item (v) que a solução ótima $\widehat{x}$ é dada por

$$\widehat{x} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Q^{-1} & 0 & 0 & I \\ 0 & \widehat{W}^{-1} & 0 & A \\ 0 & 0 & \widehat{\lambda}^{-1}I & E_A \\ I & A^T & E_A^T & 0 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ b \\ E_b \\ 0 \end{bmatrix}.$$

□

A representação alternativa, que acabou de ser apresentada no lema acima, para a solução $\widehat{x}$ do problema (3.22) será a estrutura da solução recursiva proposta neste trabalho para o problema do regulador robusto a ser projetado no Capítulo 5.

3.3 Mínimos Quadrados Ponderados Restrito

A Proposição 3.3.1 a seguir é inspirada em um resultado apresentado em [1] e sua demonstração é uma aplicação do Teorema 2.5.1 da teoria de funções penalidade combinado com a solução ótima do problema de MQP sob a forma do Lema 3.2.1.

Proposição 3.3.1. *Sejam $V \in \mathbb{R}^{n\times n}$ definida positiva, $G \in \mathbb{R}^{k\times m}$ posto linha pleno e $H \in \mathbb{R}^{n\times m}$ posto coluna pleno. Considere o problema de minimização com restrição*

$$\begin{array}{c} \min\limits_{x\in\mathbb{R}^m} \left\{(Hx - z)^T V (Hx - z)\right\} \\ s.a\ \ Gx = u \end{array}, \tag{3.37}$$

sendo $z \in \mathbb{R}^n$, $x \in \mathbb{R}^m$ e $u \in \mathbb{R}^k$. Associado a (3.37) tem-se para cada $\mu > 0$ o seguinte problema de minimização sem restrição

$$\min_{x\in\mathbb{R}^m} \left\{ (\,\mathcal{G}x - \mathcal{B})^T\, \mathcal{V}\,(\mu)\,(\,\mathcal{G}x - \mathcal{B}) \right\}, \tag{3.38}$$

sendo $\mathcal{G} = \begin{bmatrix} H \\ G \end{bmatrix}$, $\mathcal{V}(\mu) = \begin{bmatrix} V & 0 \\ 0 & \mu I \end{bmatrix}$, $\mathcal{B} = \begin{bmatrix} z \\ u \end{bmatrix}$. *Então:*

(i) - para cada $\mu > 0$*, a solução ótima* $\widehat{x}(\mu)$ *do problema de minimização sem restrição (3.38) é dada por*

$$\widehat{x}(\mu) = \begin{bmatrix} 0 \\ I \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \mathcal{V}^{-1}(\mu) & \mathcal{G} \\ \mathcal{G}^T & 0 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \mathcal{B} \\ 0 \end{bmatrix}. \tag{3.39}$$

(ii) - $\lim_{\mu \to +\infty} \widehat{x}(\mu) = x^o$*, sendo* x^o *a solução ótima do problema de minimização (3.37) dada por*

$$x^o = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ I \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} V^{-1} & 0 & H \\ 0 & 0 & G \\ H^T & G^T & 0 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} z \\ u \\ 0 \end{bmatrix}. \tag{3.40}$$

Além disso,

$$\lim_{\mu \to +\infty} (\mathcal{G}\widehat{x}(\mu) - \mathcal{B})^T \, \mathcal{V}(\mu) \, (\mathcal{G}\widehat{x}(\mu) - \mathcal{B}) = (Hx^o - z)^T V (Hx^o - z). \tag{3.41}$$

Demonstração. Considere o problema de minimização restrita

$$\min_{x \in S} \{f(x)\}, \tag{3.42}$$

sendo $f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ a função contínua definida por $f(x) = (Hx - z)^T V (Hx - z)$ e $S \subset \mathbb{R}^m$ o conjunto restrição definido por $S := \{x \in \mathbb{R}^m \,|\, Gx - u = 0\}$.

Seja $\{\mu_k\}_{k=1}^{+\infty}$ uma seqüência de números reais satisfazendo para todo $k \in \mathbb{N}^*$ as seguintes condições: $\mu_k > 0$; $\mu_{k+1} > \mu_k$ e $\lim_{k \to +\infty} \mu_k = +\infty$. Considere também $P : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ a função definida por

$$P(x) := (Gx - u)^T (Gx - u)$$

e observe que todas as condições da definição de função penalidade são satisfeitas para a escolha de $P(x)$, ou seja, $P : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ é uma função contínua; $P(x) \geq 0$ para todo $x \in \mathbb{R}^m$ e $P(x) = 0 \Leftrightarrow x \in S$.

Defina para cada $k \in \mathbb{N}^*$ a função auxiliar

$$q(\mu_k, x) \;=\; f(x) \;+\; \mu_k P(x) \;=\; (Hx - z)^T V(Hx - z) + \mu_k (Gx - u)^T (Gx - u)$$

e considere o seguinte problema de minimização irrestrita $\min_{x \in \mathbb{R}^m} \{q(\mu_k, x)\}$.

Note que o problema $\min_{x \in \mathbb{R}^m}\{q(\mu_k, x)\}$ pode ser reescrito na forma de MQP

$$\min_{x \in \mathbb{R}^m} \left\{ \left(\begin{bmatrix} H \\ G \end{bmatrix} x - \begin{bmatrix} z \\ u \end{bmatrix} \right)^T \begin{bmatrix} V & 0 \\ 0 & \mu_k I \end{bmatrix} \left(\begin{bmatrix} H \\ G \end{bmatrix} x - \begin{bmatrix} z \\ u \end{bmatrix} \right) \right\}. \tag{3.43}$$

Além disso, para cada $k \in \mathbb{N}^*$, este problema admite uma única solução $\widehat{x}(\mu_k)$, pois $q(\mu_k, x)$ é uma função quadrática estritamente convexa em x. De acordo com o Lema 3.2.1, o problema de MQP (3.43) admite uma única solução $\widehat{x}_k \equiv \widehat{x}(\mu_k)$ dada por

$$\widehat{x}_k \;=\; \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ I \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} V^{-1} & 0 & H \\ 0 & \mu_k^{-1} I & G \\ H^T & G^T & 0 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} z \\ u \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Consideremos a sequência de soluções $\{\widehat{x}_k\}_{k=1}^{+\infty}$. De acordo com o Teorema 2.5.1, qualquer ponto limite da seqüência $\{\widehat{x}_k\}_{k=1}^{+\infty}$ é uma solução para o problema de minimização sob restrição de igualdade linear (3.37). Então, a solução ótima do problema (3.37) é dada por

$$x^o \;=\; \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ I \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} V^{-1} & 0 & H \\ 0 & 0 & G \\ H^T & G^T & 0 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} z \\ u \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Observe que a invertibilidade do bloco matricial na expressão acima permanece garantida pelo Lema B.3.7 à medida que $\mu_k^{-1} I \to 0$ quando $k \to +\infty$. E ainda, pelo Teorema 2.5.1 segue que $\mu_k P(x_k) \to 0$ quando $k \to +\infty$. Logo,

$$\lim_{k \to +\infty} \left(\begin{bmatrix} H \\ G \end{bmatrix} \widehat{x}_k - \begin{bmatrix} z \\ u \end{bmatrix} \right)^T \begin{bmatrix} V & 0 \\ 0 & \mu_k I \end{bmatrix} \left(\begin{bmatrix} H \\ G \end{bmatrix} \widehat{x}_k - \begin{bmatrix} z \\ u \end{bmatrix} \right) \;=\; (Hx^o - z)^T V (Hx^o - z).$$

$\square$

Observação 3.3.1. *O termo quadrático* $(G\widehat{x}(\mu) - u)^T \mu I (G\widehat{x}(\mu) - u)$ *tende a zero quando* $\mu \to +\infty$. *Isto é, o termo* $P(\widehat{x}(\mu)) = (G\widehat{x}(\mu) - u)^T (G\widehat{x}(\mu) - u)$ *tende a zero muito mais rápido do que os elementos da diagonal da matriz de ponderação* μI *tendem ao infinito, à medida que* $\mu \to +\infty$. *Note também que, a solução ótima (3.40) é a mesma que foi encontrada em (2.23) quando resolvemos o mesmo problema aplicando a técnica de multiplicadores de Lagrange.* $\square$

O resultado a seguir apresenta a estrutura da solução ótima para um problema de minimização sujeito a uma restrição de igualdade que se enquadra nos moldes do problema abordado na Proposição 3.3.1. À primeira vista, o resultado proposto abaixo pode parecer de aplicação bastante restrita, mas será de extrema importância para o que virá mais adiante.

Corolário 3.3.1. *Sejam* $P \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $Q \in \mathbb{R}^{n\times n}$ *e* $R \in \mathbb{R}^{m\times m}$ *matrizes simétricas definidas positivas conhecidas,* $F \in \mathbb{R}^{n\times n}$ *e* $G \in \mathbb{R}^{n\times m}$ *matrizes dadas. Assuma* $x \in \mathbb{R}^n$ *e* $y \in \mathbb{R}^m$ *vetores incógnitas e* $z \in \mathbb{R}^n$ *um vetor dado. Defina a função objetivo* $V : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ *a partir da seguinte expressão*

$$V(x,y) = x^T P x + z^T Q z + y^T R y$$

e considere o problema de minimização com restrição

$$\begin{array}{c} \min\limits_{x,y} \{V(x,y)\} \\ s.a \;\; x = Fz + Gy \end{array} . \tag{3.44}$$

Então, a solução ótima (x^o, y^o) *do problema (3.44) é dada por*

$$\begin{bmatrix} x^o \\ y^o \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} K_x \\ K_y \end{bmatrix} z, \tag{3.45}$$

com

$$\begin{bmatrix} K_x \\ K_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ I & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} P^{-1} & 0 & 0 & 0 & I & 0 \\ 0 & R^{-1} & 0 & 0 & 0 & I \\ 0 & 0 & Q^{-1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & I & -G \\ I & 0 & 0 & I & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 & -G^T & 0 & 0 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -I \\ F \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} . \tag{3.46}$$

Além disso, o valor mínimo de $V(x,y)$ *sujeito à restrição* $x = Fz + Gy$ *é dado por*

$$V(x^o, y^o) = z^T S z$$

sendo $S := K_x^T P K_x + K_y^T R K_y + Q \succ 0$.

Demonstração. Considere o problema de minimização com restrição

$$\begin{aligned} &\min_{x,\,y}\{x^T P x + z^T Q z + y^T R y\} \\ &s.a.\ x = Fz + Gy \end{aligned}\ .$$

Note que esse problema pode ser reescrito na forma do problema de MQP sujeito a uma restrição de igualdade linear

$$\begin{aligned} &\min_{\mathcal{X}}\{(\mathcal{H}\mathcal{X} - \mathcal{Z})^T \mathcal{V}\,(\mathcal{H}\mathcal{X} - \mathcal{Z})\} \\ &s.a\ \mathcal{G}\mathcal{X} = \mathcal{U} \end{aligned} \tag{3.47}$$

quando são feitas as seguintes identificações:

$$\mathcal{H} = \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & I \\ 0 & 0 \end{bmatrix};\ \ \mathcal{Z} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -I \end{bmatrix} z;\ \ \mathcal{V} = \begin{bmatrix} P & 0 & 0 \\ 0 & R & 0 \\ 0 & 0 & Q \end{bmatrix};\ \ \mathcal{G} = \begin{bmatrix} I & -G \end{bmatrix};\ \ \mathcal{X} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix};\ \ \mathcal{U} = Fz\ .$$

De fato, é simples ver que:

- a função objetivo $V(x,y) = x^T P x + z^T Q z + y^T R y$ pode ser reescrita como

$$V(x,y) = \left\{ \left(\begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & I \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -I \end{bmatrix} z \right)^T \begin{bmatrix} P & 0 & 0 \\ 0 & R & 0 \\ 0 & 0 & Q \end{bmatrix} \left(\begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & I \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -I \end{bmatrix} z \right) \right\}.$$

- e a restrição $x = Fz + Gy$ pode ser reescrita como $\begin{bmatrix} I & -G \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = Fz.$

De acordo com a Proposição 3.3.1, relacionado ao problema de minimização com restrição

(3.47), temos para cada $\mu > 0$ o problema de otimização sem restrição dado por

$$\min_{\mathcal{X}} \left\{ \left(\begin{bmatrix} \mathcal{H} \\ \mathcal{G} \end{bmatrix} \mathcal{X} - \begin{bmatrix} \mathcal{Z} \\ \mathcal{U} \end{bmatrix} \right)^T \begin{bmatrix} \mathcal{V} & 0 \\ 0 & \mu I \end{bmatrix} \left(\begin{bmatrix} \mathcal{H} \\ \mathcal{G} \end{bmatrix} \mathcal{X} - \begin{bmatrix} \mathcal{Z} \\ \mathcal{U} \end{bmatrix} \right) \right\}.$$

Como $\begin{bmatrix} \mathcal{H} \\ \mathcal{G} \end{bmatrix}$ tem posto coluna pleno, então para cada $\mu > 0$ a solução ótima $\widehat{\mathcal{X}}(\mu)$ é dada por

$$\widehat{\mathcal{X}}(\mu) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ I \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \mathcal{V}^{-1} & 0 & \mathcal{H} \\ 0 & \mu^{-1} I & \mathcal{G} \\ \mathcal{H}^T & \mathcal{G}^T & 0 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \mathcal{Z} \\ \mathcal{U} \\ 0 \end{bmatrix},$$

ou seja, para cada $\mu > 0$ tem-se que

$$\begin{bmatrix} \widehat{x}(\mu) \\ \widehat{y}(\mu) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ I & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} P^{-1} & 0 & 0 & 0 & I & 0 \\ 0 & R^{-1} & 0 & 0 & 0 & I \\ 0 & 0 & Q^{-1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mu^{-1} I & I & -G \\ I & 0 & 0 & I & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 & -G^T & 0 & 0 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -I \\ F \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} z.$$

Já a solução ótima do problema (3.44) é obtida quando $\mu \to +\infty$. Portanto,

$$\begin{bmatrix} x^o \\ y^o \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} K_x \\ K_y \end{bmatrix} z \tag{3.48}$$

com

$$\begin{bmatrix} K_x \\ K_y \end{bmatrix} := \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ I & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} P^{-1} & 0 & 0 & 0 & I & 0 \\ 0 & R^{-1} & 0 & 0 & 0 & I \\ 0 & 0 & Q^{-1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & I & -G \\ I & 0 & 0 & I & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 & -G^T & 0 & 0 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -I \\ F \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Perceba que a invertibilidade do bloco matricial na expressão acima fica garantida pelo Lema B.3.7.

Já o valor mínimo de $V(x,y)$ sujeito à restrição $x = Fz + Gy$ é obtido através da substituição da solução ótima (x^o, y^o) na expressão

$$V(x,y) \;=\; x^T P x \;+\; z^T Q z \;+\; y^T R y$$

ou, equivalentemente, na expressão

$$V(x,y) = \left(\begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & I \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -I \end{bmatrix} z \right)^T \begin{bmatrix} P & 0 & 0 \\ 0 & R & 0 \\ 0 & 0 & Q \end{bmatrix} \left(\begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & I \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -I \end{bmatrix} z \right).$$

Substituindo a solução ótima $\begin{bmatrix} x^o \\ y^o \end{bmatrix}$ na expressão acima, resulta

$$V(x^o,y^o) = \left(\begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & I \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x^o \\ y^o \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -I \end{bmatrix} z \right)^T \begin{bmatrix} P & 0 & 0 \\ 0 & R & 0 \\ 0 & 0 & Q \end{bmatrix} \left(\begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & I \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x^o \\ y^o \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -I \end{bmatrix} z \right) =$$

$$= z^T \begin{bmatrix} K_x^T & K_y^T & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P & 0 & 0 \\ 0 & R & 0 \\ 0 & 0 & Q \end{bmatrix} \begin{bmatrix} K_x \\ K_y \\ I \end{bmatrix} z \;=\; z^T \left(K_x^T P K_x + K_y^T R K_y + Q \right) z.$$

Defina $S := K_x^T P K_x + K_y^T R K_y + Q$, então o valor mínimo é dado por

$$V^o(x,y) \;:=\; V(x^o,y^o) \;=\; z^T S z.$$

Observe que S é uma matriz simétrica. Sendo $Q \succ 0$, então para qualquer $w \in \mathbb{R}^n, w \neq 0$ temos que $w^T S w \;>\; 0$ e $w^T S w \;=\; 0$ quando $w \;=\; 0$. Dessa forma, $S \succ 0$. □

Exemplo 3.3.1. *Considere o seguinte problema de minimização*

$$\begin{array}{c} \min\limits_{x,y} \left\{ 5x^2 \;+\; 2y^2 \;+4 \right\} \\ s.a \;\; x \;=\; 1 \;-\; y \end{array} . \tag{3.49}$$

Encontre a solução ótima e o valor ótimo da função objetivo.

Solução: *Esse problema se assemelha ao problema do Corolário 3.3.1 quando fazemos as seguintes identificações:* $P = 5, \quad R = 2, \quad Q = 4, \quad F = 1, \quad G = -1, \quad z = 1$. *Então, a solução ótima* (x^o, y^o) *é dada por*

$$\begin{bmatrix} x^o \\ y^o \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} 0.2 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0.5 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0.25 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.2857 \\ 0.7143 \end{bmatrix}$$

e valor ótimo da função objetivo é 5.4286.

CAPÍTULO 4

Regulador Linear Quadrático

Este capítulo apresentará a solução recursiva em uma estrutura matricial alternativa para o problema clássico do regulador linear quadrático (RLQ) de sistemas lineares nominais discretos no tempo. A principal motivação é desenvolver expressões fundamentais que servirão como base para a dedução de um regulador robusto recursivo, que será apresentado no próximo capítulo, para uma determinada classe de sistemas lineares incertos. O problema do RLQ apresentado neste trabalho é similar ao encontrado na literatura, porém, um pouco mais restrito devido a imposição de positividade sobre as matrizes de ponderação P_{N+1}, Q_i e R_i. E mais, essa nova formulação que estamos propondo baseia-se na minimização do índice de desempenho quadrático nas variáveis de estado x_{i+1} e de controle u_i ao mesmo tempo. Esta abordagem é baseada no método de funções penalidade e no problema de MQP apresentados nos capítulos 2 e 3, respectivamente. Destaque para o método de funções penalidades utilizado para incorporar a restrição de igualdade do problema no funcional a ser minimizado. O resultado obtido com este novo procedimento é um arranjo diferenciado das matrizes de parâmetro e de ponderação na solução recursiva. Em consequência, o caso robusto resultará de uma extensão natural do caso nominal.

4.1 Formulação Clássica

É diversificada a literatura que trata do problema clássico de controle ótimo quadrático para sistemas lineares de tempo discreto no espaço de estado, veja por exemplo: [2], [9], [14], [23],

[25], [30] e [34].

O problema de controle ótimo quadrático também conhecido como problema do regulador linear quadrático (RLQ) pode ser estabelecido como segue. Considere o modelo linear no espaço de estado

$$x_{i+1} \;=\; F_i x_i \;+\; G_i u_i; \;\; i = 0, ..., N, \tag{4.1}$$

sendo $x_i \in \mathbb{R}^n$ o vetor de estado, $u_i \in \mathbb{R}^m$ o vetor de entrada (controle), $F_i \in \mathbb{R}^{n \times n}$ e $G_i \in \mathbb{R}^{n \times m}$ matrizes de parâmetros nominais assumidas conhecidas, x_0 o vetor do estado inicial e $\{u_i\}_{i=0}^{N}$ uma sequência de entradas de controle sem restrição. Assuma ainda que o sistema linear (4.1) seja controlável.

No problema de controle ótimo quadrático o objetivo é determinar uma sequência de controle ótimo $\{u_i^*\}_{i=0}^{N}$ que venha minimizar um funcional custo quadrático pré-estabelecido. Um exemplo de índice de desempenho quadrático bem conhecido na literatura é dado pela seguinte expressão

$$J \;=\; x_{N+1}^T P_{N+1} x_{N+1} \;+\; \sum_{j=0}^{N} \left(x_j^T Q_j x_j \;+\; u_j^T R_j u_j \right), \tag{4.2}$$

com $P_{N+1} \succeq 0$, $Q_j \succeq 0$ e $R_j \succ 0$ assumidas conhecidas.

Note que o problema (4.2) pode ser estabelecido na forma de um problema de minimização sujeito a uma restrição de igualdade

$$\begin{array}{c} \min\limits_{u_i} \left\{ x_{N+1}^T P_{N+1} x_{N+1} \;+\; \sum\limits_{j=0}^{N} \left(x_j^T Q_j x_j \;+\; u_j^T R_j u_j \right) \right\} \;. \\ s.a \;\; x_{i+1} \;=\; F_i x_i \;+\; G_i u_i, \;\; i = 0, ..., N \end{array} \tag{4.3}$$

Perceba que o problema de minimização restrita (4.3) é dado apenas em termos da variável de controle u_i, além disso, a trajetória ótima $\{x_i^*\}_{i=0}^{N+1}$ fica totalmente determinada pelo conhecimento prévio da sequência de controle ótimo $\{u_i^*\}_{i=0}^{N}$. Perceba também, através da restrição de igualdade (4.1) do problema, que a cada etapa de minimização i a variável de estado x_{i+1} é dada explicitamente em função do estado x_i e da variável de controle u_i. Ou seja, de forma mais geral $x_{i+1} \;=\; f(x_i, u_i)$. E que, sendo x_i assumido conhecido, o problema nesta etapa de minimização passará a depender apenas de u_i quando x_{i+1} for substituído pela restrição do problema. Dessa maneira, a lei de controle ótimo a ser obtida neste passo será dada em função do estado assumido conhecido x_i.

Além disso, a principal característica dessa lei de controle é que ela trata-se sempre de uma função linear do vetor de estado, sendo indispensável que todas as variáveis de estado estejam disponíveis para realimentação. Existem diferentes abordagens para a solução do problema de controle ótimo quadrático. Em [34], por exemplo, a abordagem adotada é baseada na técnica de minimização utilizando multiplicadores de Lagrange. Já em [9] e [25], este problema é resolvido utilizando a técnica de programação dinâmica.

Independente da abordagem utilizada para a solução do problema RLQ, a solução recursiva ótima $(*)$ bem conhecida da literatura é dada por

$$u_i^* = K_i x_i; \ i = 0, ..., N, \tag{4.4}$$

sendo o ganho $K_i \in \mathbb{R}^{m \times n}$ calculado de acordo com a seguinte recursão

$$K_i = -(R_i + G_i^T P_{i+1} G_i)^{-1} G_i^T P_{i+1} F_i, \tag{4.5}$$

$$P_i = (F_i + G_i K_i)^T P_{i+1} (F_i + G_i K_i) + K_i^T R_i K_i + Q_i, \tag{4.6}$$

para $i = N, ..., 0$ e P_{N+1} assumido conhecido. O sistema em malha fechada com a realimentação ótima (4.4) é dado por

$$x_{i+1}^* = (F_i + G_i K_i) x_i; \ i = 0, ..., N. \tag{4.7}$$

Já o custo ótimo para a sequência de controle ótimo $\{u_i^*\}$ no intervalo de interesse $[i, N]$ é

$$J_i^* = x_i^T P_i x_i. \tag{4.8}$$

Consequentemente, o valor mínimo do índice de desempenho (4.2) é $J^* = J_0^* = x_0^T P_0 x_0$ e, portanto, dado em função de P_0 e do estado inicial x_0. É possível verificar que (4.6) combinada com (4.5) resulta na forma recursiva da equação de Riccati

$$P_i = F_i^T (P_{i+1} - P_{i+1} G_i (R_i + G_i^T P_{i+1} G_i)^{-1} G_i^T P_{i+1}) F_i + Q_i; \tag{4.9}$$

$i = N, ..., 0.$

Na seção seguinte será apresentada uma formulação um pouco diferente desta usual, uma vez que tanto a variável de estado x_{i+1} quanto a variável de controle u_i serão consideradas ao mesmo tempo como variáveis do problema de minimização restrita.

4.1.1 Equação Recursiva de Riccati

Os conceitos e os resultados apresentados nesta seção são de grande relevância para o estudo das equações de Riccati. Nenhuma demonstração será apresentada, porém, detalhes são encontrados em referências clássicas que tratam da teoria de controle de sistemas.

Conceitos e Resultados Preliminares

Considere o seguinte sistema linear discreto invariante no tempo

$$x_{i+1} = Fx_i + Gu_i; \;\; i = 0, 1, ..., N, \tag{4.10}$$

sendo $F \in \mathbb{R}^{n\times n}$ e $G \in \mathbb{R}^{n\times m}$.

Definição 4.1.1. *[24] O par (F, G) é controlável se e somente se*

$$posto\left(\begin{bmatrix} G & FG & F^2G & ... & F^{n-1}G \end{bmatrix}\right) = n. \tag{4.11}$$

Teorema 4.1.1. *[24] O sistema (4.10) é denominado controlável se e somente se o par (F, G) é controlável.*

Teorema 4.1.2. *[24] O par (C, F) é observável se e somente se o par (F^T, C^T) é controlável.*

Definição 4.1.2. *[24] Uma matriz $M \in \mathbb{R}^{n\times n}$, em um sistema discreto, é dita estável se todos os seus autovalores pertencem ao disco unitário aberto.*

Definição 4.1.3. *[24] O par (F, G), em um sistema discreto, é dito estabilizável se existir uma matriz (de realimentação) $K \in \mathbb{R}^{m\times n}$ tal que $(F + GK)$ é estável.*

Teorema 4.1.3. *[24] Seja (F, G) um par controlável. Então, o par (F, G) é estabilizável.*

Definição 4.1.4. *[24] Uma solução X da equação algébrica de Riccati discreta*

$$X = F^T XF + Q - F^T XG(R + G^T XG)^{-1} G^T XF \tag{4.12}$$

é chamada de estabilizante (quase estabilizante) se todos os autovalores de

$$F - G(R + G^T XG)^{-1} G^T XF \tag{4.13}$$

pertencem ao disco unitário aberto (fechado).

Comportamento Assintótico

A equação recursiva de Riccati de tempo discreto

$$P_k = F_k^T(P_{k+1} - P_{k+1}G_k(R_k + G_k^T P_{k+1}G_k)^{-1}G_k^T P_{k+1})F_k + Q_k \tag{4.14}$$

possui a seguinte propriedade: *quando as matrizes F_k, G_k, Q_k e R_k são constantes e iguais F, G, Q e R, respectivamente, então sob certas condições a solução P_k converge, quando $k \to -\infty$, para uma solução em estado permanente satisfazendo a equação algébrica de Riccati*

$$P = F^T(P - PG(R + G^T PG)^{-1}G^T P)F + Q. \tag{4.15}$$

O próximo resultado tratará da convergência da sequência de matrizes $\{P_k\}$ gerada a partir da equação recursiva de Riccati (4.14).

Teorema 4.1.4. *[9] Sejam $F \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $G \in \mathbb{R}^{n\times m}$, $Q \in \mathbb{R}^{n\times n}$ uma matriz semidefinida positiva e $R \in \mathbb{R}^{m\times m}$ uma matriz definida positiva. Considere a equação recursiva de Riccati de tempo discreto*

$$P_{k+1} = F^T(P_k - P_kG(R + G^T P_kG)^{-1}G^T P_k)F + Q, \tag{4.16}$$

para $k = 0, 1, ...$ onde a condição inicial P_0 é uma matriz simétrica semidefinida positiva arbitrária. Assuma que o par (F, G) é controlável. Assuma também que a matriz Q é tal que possa ser escrita como C^TC, onde o par (F, C) é observável. Então:

(i) - existe uma matriz simétrica definida positiva P tal que para toda matriz simétrica semidefinida positiva inicial P_0, temos

$$\lim_{k\to+\infty} P_k = P. \tag{4.17}$$

E mais, P é a única solução da equação algébrica matricial

$$P = F^T(P - PG(R + G^T PG)^{-1}G^T P)F + Q,$$

dentro da classe de matrizes simétricas semidefinidas positivas.

(ii) - o correspondente sistema em malha fechada é estável, isto é, os autovalores da matriz

$$L = F + GK, \tag{4.18}$$

sendo $K = -(R + G^T PG)^{-1} G^T PF$*, pertencem ao disco unitário aberto.* □

O Teorema 4.1.4 mostra que para um sistema estacionário controlável com matrizes de ponderação Q e R constantes, a solução da equação recursiva de Riccati converge para uma solução simétrica semidefinida positiva P, dada qualquer matriz inicial simétrica semidefinida positiva. E mais, o sistema em malha fechada é estável.

Se impormos $Q \succ 0$, então a hipótese de observabilidade sobre o par (F, C) fica sempre garantida. No entanto, se as hipóteses de controlabilidade e observabilidade do Teorema 4.1.4 são relaxadas para as condições de estabilizabilidade e detectabilidade, então as conclusões ainda permanecem válidas com exceção, porém, da positividade da matriz limite P, a qual pode agora somente ser garantida como semidefinida positiva.

4.2 Nova Formulação

Considere novamente o modelo linear no espaço de estado dado por (4.1)

$$x_{i+1} \; = \; F_i x_i + G_i u_i; \;\; i = 0, ..., N.$$

Defina, a partir de agora, a expressão auxiliar

$$\mathcal{L}_j(x_j, u_j) \; = \; x_j^T Q_j x_j \; + \; u_j^T R_j u_j; \;\; j = 0, ..., N \tag{4.19}$$

e considere o funcional quadrático (4.2) reescrito como

$$J \; = \; x_{N+1}^T P_{N+1} x_{N+1} \; + \; \sum_{j=0}^{N} \mathcal{L}_j(x_j, u_j) \tag{4.20}$$

com as matrizes de ponderação assumidas conhecidas satisfazendo $P_{N+1} \succ 0$, $Q_j \succ 0$ e $R_j \succ 0$. Perceba que, diferentemente de (4.2), passamos a exigir agora que as matrizes de ponderação sejam todas definidas positivas. Considere então o seguinte problema de minimização sujeito a uma restrição de igualdade

$$\begin{aligned} \min_{x_{i+1},u_i} \left\{ x_{N+1}^T P_{N+1} x_{N+1} + \sum_{j=0}^{N} \mathcal{L}_j(x_j, u_j) \right\} \\ s.a \ x_{i+1} = F_i x_i + G_i u_i, \ \ i = 0, ..., N \end{aligned} . \tag{4.21}$$

O objetivo é determinar uma sequência ótima $\{(x_{i+1}^*, u_i^*)\}_{i=0}^N$ que minimize o funcional quadrático (4.20). Observe agora que a formulação do problema de controle ótimo proposta é um pouco diferente da usual (4.3). A minimização não é feita apenas em função da entrada u_i, mas também em função de x_{i+1}.

Levando em consideração que tanto a variável de estado x_{i+1} quanto a variável de controle u_i serão consideradas ao mesmo tempo como variáveis do problema de minimização restrita, então, de forma similar como analisado na Seção 4.1, as variáveis x_{i+1} e u_i serão dadas implicitamente em função do estado x_i através de (4.1). Dessa maneira, a cada etapa de minimização i a lei de controle ótimo e a trajetória ótima a serem obtidas neste passo serão dadas em função do estado assumido conhecido x_i.

4.2.1 Solução do Problema

Princípio da Otimalidade

A abordagem para solução do problema de minimização restrita (4.21) torna-se bastante simplificada se considerarmos que toda solução ótima deve satisfazer o princípio da otimalidade de Bellman.

> **Princípio da Otimalidade** ([6],[7]): *"Uma política ótima tem a propriedade de que qualquer que seja o estado inicial e decisão inicial, as decisões restantes devem constituir uma política ótima com respeito ao estado resultante da primeira decisão."*

Maiores detalhes sobre este princípio podem ser encontrados nas referências clássicas [6] e [7]. Para detalhes da demonstração do Princípio da Otimalidade veja [30].

Por meio deste princípio, o problema (4.21) pode ser resolvido recursivamente através da minimização da forma enunciada no lema a seguir.

Lema 4.2.1. *O problema*

$$\min_{x_{i+1},u_i} \left\{ x_{N+1}^T P_{N+1} x_{N+1} \; + \; \sum_{j=0}^{N} \mathcal{L}_j(x_j, u_j) \right\}$$
$$s.a \;\; x_{i+1} \; = \; F_i x_i \; + \; G_i u_i, \;\; i = 0, ..., N.$$

pode ser resolvido recursivamente através da minimização de

$$\min_{x_1,u_0} \left\{ \mathcal{L}_0(x_0, u_0) + \min_{x_2,u_1} \left\{ \mathcal{L}_1(x_1, u_1) + \; ... \; + \min_{x_k,u_{k-1}} \left\{ \mathcal{L}_{k-1}(x_{k-1}, u_{k-1}) \; + \; ... + \right.\right.\right.$$
$$\left.\left.\left. + \min_{x_{N+1},u_N} \left\{ \mathcal{L}_N(x_N, u_N) + x_{N+1}^T P_{N+1} x_{N+1} \right\} \right\} ... \right\} \tag{4.22}$$

sujeito a $x_{i+1} = F_i x_i + G_i u_i; \;\; i = 0, ..., N.$

Demonstração. Aplicaremos o Princípio da Otimalidade para selecionar a sequência ótima $\{(x_{i+1}^*, u_i^*)\}_{i=0}^N$ que minimize (4.20). Considere para cada $i \; = \; 0, ..., N$ o funcional custo no intervalo de interesse $[i, N+1]$ dado por

$$J_i \; = \; x_{N+1}^T P_{N+1} x_{N+1} \; + \; \sum_{j=i}^{N} \mathcal{L}_j(x_j, u_j). \tag{4.23}$$

Procedemos por passos:

- $(i = N+1)$ Assuma que $J_{N+1}^*(x_{N+2}, u_{N+1}) \; = \; x_{N+1}^T P_{N+1} x_{N+1}$. Observe que é natural considerar J_{N+1}^* como feito acima, pois de acordo com a expressão (4.23) temos

$$J_{N+1}(x_{N+2}, u_{N+1}) = x_{N+1}^T P_{N+1} x_{N+1}$$

  e, dessa maneira,

$$J_{N+1}^*(x_{N+2}, u_{N+1}) \; = \; \min_{x_{N+2},\, u_{N+1}} \; \left\{ x_{N+1}^T P_{N+1} x_{N+1} \right\} \; = \; x_{N+1}^T P_{N+1} x_{N+1}$$

  já que não há dependência das variáveis x_{N+2} e u_{N+1}.

- $(i = N)$ Segue de (4.23) que

$$J_N \; = \; x_{N+1}^T P_{N+1} x_{N+1} \; + \; x_N^T Q_N x_N \; + \; u_N^T R_N u_N.$$

É preciso encontrar então (x_{N+1}^*, u_N^*) através da minimização de J_N. Assim,

$$\begin{aligned}(x_{N+1}^*, u_N^*) \in \arg \min_{x_{N+1}, u_N} &\left\{J_{N+1}^* + \mathcal{L}_N(x_N, u_N)\right\} \\ s.a \;\; x_{N+1} &= F_N x_N + G_N u_N\end{aligned}$$

sendo o custo ótimo no instante N dado por

$$\begin{aligned}J_N^* = \min_{x_{N+1}, u_N} &\{x_{N+1}^T P_{N+1} x_{N+1} + x_N^T Q_N x_N + u_N^T R_N u_N\} \\ s.a \;\; x_{N+1} &= F_N x_N + G_N u_N\end{aligned}.$$

- $(i = N-1)$ Novamente por (4.23) temos que

$$J_{N-1} = J_N + x_{N-1}^T Q_{N-1} x_{N-1} + u_{N-1}^T R_{N-1} u_{N-1}.$$

É preciso encontrar a sequência ótima $\{(x_{i+1}^*, u_i^*)\}_{i=N-1}^N$ que minimize J_{N-1}. De acordo com o Princípio da Otimalidade, dado que no passo anterior $(i = N)$ nós já encontramos a sequência ótima para o intervalo $[N, N+1]$, então a sequência ótima para este passo $(i = N-1)$ será formada pelo termo (x_{N+1}^*, u_N^*) obtido no passo anterior juntamente com o termo (x_N^*, u_{N-1}^*) que será obtido neste passo através da minimização de

$$J_{N-1} = J_N^* + x_{N-1}^T Q_{N-1} x_{N-1} + u_{N-1}^T R_{N-1} u_{N-1}.$$

Assim,

$$\begin{aligned}(x_N^*, u_{N-1}^*) \in \arg \min_{x_N, u_{N-1}} &\{J_N^* + \mathcal{L}_{N-1}(x_{N-1}, u_{N-1})\} \\ s.a \;\; x_N &= F_{N-1} x_{N-1} + G_{N-1} u_{N-1}\end{aligned},$$

sendo o custo ótimo no instante $N-1$ dado por

$$\begin{aligned}J_{N-1}^* = \min_{x_N, u_{N-1}} &\{J_N^* + x_{N-1}^T Q_{N-1} x_{N-1} + u_{N-1}^T R_{N-1} u_{N-1}\} \\ s.a \;\; x_N &= F_{N-1} x_{N-1} + G_{N-1} u_{N-1}\end{aligned}.$$

- $(i = k-1)$ Assuma agora que o custo ótimo calculado a partir de um instante de tempo k qualquer até o instante de tempo terminal $N+1$, considerando todas as possibilidades para (x_{i+1}^*, u_i^*), seja dado por J_k^*. Ou seja, de acordo com os passos anteriores

$$\begin{aligned} J_k^* \;&=\; \min_{x_{k+1},u_k} \{J_{k+1}^* \;+\; \mathcal{L}_k(x_k, u_k)\} \\ s.a \;\; x_{k+1} \;&=\; F_k x_k \;+\; G_k u_k \end{aligned} \quad . \tag{4.24}$$

Admita agora que encontramos a sequência ótima que vai do instante k até o instante $N+1$ para todo (x_{i+1}, u_i). Seja então essa sequência ótima dada por

$$(x_{k+1}^*, u_k^*), \;\; (x_{k+2}^*, u_{k+1}^*), \;\; \ldots, \;\; (x_{N+1}^*, u_N^*). \tag{4.25}$$

Suponha agora que apliquemos um par arbitrário (x_k, u_{k-1}) no instante $(k-1)$ e a partir do instante k consideremos a sequência ótima obtida anteriormente. Temos então que o custo resultante para ir do instante $(k-1)$ até ao instante terminal $N+1$ é dado por

$$J_{k-1} \;=\; J_k^* \;+\; \mathcal{L}_{k-1}(x_{k-1}, u_{k-1}).$$

De acordo com o Princípio da Otimalidade o custo ótimo no instante $k-1$ será então

$$\begin{aligned} J_{k-1}^* \;&=\; \min_{x_k;\, u_{k-1}} \{J_k^* \;+\; \mathcal{L}_{k-1}(x_{k-1}, u_{k-1})\} \\ s.a \;\; x_k \;&=\; F_{k-1} x_{k-1} \;+\; G_{k-1} u_{k-1} \end{aligned}$$

e o par ótimo (x_k^*, u_{k-1}^*) no instante $(k-1)$ é o par sujeito a restrição $x_k \;=\; F_{k-1}x_{k-1} \;+\; G_{k-1}u_{k-1}$ que minimiza o funcional $J_{k-1} \;=\; J_k^* \;+\; \mathcal{L}_{k-1}(x_{k-1}, u_{k-1})$.

Procedendo analogamente para os passos restantes $i \;=\; k-2,\, k-3,\, \ldots,\, 1,\, 0$, concluímos que o problema (4.21) pode ser resolvido recursivamente através da minimização da forma (4.22). $\square$

Solução Recursiva

Com base nos resultados vistos anteriormente e com o auxílio da técnica clássica da programação dinâmica obtém-se a solução recursiva ótima do RLQ enunciada no teorema a seguir.

Teorema 4.2.1. *Considere o seguinte funcional quadrático*

$$J = x_{N+1}^T P_{N+1} x_{N+1} + \sum_{j=0}^{N} \mathcal{L}_j(x_j, u_j)$$

e o seguinte modelo linear no espaço de estado

$$x_{i+1} = F_i x_i + G_i u_i; \quad i = 0, ..., N \quad com \quad x_0 \; = \; cte.$$

Defina o seguinte problema de minimização com restrição

$$\begin{array}{c} \min_{x_{i+1}, u_i} \{x_{N+1}^T P_{N+1} x_{N+1} + \sum_{j=0}^{N} \mathcal{L}_j(x_j, u_j)\} \\ s.a \;\; x_{i+1} = F_i x_i + G_i u_i; \; i = 0, ..., N \end{array} .$$

Então, a solução recursiva ótima para tal problema é dada por

$$\begin{bmatrix} x_{i+1}^* \\ u_i^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L_i \\ K_i \end{bmatrix} x_i; \quad i = 0, ..., N, \tag{4.26}$$

sendo L_i e K_i obtidos de acordo com a seguinte recursão

$$\begin{bmatrix} L_i \\ K_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ I & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} P_{i+1}^{-1} & 0 & 0 & 0 & I & 0 \\ 0 & R_i^{-1} & 0 & 0 & 0 & I \\ 0 & 0 & Q_i^{-1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & I & -G_i \\ I & 0 & 0 & I & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 & -G_i^T & 0 & 0 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -I \\ F_i \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \tag{4.27}$$

$$P_i \; = \; L_i^T P_{i+1} L_i \; + \; K_i^T R_i K_i \; + \; Q_i; \quad i = N, ..., 0. \tag{4.28}$$

Demonstração. De acordo com o Lema 4.2.1, este problema pode ser resolvido recursivamente através de

$$\min_{x_1; u_0} \Big\{ x_0^T Q_0 x_0 \; + \; u_0^T R_0 u_0 \; + \; \min_{x_2; u_1} \Big\{ x_1^T Q_1 x_1 \; + \; u_1^T R_1 u_1 \; + \; ... +$$

$$+ \min_{x_N; u_{N-1}} \Big\{ x_{N-1}^T Q_{N-1} x_{N-1} \; + \; u_{N-1}^T R_{N-1} u_{N-1} +$$

$$+ \min_{x_{N+1}; u_N} \Big\{ x_N^T Q_N x_N \; + \; u_N^T R_N u_N \; + \; x_{N+1}^T P_{N+1} x_{N+1} \Big\} \Big\} ... \Big\} \Big\}$$

$$s.a \;\; x_{i+1} = F_i x_i + G_i u_i; \; i = 0, ..., N$$

procedendo de trás pra frente no horizonte finito. Dessa maneira:

- Passo N

$$\begin{array}{c} \min\limits_{x_{N+1},u_N} \{x_N^T Q_N x_N + u_N^T R_N u_N + x_{N+1}^T P_{N+1} x_{N+1}\} \\ s.a \;\; x_{N+1} \;=\; F_N x_N \;+\; G_N u_N \end{array}.$$

Por hipótese $Q_N \succ 0$, $R_N \succ 0$ e $P_{N+1} \succ 0$. Considere agora as seguintes identificações:

$$x \leftarrow x_{N+1};\; y \leftarrow u_N;\; z \leftarrow x_N;\; P \leftarrow P_{N+1};\; R \leftarrow R_N;\; Q \leftarrow Q_N;\; F \leftarrow F_N \text{ e } G \leftarrow G_N.$$

Note que o problema de minimização acima assume a forma

$$\begin{array}{c} \min\limits_{x,y}\{z^T Q z \;+\; y^T R y \;+\; x^T P x\} \\ \text{s.a} \;\; x \;=\; Fz \;+\; Gy \end{array}.$$

E que, de acordo com o Corolário 3.3.1, admite a solução ótima

$$\begin{bmatrix} x_{N+1}^* \\ u_N^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L_N \\ K_N \end{bmatrix} x_N$$

com

$$\begin{bmatrix} L_N \\ K_N \end{bmatrix} := \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ I & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} P_N^{-1} & 0 & 0 & 0 & I & 0 \\ 0 & R_N^{-1} & 0 & 0 & 0 & I \\ 0 & 0 & Q_N^{-1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & I & -G_N \\ I & 0 & 0 & I & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 & -G_N^T & 0 & 0 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -I \\ F_N \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

E também,

$$\begin{array}{c} \min\limits_{x_{N+1},u_N} \{x_{N+1}^T P_{N+1} x_{N+1} + x_N^T Q_N x_N + u_N^T R_N u_N\} \\ \text{s.a} \;\; x_{N+1} \;=\; F_N x_N \;+\; G_N u_N \end{array}$$

é igual a $x_N^T S_N x_N$, sendo

$$S_N := L_N^T P_{N+1} L_N \;+\; K_N^T R_N K_N \;+\; Q_N \;\succ\; 0.$$

Considere neste passo $P_N \;=\; S_N$.

- Passo $N-1$

De acordo com o Lema 4.2.1, o problema neste passo deve considerar

$$\begin{array}{c} \min\limits_{x_N, u_{N-1}} \{\mathcal{L}_{N-1}(x_{N-1}, u_{N-1}) \,+\, x_N^T S_N x_N\} \\ \text{s.a } \; x_N \,=\, F_{N-1}x_{N-1} \,+\, G_{N-1}u_{N-1} \end{array},$$

sendo o termo $x_N^T S_N x_N$ proveniente da minimização efetuada no passo anterior. Ou seja,

$$\begin{array}{c} \min\limits_{x_N, u_{N-1}} \{x_{N-1}^T Q_{N-1} x_{N-1} \,+\, u_{N-1}^T R_{N-1} u_{N-1} \,+\, x_N^T P_N x_N\} \\ s.a \; x_N \,=\, F_{N-1}x_{N-1} \,+\, G_{N-1}u_{N-1} \end{array}.$$

Observe que o problema de minimização nesta etapa é idêntico ao da etapa anterior e, portanto, deve-se proceder de maneira análoga aplicando o Corolário 3.3.1. Logo,

$$\begin{bmatrix} x_N^* \\ u_{N-1}^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L_{N-1} \\ K_{N-1} \end{bmatrix} x_{N-1}$$

$$\begin{bmatrix} L_{N-1} \\ K_{N-1} \end{bmatrix} := \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ I & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} P_N^{-1} & 0 & 0 & 0 & I & 0 \\ 0 & R_{N-1}^{-1} & 0 & 0 & 0 & I \\ 0 & 0 & Q_{N-1}^{-1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & I & -G_{N-1} \\ I & 0 & 0 & I & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 & -G_{N-1}^T & 0 & 0 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -I \\ F_{N-1} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

e

$$\begin{array}{c} \min\limits_{x_N,\, u_{N-1}} \{x_{N-1}^T Q_{N-1} x_{N-1} + u_{N-1}^T R_{N-1} u_{N-1} + x_N^T P_N x_N\} \\ s.a. \; x_N = F_{N-1}x_{N-1} + G_{N-1}u_{N-1} \end{array}$$

é igual a $x_{N-1}^T S_{N-1} x_{N-1}$, sendo

$$S_{N-1} \,:=\, L_{N-1}^T P_N L_{N-1} \,+\, K_{N-1}^T R_{N-1} K_{N-1} \,+\, Q_{N-1} \succ 0.$$

Considere então $P_{N-1} = S_{N-1}$.

- Passo $N-2$

$$\begin{array}{c} \min\limits_{x_{N-1},\, u_{N-2}} \{x_{N-2}^T Q_{N-2} x_{N-2} + u_{N-2}^T R_{N-2} u_{N-2} + x_{N-1}^T P_{N-1} x_{N-1}\} \\ s.a. \; x_{N-1} = F_{N-2}x_{N-2} + G_{N-2}u_{N-2} \end{array}.$$

Aplicando novamente o Corolário 3.3.1, temos

$$\begin{bmatrix} x^*_{N-1} \\ u^*_{N-2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L_{N-2} \\ K_{N-2} \end{bmatrix} x_{N-2}$$

com

$$\begin{bmatrix} L_{N-2} \\ K_{N-2} \end{bmatrix} := \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ I & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} P^{-1}_{N-1} & 0 & 0 & 0 & I & 0 \\ 0 & R^{-1}_{N-2} & 0 & 0 & 0 & I \\ 0 & 0 & Q^{-1}_{N-2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & I & -G_{N-2} \\ I & 0 & 0 & I & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 & -G^T_{N-2} & 0 & 0 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -I \\ F_{N-2} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

e

$$\min_{x_{N-1},\, u_{N-2}} \{x^T_{N-1} P_{N-1} x_{N-1} + x^T_{N-2} Q_{N-2} x_{N-2} + u^T_{N-2} R_{N-2} u_{N-2}\}$$
$$s.a. \; x_{N-1} = F_{N-2} x_{N-2} + G_{N-2} u_{N-2}$$

é igual a $x^T_{N-2} S_{N-2} x_{N-2}$ sendo

$$S_{N-2} := L^T_{N-2} P_{N-1} L_{N-2} + K^T_{N-2} R_{N-2} K_{N-2} + Q_{N-2} \succ 0.$$

Considere então $P_{N-2} = S_{N-2}$.

- Passo k

Se continuarmos o decrescimento de j, sempre aplicando o mesmo princípio, então o resultado obtido para cada $k = (N-3), ..., 0$ será

$$\begin{bmatrix} x^*_{k+1} \\ u^*_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L_k \\ K_k \end{bmatrix} x_k,$$

$$\begin{bmatrix} L_k \\ K_k \end{bmatrix} := \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ I & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} P^{-1}_{k+1} & 0 & 0 & 0 & I & 0 \\ 0 & R^{-1}_k & 0 & 0 & 0 & I \\ 0 & 0 & Q^{-1}_k & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & I & -G_k \\ I & 0 & 0 & I & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 & -G^T_k & 0 & 0 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -I \\ F_k \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

$$P_k = {L_k}^T P_{k+1} L_k + {K_k}^T R_k K_k + Q_k.$$

Segue então o resultado. □

Observação 4.2.1. *Considerando a demonstração do Teorema 4.2.1, note que o problema de controle nominal pôde ser estabelecido através do seguinte problema de minimização restrita de um funcional quadrático de um passo no intervalo de interesse* $[i, N+1]$

$$\begin{array}{c} \min\limits_{x_{i+1}, u_i} \{x_{i+1}^T P_{i+1} x_{i+1} + x_i^T Q_i x_i + u_i^T R_i u_i\} \\ s.a \;\; x_{i+1} = F_i x_i + G_i u_i \end{array},$$

sendo que $x_{i+1}^T P_{i+1} x_{i+1}$ *corresponde ao custo acumulado no intervalo* $[i+1, N+1]$. *Ou, de forma equivalente, estabelecido através do problema de minimização irrestrita do funcional quadrático*

$$J_i(x_{i+1}, u_i) = \begin{bmatrix} x_{i+1} \\ u_i \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} P_{i+1} & 0 \\ 0 & R_i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{i+1} \\ u_i \end{bmatrix} + \tag{4.29}$$

$$+ \left(\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ I & -G_i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{i+1} \\ u_i \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -I \\ F_i \end{bmatrix} x_i \right)^T \begin{bmatrix} Q_i & 0 \\ 0 & \mu I \end{bmatrix} \left(\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ I & -G_i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{i+1} \\ u_i \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -I \\ F_i \end{bmatrix} x_i \right)$$

nas variáveis (x_{i+1}, u_i) *para cada valor fixado de* μ. *Onde a solução ótima é alcançada à medida que* $\mu \to +\infty$, *de acordo com a Proposição 3.3.1. Este aspecto será de grande importância para o tratamento do problema de controle robusto recursivo. A formulação será baseada numa extensão do funcional quadrático (4.29).* □

Dando prosseguimento no raciocínio da Observação 4.2.1, já vimos que a solução ótima do funcional (4.29), para cada $\mu > 0$, é dada por

$$\begin{bmatrix} \widehat{x}_{i+1}(\mu) \\ \widehat{u}_i(\mu) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ I & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} P_{i+1}^{-1} & 0 & 0 & 0 & I & 0 \\ 0 & R_i^{-1} & 0 & 0 & 0 & I \\ 0 & 0 & Q_i^{-1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mu^{-1} I & I & -G_i \\ I & 0 & 0 & I & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 & -G_i^T & 0 & 0 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -I \\ F_i \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} x_i.$$

Enquanto que, o custo ótimo para cada $\mu > 0$, segundo o Lema 3.1.4, é dado por

$$\widehat{J}_i \;=\; J_i(\widehat{x}_{i+1}(\mu), \widehat{u}_i(\mu)) =$$

$$= x_i^T \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -I \\ F_i \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} P_{i+1}^{-1} & 0 & 0 & 0 & I & 0 \\ 0 & R_i^{-1} & 0 & 0 & 0 & I \\ 0 & 0 & Q_i^{-1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mu^{-1}I & I & -G_i \\ I & 0 & 0 & I & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 & -G_i^T & 0 & 0 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -I \\ F_i \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} x_i. \tag{4.30}$$

Fazendo $\mu \to +\infty$ segue que $(\widehat{x}_{i+1}(\mu), \widehat{u}_i(\mu)) \to (x_{i+1}^*, u_i^*)$ e, consequentemente, $J_i(\widehat{x}_{i+1}(\mu), \widehat{u}_i(\mu)) \to J_i(x_{i+1}^*, u_i^*) = J_i^*$. Assim,

$$J_i^* = J_i(x_{i+1}^*, u_i^*) = x_i^T P_i x_i =$$

$$= x_i^T \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -I \\ F_i \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} P_{i+1}^{-1} & 0 & 0 & 0 & I & 0 \\ 0 & R_i^{-1} & 0 & 0 & 0 & I \\ 0 & 0 & Q_i^{-1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & I & -G_i \\ I & 0 & 0 & I & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 & -G_i^T & 0 & 0 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -I \\ F_i \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} x_i. \tag{4.31}$$

Combinando as expressões (4.27) e (4.31), resulta

$$\begin{bmatrix} L_i \\ K_i \\ P_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -I \\ 0 & 0 & F_i \\ I & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} P_{i+1}^{-1} & 0 & 0 & 0 & I & 0 \\ 0 & R_i^{-1} & 0 & 0 & 0 & I \\ 0 & 0 & Q_i^{-1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & I & -G_i \\ I & 0 & 0 & I & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 & -G_i^T & 0 & 0 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -I \\ F_i \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}. \tag{4.32}$$

Observe que as matrizes L_i, K_i e P_i podem ser calculadas a partir da mesma inversa de um bloco matricial principal. E que, tal estrutura reúne de forma simétrica todas as matrizes de parâmetros e de ponderação do sistema para o cálculo da matriz P_i.

4.2.2 Equivalência das Expressões e Comportamento Assintótico

O resultado a seguir mostrará que a estrutura das equações na solução recursiva proposta é equivalente àquelas da solução clássica bem conhecida na literatura.

Lema 4.2.2. *A solução recursiva (4.26)-(4.28) proposta no Teorema 4.2.1 pode ser reescrita na seguinte forma*

$$x^*_{i+1} = \underbrace{\left(F_i - G_i\left(R_i + G_i^T P_{i+1} G_i\right)^{-1} G_i^T P_{i+1} F_i\right)}_{L_i} x_i, \tag{4.33}$$

$$u^*_i = \underbrace{-\left(R_i + G_i^T P_{i+1} G_i\right)^{-1} G_i^T P_{i+1} F_i}_{K_i} x_i, \tag{4.34}$$

para todo $i = 0, ..., N$*, sendo*

$$P_i = F_i^T (P_{i+1} - P_{i+1} G_i \left(R_i + G_i^T P_{i+1} G_i\right)^{-1} G_i^T P_{i+1}) F_i + Q_i, \tag{4.35}$$

para todo $i = N, ..., 0$.

Demonstração. Sabemos que a solução recursiva ótima para cada $i = 0, ..., N$ é dada por

$$\begin{bmatrix} x^*_{i+1} \\ u^*_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ I & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} P_{i+1}^{-1} & 0 & 0 & 0 & I & 0 \\ 0 & R_i^{-1} & 0 & 0 & 0 & I \\ 0 & 0 & Q_i^{-1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & I & -G_i \\ I & 0 & 0 & I & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 & -G_i^T & 0 & 0 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -I \\ F_i \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} x_i.$$

Equivalentemente, a solução ótima $\begin{bmatrix} x^*_{i+1} \\ u^*_i \end{bmatrix}$ para cada instante $i = 0, ..., N$ deve compor o vetor solução do seguinte sistema linear

$$\begin{bmatrix} P_{i+1}^{-1} & 0 & 0 & 0 & I & 0 \\ 0 & R_i^{-1} & 0 & 0 & 0 & I \\ 0 & 0 & Q_i^{-1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & I & -G_i \\ I & 0 & 0 & I & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 & -G_i^T & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \\ \lambda_4 \\ x^*_{i+1} \\ u^*_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -I \\ F_i \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} x_i.$$

Temos então o seguinte sistema de equações nas variáveis λ_1, λ_2, λ_3, λ_4, x^*_{i+1} e u^*_i

$$
\begin{aligned}
P^{-1}_{i+1}\lambda_1 + Ix^*_{i+1} &= 0 \qquad (4.36)\\
R^{-1}_i\lambda_2 + Iu^*_i &= 0 \qquad (4.37)\\
Q^{-1}_i\lambda_3 &= -Ix_i \qquad (4.38)\\
Ix^*_{i+1} - G_iu^*_i &= F_ix_i \qquad (4.39)\\
I\lambda_1 + I\lambda_4 &= 0 \qquad (4.40)\\
I\lambda_2 - G^T_i\lambda_4 &= 0 \qquad (4.41)
\end{aligned}
$$

(i) - Demonstração da Equivalência da Expressão do Controle:

Combinando as equações (4.36), (4.39) e (4.40) preservando a variável u_i obtemos

$$P^{-1}_{i+1}\lambda_4 - G_iu_i = F_ix_i. \qquad (4.42)$$

A equação (4.42) juntamente com as equações (4.37), (4.38) e (4.41) formam o seguinte sistema de equações reduzido nas variáveis λ_2, λ_3, λ_4 e u_i

$$
\begin{aligned}
P^{-1}_{i+1}\lambda_4 - G_iu_i &= F_ix_i \qquad (4.43)\\
R^{-1}_i\lambda_2 + Iu_i &= 0 \qquad (4.44)\\
Q^{-1}_i\lambda_3 &= -Ix_i \qquad (4.45)\\
I\lambda_2 - G^T_i\lambda_4 &= 0 \qquad (4.46)
\end{aligned}
$$

Combinando as equações (4.43), (4.44) e (4.46) obtemos

$$(P^{-1}_{i+1} + G_iR^{-1}_iG^T_i)\lambda_4 = F_ix_i, \qquad (4.47)$$

enquanto que, (4.44) e (4.46) juntas fornecem

$$u^*_i = -R^{-1}_iG^T_i\lambda_4. \qquad (4.48)$$

Como $(P^{-1}_{i+1} + G_iR^{-1}_iG^T_i) \succ 0$, logo

$$u^*_i = -R^{-1}_iG^T_i(P^{-1}_{i+1} + G_iR^{-1}_iG^T_i)^{-1}F_ix_i, \qquad (4.49)$$

que acordo com o Lema B.1.2 é igual a

$$u_i^* = \underbrace{-\left(R_i + G_i^T P_{i+1} G_i\right)^{-1} G_i^T P_{i+1} F_i}_{K_i} x_i. \tag{4.50}$$

(ii) - Demonstração da Equivalência da Expressão do Estado Realimentado:

De (4.39) e (4.50) tiramos que

$$x_{i+1}^* = \underbrace{\left(F_i - G_i \left(R_i + G_i^T P_{i+1} G_i\right)^{-1} G_i^T P_{i+1} F_i\right)}_{L_i} x_i. \tag{4.51}$$

(iii) - Equivalência com a Equação Recursiva de Riccati.

Lembrando que

$$P_i = L_i^T P_{i+1} L_i + K_i^T R_i K_i + Q_i,$$

é imediato a partir de (4.50) e (4.51) que

$$P_i = F_i^T (P_{i+1} - P_{i+1} G_i \left(R_i + G_i^T P_{i+1} G_i\right)^{-1} G_i^T P_{i+1}) F_i + Q_i.$$

□

As equivalências demonstradas no Lema 4.2.2 permitem-nos formular um resultado análogo ao Teorema 4.1.4, para a nova estrutura das equações do RLQ nominal recursivo apresentada no Teorema 4.2.1.

Proposição 4.2.1. *Sejam $F \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $G \in \mathbb{R}^{n \times m}$, $Q \in \mathbb{R}^{n \times n}$ uma matriz definida positiva e $R \in \mathbb{R}^{m \times m}$ uma matriz definida positiva. Considere a equação recursiva*

$$P_{k+1} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -I \\ F \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} P_k^{-1} & 0 & 0 & 0 & I & 0 \\ 0 & R^{-1} & 0 & 0 & 0 & I \\ 0 & 0 & Q^{-1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & I & -G \\ I & 0 & 0 & I & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 & -G^T & 0 & 0 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -I \\ F \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \tag{4.52}$$

para $k = 0, 1, \ldots$ onde a condição inicial P_0 é uma matriz simétrica definida positiva arbitrária.

Assuma o par (F, G) controlável. Então:

(i) - existe uma matriz simétrica definida positiva P tal que para toda matriz simétrica definida positiva inicial P_0, temos

$$\lim_{k \to +\infty} P_k = P. \tag{4.53}$$

E mais, P é a única solução da equação algébrica matricial

$$P = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -I \\ F \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} P^{-1} & 0 & 0 & 0 & I & 0 \\ 0 & R^{-1} & 0 & 0 & 0 & I \\ 0 & 0 & Q^{-1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & I & -G \\ I & 0 & 0 & I & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 & -G^T & 0 & 0 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -I \\ F \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}. \tag{4.54}$$

(ii) - o correspondente sistema em malha fechada é estável, isto é, os autovalores da matriz $L = F + GK$ pertencem ao disco unitário aberto, sendo

$$\begin{bmatrix} L \\ K \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ I & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} P^{-1} & 0 & 0 & 0 & I & 0 \\ 0 & R^{-1} & 0 & 0 & 0 & I \\ 0 & 0 & Q^{-1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & I & -G \\ I & 0 & 0 & I & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 & -G^T & 0 & 0 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -I \\ F \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}. \tag{4.55}$$

□

Perceba no teorema acima a ausência da hipótese de observabilidade sobre o par (F, C), já que tal condição fica sempre garantida com a imposição de $Q \succ 0$.

CAPÍTULO 5 Regulador Robusto

Neste capítulo será deduzido um regulador robusto recursivo para sistemas lineares de tempo discreto sujeitos a incertezas paramétricas. A abordagem utilizada será baseada na extensão do funcional quadrático utilizado para a dedução do regulador nominal recursivo no Capítulo 4. O funcional obtido a partir desta extensão é a combinação de uma função penalidade e de um funcional com custo ponderado definido na teoria dos jogos.

5.1 Formulação do Problema

Considere o seguinte sistema linear de tempo discreto sujeito a incertezas paramétricas

$$x_{i+1} = (F_i + \delta F_i)x_i + (G_i + \delta G_i)u_i; \quad i = 0, ..., N, \tag{5.1}$$

sendo $F_i \in \mathbb{R}^{n\times n}$ e $G_i \in \mathbb{R}^{n\times m}$ as matrizes de parâmetros nominais, $x_i \in \mathbb{R}^n$ o vetor de estado, $u_i \in \mathbb{R}^m$ a entrada de controle e o estado inicial x_0 assumido conhecido. Sejam $\delta F_i \in \mathbb{R}^{n\times n}$ e $\delta G_i \in \mathbb{R}^{n\times m}$ as matrizes de incertezas desconhecidas modeladas como

$$\begin{bmatrix}\delta F_i & \delta G_i\end{bmatrix} = H_i \Delta_i \begin{bmatrix}E_{F_i} & E_{G_i}\end{bmatrix}; \quad i = 0, ..., N, \tag{5.2}$$

sendo $H_i \in \mathbb{R}^{n\times k}$, $E_{F_i} \in \mathbb{R}^{l\times n}$, $E_{G_i} \in \mathbb{R}^{l\times m}$ matrizes conhecidas e $\Delta_i \in \mathbb{R}^{k\times l}$ uma matriz arbitrária com $\|\Delta_i\| \leq 1$.

O problema de minimização irrestrita

$$\min_{x_{i+1},u_i} \left\{ J_i(x_{i+1},u_i) \right\}$$

sendo

$$J_i(x_{i+1},u_i) \;=\; \begin{bmatrix} x_{i+1} \\ u_i \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} P_{i+1} & 0 \\ 0 & R_i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{i+1} \\ u_i \end{bmatrix} +$$

$$+\left(\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ I & -G_i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{i+1} \\ u_i \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -I \\ F_i \end{bmatrix} x_i \right)^T \begin{bmatrix} Q_i & 0 \\ 0 & \mu I \end{bmatrix} \left(\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ I & -G_i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{i+1} \\ u_i \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -I \\ F_i \end{bmatrix} x_i \right),$$

já estabelecido para o problema de controle nominal será redefinido a fim de deduzir o controlador robusto que irá regular o sistema (5.1)-(5.2). Assuma então as seguintes identificações

$$F_i \to F_i + \delta F_i \;\text{ e }\; G_i \to G_i + \delta G_i. \tag{5.3}$$

Nós consideraremos o problema de obter uma solução ótima $(x^*_{i+1}(\mu), u^*_i(\mu))$ que resolve o seguinte problema de otimização

$$\min_{x_{i+1},u_i} \max_{\delta F_i,\delta G_i} \{J^\mu_i(x_{i+1},u_i,\delta F_i,\delta G_i)\} \tag{5.4}$$

$$\begin{bmatrix} \delta F_i & \delta G_i \end{bmatrix} = H_i \Delta_i \begin{bmatrix} E_{F_i} & E_{G_i} \end{bmatrix},$$

sendo $J^\mu_i(x_{i+1},u_i,\delta F_i,\delta G_i)$ o funcional custo quadrático dado pela seguinte expressão

$$J^\mu_i(x_{i+1},u_i,\delta F_i,\delta G_i) \;=\; \begin{bmatrix} x_{i+1} \\ u_i \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} P_{i+1} & 0 \\ 0 & R_i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{i+1} \\ u_i \end{bmatrix} + \tag{5.5}$$

$$+\left\{ \left(\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ I & -G_i \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -\delta G_i \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} x_{i+1} \\ u_i \end{bmatrix} - \left(\begin{bmatrix} -I \\ F_i \end{bmatrix} x_i + \begin{bmatrix} 0 \\ \delta F_i \end{bmatrix} x_i \right) \right\}^T \begin{bmatrix} Q_i & 0 \\ 0 & \mu I \end{bmatrix} \left\{ \bullet \right\},$$

com $\mu > 0$ fixado.

A formulação através do estabelecimento do funcional quadrático (5.5) estende a formulação proposta para o caso do controle nominal tratado no Capítulo 4. Ou seja, na ausência de incertezas o problema recai na formulação que permite a dedução do RLQ para o sistema nominal.

Observação 5.1.1. *O problema de otimização (5.4)-(5.5) trata-se de um caso particular do* *problema de otimização (3.22) quando são feitas as seguintes identificações*

$$Q \leftarrow \begin{bmatrix} P_{i+1} & 0 \\ 0 & R_i \end{bmatrix}, \quad x \leftarrow \begin{bmatrix} x_{i+1} \\ u_i \end{bmatrix}, \quad W \leftarrow \begin{bmatrix} Q_i & 0 \\ 0 & \mu I \end{bmatrix},$$

$$A \leftarrow \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ I & -G_i \end{bmatrix}, \quad \delta A \leftarrow \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -\delta G_i \end{bmatrix},$$

$$b \leftarrow \begin{bmatrix} -I \\ F_i \end{bmatrix} x_i, \quad \delta b \leftarrow \begin{bmatrix} 0 \\ \delta F_i \end{bmatrix} x_i,$$

$$H \leftarrow \begin{bmatrix} 0 \\ H_i \end{bmatrix}, \quad \Delta \leftarrow \Delta_i, \quad E_A \leftarrow \begin{bmatrix} 0 & -E_{G_i} \end{bmatrix}, \quad E_b \leftarrow E_{F_i} x_i.$$

□

Segue da Observação 5.1.1 que a solução para problema de otimização (5.4)-(5.5) pode ser obtida de acordo com a estrutura de solução estabelecida pelo Lema 3.2.2.

5.2 Regulador Robusto Recursivo

Os lemas que virão a seguir serão úteis para obtenção da solução recursiva para regular o sistema linear sujeito a incertezas (5.1)-(5.2). Assuma a partir de agora que a matriz H_i seja não nula para todo $i = 0, ..., N$.

Lema 5.2.1. *Seja $\mu > 0$ fixado e considere o problema de otimização para um passo i qualquer*

$$\min_{x_{i+1}, u_i} \max_{\delta F_i, \delta G_i} \{J_i^{\mu}(x_{i+1}, u_i, \delta F_i, \delta G_i)\} \tag{5.6}$$

$$\begin{bmatrix} \delta F_i & \delta G_i \end{bmatrix} = H_i \Delta_i \begin{bmatrix} E_{F_i} & E_{G_i} \end{bmatrix},$$

sendo

$$J_i^{\mu}(x_{i+1}, u_i, \delta F_i, \delta G_i) = \begin{bmatrix} x_{i+1} \\ u_i \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} P_{i+1} & 0 \\ 0 & R_i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{i+1} \\ u_i \end{bmatrix} + \tag{5.7}$$

$$+ \left\{ \left(\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ I & -G_i \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -\delta G_i \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} x_{i+1} \\ u_i \end{bmatrix} - \left(\begin{bmatrix} -I \\ F_i \end{bmatrix} x_i + \begin{bmatrix} 0 \\ \delta F_i \end{bmatrix} x_i \right) \right\}^T \begin{bmatrix} Q_i & 0 \\ 0 & \mu I \end{bmatrix} \left\{ \bullet \right\}.$$

São equivalentes as seguintes sentenças:

(i) - $(x_{i+1}, u_i) = (x^*_{i+1}(\mu), u^*_i(\mu))$ *é uma solução ótima do problema de otimização (5.6)-(5.7);*

(ii) - $(x^*_{i+1}(\mu), u^*_i(\mu)) \in \arg\min_{x_{i+1},u_i} \left\{(\mathcal{A}_i\mathcal{X}_i - \mathcal{B}_i)^T\mathcal{W}_i(\mathcal{A}_i\mathcal{X}_i - \mathcal{B}_i)\right\}$ *sendo*

$$\mathcal{A}_i = \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & I \\ 0 & 0 \\ \mathcal{I} & -\mathcal{G}_i \end{bmatrix}, \quad \mathcal{X}_i = \begin{bmatrix} x_{i+1} \\ u_i \end{bmatrix}, \quad \mathcal{B}_i = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -I \\ \mathcal{F}_i \end{bmatrix} x_i, \quad \mathcal{W}_i = \begin{bmatrix} P_{i+1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & R_i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \widehat{W}_i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \widehat{\lambda}_i I \end{bmatrix},$$

$$\mathcal{G}_i = \begin{bmatrix} G_i \\ E_{G_i} \end{bmatrix}, \quad \mathcal{I} = \begin{bmatrix} I \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathcal{F}_i = \begin{bmatrix} F_i \\ E_{F_i} \end{bmatrix}, \quad \widehat{W}_i = \begin{bmatrix} Q_i & 0 \\ 0 & (\mu^{-1}I - \widehat{\lambda}_i^{-1}H_iH_i^T)^{-1} \end{bmatrix};$$

(iii) - $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, x_{i+1}, u_i) = (\alpha^*_1, \alpha^*_2, \alpha^*_3, \alpha^*_4, x^*_{i+1}(\mu), u^*_i(\mu))$ *é uma solução para o seguinte sistema linear*

$$\begin{bmatrix} P_{i+1}^{-1} & 0 & 0 & 0 & I & 0 \\ 0 & R_i^{-1} & 0 & 0 & 0 & I \\ 0 & 0 & Q_i^{-1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \Sigma_i(\mu, \widehat{\lambda}_i) & \mathcal{I} & -\mathcal{G}_i \\ I & 0 & 0 & \mathcal{I}^T & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 & -\mathcal{G}_i^T & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \alpha_4 \\ x_{i+1} \\ u_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -I \\ \mathcal{F}_i \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} x_i, \tag{5.8}$$

sendo

$$\Sigma_i \equiv \Sigma_i(\mu, \widehat{\lambda}_i) := \begin{bmatrix} \mu^{-1}I - \widehat{\lambda}_i^{-1}H_iH_i^T & 0 \\ 0 & \widehat{\lambda}_i^{-1}I \end{bmatrix}.$$

Para os itens (ii)-(iii), $\widehat{\lambda}_i$ *é um parâmetro escalar não negativo obtido através do seguinte problema de minimização*

$$\widehat{\lambda}_i \in \arg \min_{\lambda_i \geq \left\|\mu H_i^T H_i\right\|} \Gamma_i(\lambda_i),$$

com $\Gamma_i(\lambda_i)$ *dado por (3.28).*

Demonstração. Considere o problema de otimização min-max (3.21)-(3.23) com as identificações feitas na Observação 5.1.1.

$(i) \Leftrightarrow (ii)$ - Segue da equivalência $(i) \Leftrightarrow (iv)$ do Lema 3.2.2.

$(ii) \Leftrightarrow (iii)$ - Basta aplicar a equivalência $(iv) \Leftrightarrow (v)$ do Lema 3.2.2. $\square$

Observação 5.2.1. *O sistema linear (5.8) na forma expandida torna-se*

$$\begin{bmatrix} P_{i+1}^{-1} & 0 & 0 & 0 & 0 & I & 0 \\ 0 & R_i^{-1} & 0 & 0 & 0 & 0 & I \\ 0 & 0 & Q_i^{-1} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mu^{-1}I - \widehat{\lambda}_i^{-1}H_iH_i^T & 0 & I & -G_i \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \widehat{\lambda}_i^{-1}I & 0 & -E_{G_i} \\ I & 0 & 0 & I & 0 & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 & -G_i^T & -E_{G_i}^T & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \alpha_{4,1} \\ \alpha_{4,2} \\ x_{i+1} \\ u_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -I \\ F_i \\ E_{F_i} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} x_i.$$

O bloco matricial à esquerda da igualdade acima é invertível e o sistema (5.8) admite uma única solução $(x_{i+1}^*(\mu), u_i^*(\mu))$ para cada $\mu > 0$. $\square$

O próximo resultado reúne as conclusões obtidas até agora a respeito do problema de otimização min-max (5.4)-(5.5) para cada instante i.

Lema 5.2.2. *Considere o seguinte problema de otimização*

$$\min_{x_{i+1},u_i} \max_{\delta F_i,\, \delta G_i} \{J_i^\mu(x_{i+1}, u_i, \delta F_i, \delta G_i)\} \tag{5.9}$$

$$\begin{bmatrix} \delta F_i & \delta G_i \end{bmatrix} = H_i \Delta_i \begin{bmatrix} E_{F_i} & E_{G_i} \end{bmatrix},$$

sendo J_i^μ o funcional custo quadrático definido por

$$J_i^\mu(x_{i+1}, u_i, \delta F_i, \delta G_i) = \begin{bmatrix} x_{i+1} \\ u_i \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} P_{i+1} & 0 \\ 0 & R_i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{i+1} \\ u_i \end{bmatrix} + \tag{5.10}$$

$$+ \left\{ \left(\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ I & -G_i \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -\delta G_i \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} x_{i+1} \\ u_i \end{bmatrix} - \left(\begin{bmatrix} -I \\ F_i \end{bmatrix} x_i + \begin{bmatrix} 0 \\ \delta F_i \end{bmatrix} x_i \right) \right\}^T \begin{bmatrix} Q_i & 0 \\ 0 & \mu I \end{bmatrix} \left\{ \bullet \right\},$$

com $\mu > 0$ fixado, $P_{i+1} \succ 0$, $Q_i \succ 0$ e $R_i \succ 0$.

Então, a solução ótima do problema (5.9)-(5.10) para cada $\mu > 0$ é dada por

$$\begin{bmatrix} x_{i+1}^*(\mu) \\ u_i^*(\mu) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L_i^\mu \\ K_i^\mu \end{bmatrix} x_i, \tag{5.11}$$

$$\begin{bmatrix} L_i^\mu \\ K_i^\mu \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ I & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_{i+1}^{-1} & 0 & 0 & 0 & I & 0 \\ 0 & R_i^{-1} & 0 & 0 & 0 & I \\ 0 & 0 & Q_i^{-1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \Sigma_i(\mu, \widehat{\lambda}_i) & \mathcal{I} & -\mathcal{G}_i \\ I & 0 & 0 & \mathcal{I}^T & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 & -\mathcal{G}_i^T & 0 & 0 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -I \\ \mathcal{F}_i \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \tag{5.12}$$

sendo

$$\Sigma_i = \begin{bmatrix} \mu^{-1} I - \widehat{\lambda}_i^{-1} H_i H_i^T & 0 \\ 0 & \widehat{\lambda}_i^{-1} I \end{bmatrix}, \quad \mathcal{I} = \begin{bmatrix} I \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathcal{G}_i = \begin{bmatrix} G_i \\ E_{G_i} \end{bmatrix}, \quad \mathcal{F}_i = \begin{bmatrix} F_i \\ E_{F_i} \end{bmatrix}$$

e $\widehat{\lambda}_i$ obtido através da minimização de $\Gamma_i(\lambda_i)$ sobre o intervalo $[\|\mu H_i^T H_i\|, +\infty)$.

Além disso, o custo ótimo $J_i^*(\mu)$ é dado por

$$J_i^*(\mu) := J_i^\mu(x_{i+1}^*, u_i^*, \delta F_i, \delta G_i) = x_i^T \Big(L_i^{\mu\,T} P_{i+1} L_i^\mu + K_i^{\mu\,T} R_i K_i^\mu + Q_i +$$

$$+ (\mathcal{I} L_i^\mu - \mathcal{G}_i K_i^\mu - \mathcal{F}_i)^T \Sigma_i^{-1}(\mu, \widehat{\lambda}_i)(\mathcal{I} L_i^\mu - \mathcal{G}_i K_i^\mu - \mathcal{F}_i) \Big) x_i. \tag{5.13}$$

Demonstração. A obtenção das expressões (5.11)-(5.12) segue imediatamente do Lema 5.2.1 e da Observação 5.2.1. Já o custo ótimo $J_i^*(\mu)$ é obtido quando substituímos a expressão da solução ótima (5.11) no funcional quadrático ponderado do item (ii) do Lema 5.2.1. □

Vale destacar que o Lema 5.2.2 fornece a solução ótima do problema de otimização (5.9)-(5.10) para cada $\mu > 0$ fixado. Note que, tal lema não trata-se ainda da solução robusta recursiva para o problema de regulação do sistema (5.1)-(5.2). A solução recursiva será apresentada após as observações que virão a seguir.

Observação 5.2.2. *Considere as hipóteses do Lema 5.2.2. Por enquanto, o parâmetro μ foi mantido como um escalar não-negativo fixado. Note que, como $\widehat{\lambda}_i \in \big[\|\mu H_i^T H_i\|, +\infty\big)$ para cada*

$\mu \in (0, +\infty)$, à medida que $\mu \to +\infty$ então $\widehat{\lambda}_i \to +\infty$ e, portanto, $\Sigma_i(\mu, \widehat{\lambda}_i) \to 0$. Ou seja,

$$\lim_{\mu \to +\infty} \Sigma_i(\mu, \widehat{\lambda}_i) \,=\, 0.$$

E ainda, de acordo com o argumento do método de funções penalidade, o termo

$$(\mathcal{I}L_i^\mu \,-\, \mathcal{G}_i K_i^\mu \,-\, \mathcal{F}_i)^T \Sigma_i^{-1}(\mu, \widehat{\lambda}_i)(\mathcal{I}L_i^\mu \,-\, \mathcal{G}_i K_i^\mu \,-\, \mathcal{F}_i) \to 0$$

à medida que $\mu \to +\infty$ (veja Seção A.1). Isto é, o termo $(\mathcal{I}L_i^\mu \,-\, \mathcal{G}_i K_i^\mu \,-\, \mathcal{F}_i)$ tende a zero muito mais rápido do que certas entradas da matriz $\Sigma_i^{-1}(\mu, \widehat{\lambda}_i)$ crescem indefinidamente.

Logo,

$$(\mathcal{I}L_i^\mu - \mathcal{G}_i K_i^\mu - \mathcal{F}_i) \to 0 \;\;\Rightarrow\;\; \begin{cases} L_i^\infty \,=\, F_i \,+\, G_i K_i^\infty \\ E_{F_i} \,+\, E_{G_i} K_i^\infty \,=\, 0 \end{cases}.$$

Defina $L_i := L_i^\infty$ e $K_i := K_i^\infty$. Então, a solução do problema de otimização min-max (5.9) é dada por:

$$\begin{bmatrix} x_{i+1}^* \\ u_i^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L_i \\ K_i \end{bmatrix} x_i, \tag{5.14}$$

sendo

$$\begin{bmatrix} L_i \\ K_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & I \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ I & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix}^T \underbrace{\begin{bmatrix} P_{i+1}^{-1} & 0 & 0 & 0 & 0 & I & 0 \\ 0 & R_i^{-1} & 0 & 0 & 0 & 0 & I \\ 0 & 0 & Q_i^{-1} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & I & -G_i \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -E_{G_i} \\ I & 0 & 0 & I & 0 & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 & -G_i^T & -E_{G_i}^T & 0 & 0 \end{bmatrix}}_{M_i}^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -I \\ F_i \\ E_{F_i} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \tag{5.15}$$

$$J_i^* \,=\, x_i^T \bigg(L_i^T P_{i+1} L_i \,+\, K_i^T R_i K_i \,+\, Q_i \bigg) x_i. \tag{5.16}$$

$\square$

Note que algumas restrições sobre a dimensão da matriz de incerteza E_{G_i} passarão a ser exigidas a partir de agora. Dentre elas, neste caso, para a garantia da invertibilidade do bloco matricial M_i em (5.15). Outras condições, motivadas pela Observação 5.2.5, serão averiguadas como veremos adiante no Apêndice A.

Já vimos que o problema de controle nominal, através da formulação alternativa proposta, pôde ser estabelecido através do seguinte problema de minimização restrita de um funcional quadrático de um passo no intervalo de interesse $[i, N+1]$

$$\begin{array}{c} \min_{x_{i+1},u_i} \{x_{i+1}^T P_{i+1} x_{i+1} + x_i^T Q_i x_i + u_i^T R_i u_i\} \\ \text{s.a} \;\; x_{i+1} \; = \; F_i x_i \; + \; G_i u_i \end{array},$$

sendo $x_{i+1}^T P_{i+1} x_{i+1}$ correspondente ao custo acumulado do intervalo $[i+1, N+1]$. Ou ainda, baseado no argumento do método de funções penalidade, estabelecido pelo problema de minimização irrestrita do funcional quadrático

$$J_i^{\mu}(x_{i+1}, u_i) \; = \; \begin{bmatrix} x_{i+1} \\ u_i \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} P_{i+1} & 0 \\ 0 & R_i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{i+1} \\ u_i \end{bmatrix} + \tag{5.17}$$

$$+ \left(\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ I & -G_i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{i+1} \\ u_i \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -I \\ F_i \end{bmatrix} x_i \right)^T \begin{bmatrix} Q_i & 0 \\ 0 & \mu I \end{bmatrix} \left(\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ I & -G_i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{i+1} \\ u_i \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -I \\ F_i \end{bmatrix} x_i \right)$$

nas variáveis (x_{i+1}, u_i) para cada valor fixado de μ, cuja solução ótima é alcançada à medida que $\mu \to +\infty$.

Relembrando que o problema de controle robusto foi formulado baseado na extensão do funcional quadrático (5.17), através das identificações de (5.3), então aspectos análogos serão levados em consideração para a dedução do regulador robusto recursivo. Estamos prontos para estabelecer o resultado principal deste capítulo.

Teorema 5.2.1. *Considere o sistema linear sujeito a incertezas paramétricas*

$$x_{i+1} \; = \; (F_i \; + \; \delta F_i) x_i \; + \; (G_i \; + \; \delta G_i) u_i; \;\; i = 0, ..., N; \;\; x_0 \; = \; cte.$$

$$\begin{bmatrix} \delta F_i & \delta G_i \end{bmatrix} = H_i \Delta_i \begin{bmatrix} E_{F_i} & E_{G_i} \end{bmatrix}.$$

Suponha que E_{G_i}, $i = 0, ..., N$ seja uma matriz retangular posto linha pleno. Então, o controlador robusto recursivo para o sistema linear sujeito a incertezas acima é dado por

$$\begin{bmatrix} x_{i+1}^* \\ u_i^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L_i \\ K_i \end{bmatrix} x_i; \;\; i = 0, ..., N, \tag{5.18}$$

sendo L_i e K_i obtidos de acordo com a seguinte recursão

$$\begin{bmatrix} L_i \\ K_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ I & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} P_{i+1}^{-1} & 0 & 0 & 0 & 0 & I & 0 \\ 0 & R_i^{-1} & 0 & 0 & 0 & 0 & I \\ 0 & 0 & Q_i^{-1} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & I & -G_i \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -E_{G_i} \\ I & 0 & 0 & I & 0 & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 & -G_i^T & -E_{G_i}^T & 0 & 0 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -I \\ F_i \\ E_{F_i} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \tag{5.19}$$

$$P_i = L_i^T P_{i+1} L_i + K_i^T R_i K_i + Q_i; \;\; i = N, ..., 0. \tag{5.20}$$

Demonstração. Considere o problema de otimização min-max (5.4)-(5.5) formulado a partir da extensão do problema minimização irrestrita do problema de controle nominal sobre o intervalo de interesse $[i, N+1]$, com $i = 0, ..., N$ qualquer. Assuma $x_{i+1}^T P_{i+1} x_{i+1}$ sendo o custo acumulado sobre o intervalo $[i+1, N+1]$. De acordo com o Lema 5.9, as expressões da solução e do respectivo custo para tal problema, para cada $\mu > 0$ fixado, são dadas por (5.11)-(5.13). Pela Observação 5.2.2 a solução neste passo, obtida quando fazemos $\mu \to +\infty$, é dada pelas expressões (5.14)-(5.16). Defina então

$$P_i := L_i^T P_{i+1} L_i + K_i^T R_i K_i + Q_i,$$

sendo $x_i^T P_i x_i$ o custo acumulado no intervalo $[i, N+1]$. Procedendo da mesma forma para os intervalos $[j, N+1]$ com $j = i-1, ..., 0$, segue o resultado proposto. □

Veja que a recursividade (5.19)-(5.20) é dada apenas em termos das matrizes de ponderação e de parâmetros do sistema. Demonstraremos no próximo capítulo que esta recursividade estará vinculada a uma equação recursiva de Riccati quando identificações adequadas forem feitas.

Observação 5.2.3. *Note que (5.18)-(5.20) não depende de H_i. Neste caso, toda informação sobre as incertezas do sistema pode ser agregada nas matrizes E_{F_i} e E_{G_i}.* □

Observação 5.2.4. *Na solução recursiva proposta pelo Teorema 5.2.1, para cada $i = 0, ..., N$ não há necessidade da atualização dos parâmetros do sistema. A forma recursiva encontrada depende somente das matrizes de parâmetros e de ponderação já conhecidas do sistema. Enquanto que, na solução recursiva proposta em [37] há a necessidade do cálculo do parâmetro $\widehat{\lambda}_i$ que deve ser* *determinado a cada novo passo sobre um intervalo* $(\mathbf{a}, +\infty)$, *onde o limitante inferior* $\mathbf{a}$ *depende da solução da equação de Riccati. Esta dependência compromete a eficiência deste procedimento, principalmente, em aplicações online.* □

Observação 5.2.5. *Já vimos na Observação 5.2.2 que o termo quadrático*

$$(\mathcal{I}L_i^{\mu} - \mathcal{G}_i K_i^{\mu} - \mathcal{F}_i)^T \Sigma_i^{-1}(\mu, \widehat{\lambda}_i)(\mathcal{I}L_i^{\mu} - \mathcal{G}_i K_i^{\mu} - \mathcal{F}_i) \to 0$$

quando $\mu \to +\infty$. *Uma análise preliminar, apoiada neste fato, será feita na Seção A.2 visando obter condições sobre as dimensões das matrizes do sistema (5.1), mais especificamente sobre* E_{G_i}, *que garantam a aplicabilidade do regulador proposto. Ou seja, obter condições que estabeleçam a existência de um ganho de realimentação de estado* K_i *de tal forma que os autovalores de* $L_i = F_i + G_i K_i$ *sejam alocados no interior do disco unitário e que* $E_{F_i} + E_{G_i} K_i = 0$. □

Observação 5.2.6. *Suponha que* K_i *satisfaça* $E_{F_i} + E_{G_i} K_i = 0$ $(\delta F_i + \delta G_i K_i = 0)$. *Então, o sistema linear incerto (5.1) realimentado pela lei de controle* $u_i = K_i x_i$ *dada em (5.19) torna-se*

$$x_{i+1} = [(F_i + \delta F_i) + (G_i + \delta G_i)K_i]\, x_i = (F_i + G_i K_i)x_i = L_i x_i, \quad i = 0, ..., N. \tag{5.21}$$

Além disso, o custo total J *no horizonte* N *é calculado como*

$$J(N, x_{i+1}, u_i, \delta F_i, \delta G_i) = x_0^T P_0 x_0,$$

para todas as incertezas admissíveis $\{\delta F_i, \delta G_i\}$ *modeladas de acordo com (5.2).* □

Podemos estabelecer, analogamente ao que foi feito para o problema de controle nominal em (4.32), uma identidade semelhante para o problema de controle robusto dada por

$$\begin{bmatrix} L_i \\ K_i \\ P_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -I \\ 0 & 0 & \mathcal{F}_i \\ I & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} P_{i+1}^{-1} & 0 & 0 & 0 & I & 0 \\ 0 & R_i^{-1} & 0 & 0 & 0 & I \\ 0 & 0 & Q_i^{-1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \mathcal{I} & -\mathcal{G}_i \\ I & 0 & 0 & \mathcal{I}^T & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 & -\mathcal{G}_i^T & 0 & 0 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -I \\ \mathcal{F}_i \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \tag{5.22}$$

sendo $\mathcal{I} = \begin{bmatrix} I \\ 0 \end{bmatrix}$, $\mathcal{G}_i = \begin{bmatrix} G_i \\ E_{G_i} \end{bmatrix}$ e $\mathcal{F}_i = \begin{bmatrix} F_i \\ E_{F_i} \end{bmatrix}$.

5.3 Exemplo Numérico

Exemplo 5.3.1. *Considere o sistema linear (5.1) com as seguintes matrizes de parâmetros*

$$F_i = F = \begin{bmatrix} 1.1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1.2 \\ -1.0 & 1.0 & 0 \end{bmatrix}, \; G_i = G = \begin{bmatrix} 0 & 1.0 \\ 1.0 & 1.0 \\ -1.0 & 0 \end{bmatrix}, \; H_i = H = \begin{bmatrix} 0.4454 \\ 0.29 \\ -0.2552 \end{bmatrix},$$

$$E_{F_i} = E_F = \begin{bmatrix} 0.04 & 0.06 & -0.056 \end{bmatrix}, \; E_{G_i} = E_G = \begin{bmatrix} 0.84 & -0.96 \end{bmatrix}, \; -1 \leq \Delta_i \leq 1$$

e as seguintes matrizes de ponderação

$$P_{N+1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \; Q_i = Q = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \; R_i = R = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Três simulações foram executadas para exemplificar a vantagem do regulador robusto proposto neste trabalho através do Teorema 5.2.1. Na primeira simulação, o sistema sujeito a incertezas foi controlado através do regulador padrão (RP) para sistemas nominais. Na segunda, o sistema foi controlado pelo regulador robusto (RR) e, na terceira, o sistema sem incertezas foi controlado via regulador padrão (RP).

Para cada instante i, cada uma das curvas das figuras 5.1 e 5.2 corresponde à média das normas euclidianas dos estados e dos custos calculados sobre T experimentos para N instantes ($T = 1000, N = 70$). Para cada experimento j, a matriz Δ_i ($\|\Delta_i\| \leq 1$) foi selecionada aleatoriamente e fixada para cada instante i.

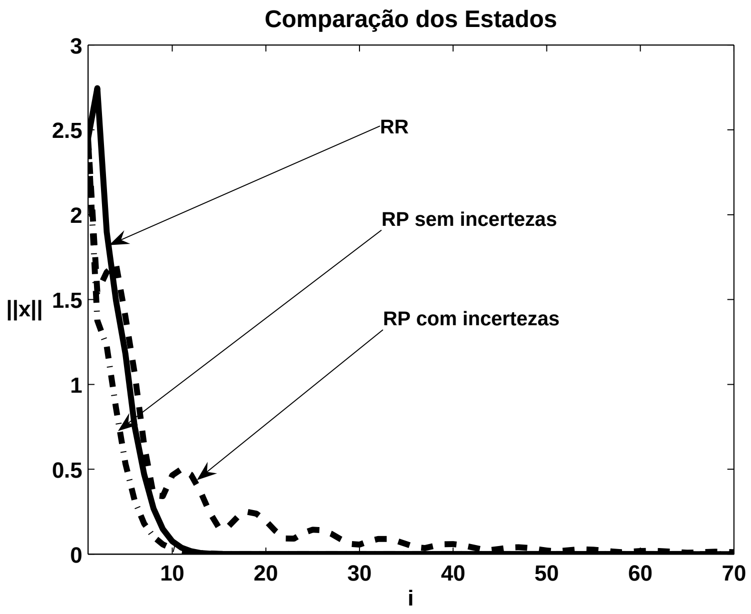

Figura 5.1: Regulador robusto (RR) proposto para o sistema com incertezas (—), regulador padrão (RP) aplicado ao sistema sem incertezas (—·—·—) e regulador padrão (RP) aplicado ao sistema com incertezas (— — —).

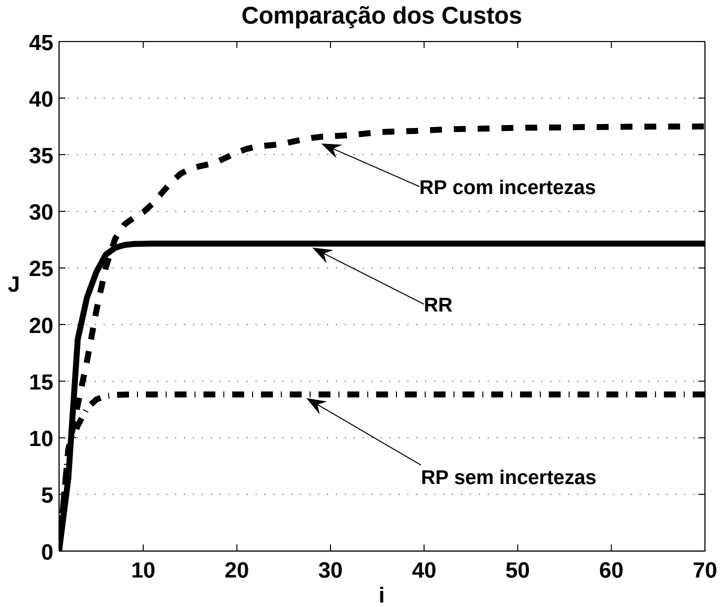

Figura 5.2: Custos calculados para o RR (sistema com incertezas) (—), para o RP (sistema sem incertezas) (— · — · —) e para o RP (sistema com incertezas) (— — —).

CAPÍTULO 6
Convergência e Estabilidade

Neste capítulo será feita a demonstração da convergência e da estabilidade do controlador robusto recursivo deduzido no Capítulo 5. Um aspecto interessante do resultado a ser apresentado é a garantia de estabilidade e robustez do regulador sem a necessidade do ajuste de parâmetros auxiliares. A linha de demonstração seguirá o raciocínio dos resultados desenvolvidos em [24] e que foram originalmente provados em [10] e [11].

6.1 Resultados Preliminares

Nesta seção serão apresentadas as demonstrações de alguns fatos e algumas identidades matriciais particulares. Embora algumas expressões matriciais sejam introduzidas aqui sem prévia justificativa, tais expressões aparecerão durante o desenvolvimento do capítulo. Assuma, para tudo o que for feito a partir daqui, que E_{G_i} trata-se sempre de uma matriz retangular.

Lema 6.1.1. *Suponha $P_{i+1} \succ 0$, $R_i \succ 0$ e E_{G_i} posto linha pleno. Sejam $\mathcal{A} = \begin{bmatrix} I \\ 0 \end{bmatrix}$, $\mathcal{G}_i = \begin{bmatrix} G_i \\ E_{G_i} \end{bmatrix}$ e $\mathcal{F}_i = \begin{bmatrix} F_i \\ E_{F_i} \end{bmatrix}$. Então, a matriz $(\mathcal{A}P_{i+1}^{-1}\mathcal{A}^T + \mathcal{G}_i R_i^{-1}\mathcal{G}_i^T)$ é simétrica definida positiva.*

Demonstração. Considere

$$M = (\mathcal{A}P_{i+1}^{-1}\mathcal{A}^T + \mathcal{G}_i R_i^{-1}\mathcal{G}_i^T) = \begin{bmatrix} I \\ 0 \end{bmatrix} P_{i+1}^{-1} \begin{bmatrix} I \\ 0 \end{bmatrix}^T + \begin{bmatrix} G_i \\ E_{G_i} \end{bmatrix} R_i^{-1} \begin{bmatrix} G_i \\ E_{G_i} \end{bmatrix}^T =$$

$$= \begin{bmatrix} P_{i+1}^{-1} + G_i R_i^{-1} G_i^T & G_i R_i^{-1} E_{G_i}^T \\ E_{G_i} R_i^{-1} G_i^T & E_{G_i} R_i^{-1} E_{G_i}^T \end{bmatrix}.$$

A simetria de M é imediata. Mostremos que M é definida positiva.

Para qualquer $x \neq 0$; $x := \begin{bmatrix} y \\ z \end{bmatrix}$ temos

$$x^T M x = \begin{bmatrix} y^T & z^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_{i+1}^{-1} + G_i R_i^{-1} G_i^T & G_i R_i^{-1} E_{G_i}^T \\ E_{G_i} R_i^{-1} G_i^T & E_{G_i} R_i^{-1} E_{G_i}^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y \\ z \end{bmatrix} =$$

$$= y^T (P_{i+1}^{-1} + G_i R_i^{-1} G_i^T) y + z^T (E_{G_i} R_i^{-1} G_i^T) y + y^T (G_i R_i^{-1} E_{G_i}^T) z + z^T (E_{G_i} R_i^{-1} E_{G_i}^T) z.$$

Os seguinte casos devem ser considerados:

- $y \neq 0$ e $z = 0$,

$$x^T M x \;=\; y^T (P_{i+1}^{-1} \;+\; G_i R_i^{-1} G_i^T) y \;>\; 0.$$

- $y = 0$ e $z \neq 0$,

$$x^T M x \;=\; z^T (E_{G_i} R_i^{-1} E_{G_i}^T) z \;>\; 0.$$

- $y \neq 0$ e $z \neq 0$,

$$x^T M x \;=\; \begin{bmatrix} y^T & z^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I \\ 0 \end{bmatrix} P_{i+1}^{-1} \begin{bmatrix} I \\ 0 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} y \\ z \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} y^T & z^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} G_i \\ E_{G_i} \end{bmatrix} R_i^{-1} \begin{bmatrix} G_i \\ E_{G_i} \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} y \\ z \end{bmatrix} =$$

$$= y^T P_{i+1}^{-1} y + u^T R_i^{-1} u > 0; \text{ sendo } u := \begin{bmatrix} G_i \\ E_{G_i} \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} y \\ z \end{bmatrix}.$$

Portanto, M é simétrica definida positiva. □

Lema 6.1.2. *Suponha $R_i \succ 0$ e E_{G_i} posto linha pleno. Então a matriz*

$$\widehat{R}_i \;:=\; R_i^{-1} - R_i^{-1} E_{G_i}^T (E_{G_i} R_i^{-1} E_{G_i}^T)^{-1} E_{G_i} R_i^{-1}$$

é simétrica semidefinida positiva. Consequentemente, $(P_{i+1}^{-1} + G_i \widehat{R}_i G_i^T) \succ 0$ se $P_{i+1} \succ 0$.

Demonstração. Dado que $R_i \succ 0$, para mostrar que $\widehat{R}_i$ é semidefinida positiva considere:

$$M = \begin{bmatrix} R_i^{-\frac{1}{2}} \\ E_{G_i} R_i^{-\frac{1}{2}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} R_i^{-\frac{T}{2}} & R_i^{-\frac{T}{2}} E_{G_i}^T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_i^{-\frac{1}{2}} R_i^{-\frac{T}{2}} & R_i^{-\frac{1}{2}} R_i^{-\frac{T}{2}} E_{G_i}^T \\ E_{G_i} R_i^{-\frac{1}{2}} R_i^{-\frac{T}{2}} & E_{G_i} R_i^{-\frac{1}{2}} R_i^{-\frac{T}{2}} E_{G_i}^T \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} R_i^{-1} & R_i^{-1} E_{G_i}^T \\ E_{G_i} R_i^{-1} & E_{G_i} R_i^{-1} E_{G_i}^T \end{bmatrix} \succeq 0.$$

De acordo com o Lema B.3.3, como $M \succeq 0$ e $(E_{G_i} R_i^{-1} E_{G_i}^T) \succ 0$, então

$$(M/(E_{G_i} R_i^{-1} E_{G_i}^T)) \;=\; R_i^{-1} - R_i^{-1} E_{G_i}^T (E_{G_i} R_i^{-1} E_{G_i}^T)^{-1} E_{G_i} R_i^{-1} \succeq 0,$$

onde, conforme a Definição B.2.1, $M/(E_{G_i} R_i^{-1} E_{G_i}^T)$ corresponde ao complemento de Schur da matriz $(E_{G_i} R_i^{-1} E_{G_i}^T)$ em M.

Portanto, $\widehat{R}_i$ é simétrica semidefinida positiva. A última conclusão é imediata a partir do fato que $P_{i+1} \succ 0$ e $\widehat{R}_i \succeq 0$. □

Lema 6.1.3. *Suponha $R_i \succ 0$ e E_{G_i} posto linha pleno. Considere*

$$K_i \;=\; \tilde{K}_i \;+\; \bar{K}_i,$$

sendo

$$\tilde{K}_i \;=\; -\widehat{R}_i G_i^T \left(P_{i+1}^{-1} + G_i \widehat{R}_i G_i^T \right)^{-1} \left(F_i - G_i R_i^{-1} E_{G_i}^T \left(E_{G_i} R_i^{-1} E_{G_i}^T \right)^{-1} E_{F_i} \right),$$

$$\bar{K}_i \;=\; -R_i^{-1} E_{G_i}^T \left(E_{G_i} R_i^{-1} E_{G_i}^T \right)^{-1} E_{F_i}.$$

Então, são válidas as seguintes identidades:

(i) - $E_{G_i} \widehat{R}_i \;=\; 0$;

(ii) - $E_{G_i} \tilde{K}_i \;=\; 0$;

(iii) - $E_{F_i} \;+\; E_{G_i} \bar{K}_i \;=\; 0$;

(iv) - $E_{F_i} \;+\; E_{G_i} K_i \;=\; 0$.

Demonstração. (i) - Como $\widehat{R}_i = R_i^{-1} - R_i^{-1}E_{G_i}^T(E_{G_i}R_i^{-1}E_{G_i}^T)^{-1}E_{G_i}R_i^{-1}$ então

$$E_{G_i}\widehat{R}_i = E_{G_i}R_i^{-1} - E_{G_i}R_i^{-1}E_{G_i}^T(E_{G_i}R_i^{-1}E_{G_i}^T)^{-1}E_{G_i}R_i^{-1} = E_{G_i}R_i^{-1} - E_{G_i}R_i^{-1} = 0.$$

(ii) - É imediata a partir de (i).

(iii) - Simplesmente

$$E_{F_i} + E_{G_i}\bar{K}_i = E_{F_i} - E_{G_i}R_i^{-1}E_{G_i}^T\left(E_{G_i}R_i^{-1}E_{G_i}^T\right)^{-1}E_{F_i} = E_{F_i} - E_{F_i} = 0.$$

(iv) - A verificação é imediata e segue de (ii) e (iii), veja

$$E_{F_i} + E_{G_i}K_i = E_{F_i} + E_{G_i}\tilde{K}_i + E_{G_i}\bar{K}_i = 0.$$

□

6.2 Resultados Auxiliares

Os resultados apresentados nesta seção tem por objetivo reduzir a expressão do controlador robusto, proposto no Capítulo 5, para uma expressão estruturalmente mais confortável para a demonstração da convergência e estabilidade.

Lema 6.2.1. *Considere para cada $i = N, ..., 0$ a expressão para o cálculo de $\begin{bmatrix} L_i \\ K_i \end{bmatrix}$ e P_i dada por*

$$\begin{bmatrix} L_i \\ K_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ I & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} P_{i+1}^{-1} & 0 & 0 & 0 & I & 0 \\ 0 & R_i^{-1} & 0 & 0 & 0 & I \\ 0 & 0 & Q_i^{-1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \mathcal{A} & -\mathcal{G}_i \\ I & 0 & 0 & \mathcal{A}^T & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 & -\mathcal{G}_i^T & 0 & 0 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -I \\ \mathcal{F}_i \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \tag{6.1}$$

$$P_i = L_i^T P_{i+1} L_i + K_i^T R_i K_i + Q_i, \tag{6.2}$$

sendo $\mathcal{A} = \begin{bmatrix} I \\ 0 \end{bmatrix}$, $\mathcal{G}_i = \begin{bmatrix} G_i \\ E_{G_i} \end{bmatrix}$ e $\mathcal{F}_i = \begin{bmatrix} F_i \\ E_{F_i} \end{bmatrix}$ e P_{i+1} assumido conhecido neste passo. Então, a *recursividade (6.1)-(6.2) pode ser reescrita como*

$$K_i = -R_i^{-1}\mathcal{G}_i^T(\mathcal{A}P_{i+1}^{-1}\mathcal{A}^T + \mathcal{G}_iR_i^{-1}\mathcal{G}_i^T)^{-1}\mathcal{F}_i, \tag{6.3}$$

$$L_i = P_{i+1}^{-1}\mathcal{A}^T(\mathcal{A}P_{i+1}^{-1}\mathcal{A}^T + \mathcal{G}_iR_i^{-1}\mathcal{G}_i^T)^{-1}\mathcal{F}_i, \tag{6.4}$$

$$P_i = \mathcal{F}_i^T(\mathcal{A}P_{i+1}^{-1}\mathcal{A}^T + \mathcal{G}_iR_i^{-1}\mathcal{G}_i^T)^{-1}\mathcal{F}_i + Q_i. \tag{6.5}$$

Demonstração. Note que, a expressão

$$\begin{bmatrix} L_i \\ K_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ I & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} P_{i+1}^{-1} & 0 & 0 & 0 & I & 0 \\ 0 & R_i^{-1} & 0 & 0 & 0 & I \\ 0 & 0 & Q_i^{-1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \mathcal{A} & -\mathcal{G}_i \\ I & 0 & 0 & \mathcal{A}^T & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 & -\mathcal{G}_i^T & 0 & 0 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -I \\ \mathcal{F}_i \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{6.6}$$

é válida se e somente se a equação matricial nas incógnitas (a, b, c, d, L_i, K_i)

$$\begin{bmatrix} P_{i+1}^{-1} & 0 & 0 & 0 & I & 0 \\ 0 & R_i^{-1} & 0 & 0 & 0 & I \\ 0 & 0 & Q_i^{-1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \mathcal{A} & -\mathcal{G}_i \\ I & 0 & 0 & \mathcal{A}^T & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 & -\mathcal{G}_i^T & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ d \\ L_i \\ K_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -I \\ \mathcal{F}_i \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{6.7}$$

admite uma única solução. Associado à equação matricial (6.7) temos o seguinte sistema de equações

$$P_{i+1}^{-1}a + L_i = 0 \tag{6.8}$$

$$R_i^{-1}b + K_i = 0 \tag{6.9}$$

$$Q_i^{-1}c = 0 \tag{6.10}$$

$$\mathcal{A}L_i - \mathcal{G}_iK_i = \mathcal{F}_i \tag{6.11}$$

$$Ia + \mathcal{A}^Td = 0 \tag{6.12}$$

$$Ib - \mathcal{G}_i^Td = 0 \tag{6.13}$$

De (6.9) e (6.13) obtemos que

$$\begin{cases} Ib = \mathcal{G}_i^T d \\ K_i = -R_i^{-1} b \end{cases} \Rightarrow \quad K_i = -R_i^{-1}\mathcal{G}_i^T d, \tag{6.14}$$

enquanto que, (6.8) e (6.12) resultam em

$$\begin{cases} L_i = -P_{i+1}^{-1} a \\ Ia = -\mathcal{A}^T d \end{cases} \Rightarrow \quad L_i = P_{i+1}^{-1}\mathcal{A}^T d. \tag{6.15}$$

De (6.11), (6.14) e (6.15) tiramos

$$\begin{gathered} \mathcal{A}L_i - \mathcal{G}_i K_i = \mathcal{F}_i \Rightarrow (\mathcal{A}P_{i+1}^{-1}\mathcal{A}^T + \mathcal{G}_i R_i^{-1}\mathcal{G}_i^T)d = \mathcal{F}_i \\ d = (\mathcal{A}P_{i+1}^{-1}\mathcal{A}^T + \mathcal{G}_i R_i^{-1}\mathcal{G}_i^T)^{-1}\mathcal{F}_i \end{gathered} \tag{6.16}$$

Substituindo (6.16) em (6.14) obtemos

$$K_i = -R_i^{-1}\mathcal{G}_i^T(\mathcal{A}P_{i+1}^{-1}\mathcal{A}^T + \mathcal{G}_i R_i^{-1}\mathcal{G}_i^T)^{-1}\mathcal{F}_i. \tag{6.17}$$

Já (6.15) e (6.16) resultam em

$$L_i = P_{i+1}^{-1}\mathcal{A}^T(\mathcal{A}P_{i+1}^{-1}\mathcal{A}^T + \mathcal{G}_i R_i^{-1}\mathcal{G}_i^T)^{-1}\mathcal{F}_i. \tag{6.18}$$

Substituindo as expressões de (6.17) e (6.18) em (6.2) obtemos

$$P_i = \mathcal{F}_i^T(\mathcal{A}P_{i+1}^{-1}\mathcal{A}^T + \mathcal{G}_i R_i^{-1}\mathcal{G}_i^T)^{-1}\mathcal{F}_i + Q_i. \tag{6.19}$$

Portanto,

$$\begin{aligned} K_i &= -R_i^{-1}\mathcal{G}_i^T(\mathcal{A}P_{i+1}^{-1}\mathcal{A}^T + \mathcal{G}_i R_i^{-1}\mathcal{G}_i^T)^{-1}\mathcal{F}_i, \\ L_i &= P_{i+1}^{-1}\mathcal{A}^T(\mathcal{A}P_{i+1}^{-1}\mathcal{A}^T + \mathcal{G}_i R_i^{-1}\mathcal{G}_i^T)^{-1}\mathcal{F}_i, \\ P_i &= \mathcal{F}_i^T(\mathcal{A}P_{i+1}^{-1}\mathcal{A}^T + \mathcal{G}_i R_i^{-1}\mathcal{G}_i^T)^{-1}\mathcal{F}_i + Q_i. \end{aligned}$$

$\square$

As expressões equivalentes apresentadas no próximo lema redefinem a equação de Riccati que estamos propondo em termos de um arranjo de matrizes.

Lema 6.2.2. *Para todo $i = N, ..., 0$, são equivalentes as seguintes expressões recursivas:*

(i) -

$$\begin{bmatrix} L_i \\ K_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ I & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} P_{i+1}^{-1} & 0 & 0 & 0 & I & 0 \\ 0 & R_i^{-1} & 0 & 0 & 0 & I \\ 0 & 0 & Q_i^{-1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \mathcal{A} & -\mathcal{G}_i \\ I & 0 & 0 & \mathcal{A}^T & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 & -\mathcal{G}_i^T & 0 & 0 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -I \\ \mathcal{F}_i \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \tag{6.20}$$

$$P_i \; = \; L_i^T P_{i+1} L_i + K_i^T R_i K_i + Q_i, \tag{6.21}$$

sendo $\mathcal{G}_i = \begin{bmatrix} G_i \\ E_{G_i} \end{bmatrix}$, $\mathcal{F}_i = \begin{bmatrix} F_i \\ E_{F_i} \end{bmatrix}$ *e* $\mathcal{A} = \begin{bmatrix} I \\ 0 \end{bmatrix}$;

(ii) -

$$P_i = \mathcal{F}_i^T (\mathcal{A} P_{i+1}^{-1} \mathcal{A}^T + \mathcal{G}_i R_i^{-1} \mathcal{G}_i^T)^{-1} \mathcal{F}_i + Q_i; \tag{6.22}$$

(iii) -

$$P_i = \widehat{F}_i^T (P_{i+1}^{-1} + G_i \widehat{R}_i G_i^T)^{-1} \widehat{F}_i + \widehat{Q}_i, \tag{6.23}$$

sendo

$$\widehat{F}_i := F_i - G_i R_i^{-1} E_{G_i}^T (E_{G_i} R_i^{-1} E_{G_i}^T)^{-1} E_{F_i},$$

$$\widehat{R}_i := R_i^{-1} - R_i^{-1} E_{G_i}^T (E_{G_i} R_i^{-1} E_{G_i}^T)^{-1} E_{G_i} R_i^{-1}, \tag{6.24}$$

$$\widehat{Q}_i := Q_i + E_{F_i}^T (E_{G_i} R_i^{-1} E_{G_i}^T)^{-1} E_{F_i};$$

(iv) -

$$P_i = \widehat{F}_i^T (P_{i+1} - P_{i+1} \widehat{G}_i (I + \widehat{G}_i^T P_{i+1} \widehat{G}_i)^{-1} \widehat{G}_i^T P_{i+1}) \widehat{F}_i + \widehat{Q}_i, \tag{6.25}$$

sendo $\widehat{G}_i := G_i \widehat{R}_i^{\frac{1}{2}}$.

Demonstração. $(i) \Leftrightarrow (ii)$ - Segue do Lema 6.2.1.

$(ii) \Leftrightarrow (iii)$ - Já vimos que

$$\left(\mathcal{A}P_{i+1}^{-1}\mathcal{A}^T + \mathcal{G}_iR_i^{-1}\mathcal{G}_i^T\right) = \begin{bmatrix} P_{i+1}^{-1} + G_iR_i^{-1}G_i^T & G_iR_i^{-1}E_{G_i}^T \\ E_{G_i}R_i^{-1}G_i^T & E_{G_i}R_i^{-1}E_{G_i}^T \end{bmatrix}.$$

Como a matriz acima é invertível, aplicando o Lema B.2.3, então temos

$$\begin{bmatrix} P_{i+1}^{-1} + G_iR_i^{-1}G_i^T & G_iR_i^{-1}E_{G_i}^T \\ E_{G_i}R_i^{-1}G_i^T & E_{G_i}R_i^{-1}E_{G_i}^T \end{bmatrix}^{-1} =$$

$$= \begin{bmatrix} I & 0 \\ -A_{22}^{-1}A_{12}^T & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (A_{11} - A_{12}A_{22}^{-1}A_{12}^T)^{-1} & 0 \\ 0 & A_{22}^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & -A_{12}A_{22}^{-1} \\ 0 & I \end{bmatrix},$$

sendo

$$A_{11} = P_{i+1}^{-1} + G_iR_i^{-1}G_i^T, \quad A_{12} = G_iR_i^{-1}E_{G_i}^T, \quad A_{22} = E_{G_i}R_i^{-1}E_{G_i}^T. \tag{6.26}$$

Assim,

$$P_i = \begin{bmatrix} F_i \\ E_{F_i} \end{bmatrix}^T (\mathcal{A}P_{i+1}^{-1}\mathcal{A}^T + \mathcal{G}_iR_i^{-1}\mathcal{G}_i^T)^{-1} \begin{bmatrix} F_i \\ E_{F_i} \end{bmatrix} + Q_i =$$

$$= \begin{bmatrix} F_i \\ E_{F_i} \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} I & 0 \\ -A_{22}^{-1}A_{12}^T & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (A_{11} - A_{12}A_{22}^{-1}A_{12}^T)^{-1} & 0 \\ 0 & A_{22}^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & -A_{12}A_{22}^{-1} \\ 0 & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F_i \\ E_{F_i} \end{bmatrix} + Q_i =$$

$$= (F_i - A_{12}A_{22}^{-1}E_{F_i})^T(A_{11} - A_{12}A_{22}^{-1}A_{12}^T)^{-1}(F_i - A_{12}A_{22}^{-1}E_{F_i}) + E_{F_i}^TA_{22}^{-1}E_{F_i} + Q_i.$$

Utilizando as identidades de (6.26), obtemos:

$$\widehat{F}_i := (F_i - A_{12}A_{22}^{-1}E_{F_i}) = (F_i - G_iR_i^{-1}E_{G_i}^T(E_{G_i}R_i^{-1}E_{G_i}^T)^{-1}E_{F_i}),$$

$$\widehat{Q}_i := E_{F_i}^TA_{22}^{-1}E_{F_i} + Q_i = E_{F_i}^T(E_{G_i}R_i^{-1}E_{G_i}^T)^{-1}E_{F_i} + Q_i,$$

$$(A_{11} - A_{12}A_{22}^{-1}A_{12}^T) = (P_{i+1}^{-1} + G_i\widehat{R}_iG_i^T),$$

sendo

$$\widehat{R}_i := R_i^{-1} - R_i^{-1}E_{G_i}^T(E_{G_i}R_i^{-1}E_{G_i}^T)^{-1}E_{G_i}R_i^{-1}.$$

Então,

$$P_i = \widehat{F}_i^T (P_{i+1}^{-1} + G_i \widehat{R}_i G_i^T)^{-1} \widehat{F}_i + \widehat{Q}_i.$$

$(iii) \Leftrightarrow (iv)$ - Como $\widehat{R}_i$ é uma matriz semidefinida positiva, então $\widehat{R}_i$ pode ser fatorada como $\widehat{R}_i = \widehat{R}_i^{\frac{1}{2}} \widehat{R}_i^{\frac{T}{2}}$. Substituindo $\widehat{R}_i = \widehat{R}_i^{\frac{1}{2}} \widehat{R}_i^{\frac{T}{2}}$ na equação (6.23), obtemos

$$P_i = \widehat{F}_i^T (P_{i+1}^{-1} + G_i \widehat{R}_i^{\frac{1}{2}} I \widehat{R}_i^{\frac{T}{2}} G_i^T)^{-1} \widehat{F}_i + \widehat{Q}_i.$$

Definindo $\widehat{G}_i := G_i \widehat{R}_i^{\frac{1}{2}}$, encontramos

$$P_i = \widehat{F}_i^T (P_{i+1}^{-1} + \widehat{G}_i I \widehat{G}_i^T)^{-1} \widehat{F}_i + \widehat{Q}_i.$$

Aplicando o Lema B.1.1 na expressão anterior, resulta

$$P_i = \widehat{F}_i^T (P_{i+1} - P_{i+1} \widehat{G}_i (I + \widehat{G}_i^T P_{i+1} \widehat{G}_i)^{-1} \widehat{G}_i^T P_{i+1}) \widehat{F}_i + \widehat{Q}_i.$$

□

A sequência de equivalências estabelecidas no Lema 6.2.2 possibilitou uma redução da equação recursiva para atualização da matriz P_i, para o problema de controle robusto proposto, a uma particular equação recursiva de Riccati nos moldes do problema do RLQ para sistemas lineares nominais.

Lema 6.2.3. *Considere para todo $i = N, ..., 0$ a equação recursiva para o cálculo de P_i dada por*

$$P_i = \widehat{F}_i^T (P_{i+1} - P_{i+1} \widehat{G}_i (I + \widehat{G}_i^T P_{i+1} \widehat{G}_i)^{-1} \widehat{G}_i^T P_{i+1}) \widehat{F}_i + \widehat{Q}_i, \tag{6.27}$$

onde

$$\widehat{F}_i = F_i - G_i R_i^{-1} E_{G_i}^T (E_{G_i} R_i^{-1} E_{G_i}^T)^{-1} E_{F_i},$$

$$\widehat{G}_i = G_i \widehat{R}_i^{\frac{1}{2}}, \quad \widehat{R}_i = R_i^{-1} - R_i^{-1} E_{G_i}^T (E_{G_i} R_i^{-1} E_{G_i}^T)^{-1} E_{G_i} R_i^{-1},$$

$$\widehat{Q}_i = Q_i + E_{F_i}^T (E_{G_i} R_i^{-1} E_{G_i}^T)^{-1} E_{F_i}.$$

A recursividade (6.27) é um caso particular da equação recursiva de Riccati para o problema do RLQ de horizonte finito para sistemas nominais.

Demonstração. Imediata a partir da equação recursiva de Riccati para sistemas nominais

$$P_i = F_i^T(P_{i+1} - P_{i+1}G_i(R_i + G_i^T P_{i+1} G_i)^{-1} G_i^T P_{i+1})F_i + Q_i,$$

ao fazermos as seguintes identificações $F_i \leftarrow \widehat{F}_i$; $G_i \leftarrow \widehat{G}_i$; $R_i \leftarrow I$; $Q_i \leftarrow \widehat{Q}_i$. □

Levando ainda em conta as identificações feitas no Lema 6.2.3, o ganho ótimo de realimentação e a matriz do sistema em malha fechada são dados respectivamente por

$$\widehat{K}_i = -(I + \widehat{G}_i^T P_{i+1} \widehat{G}_i)^{-1} \widehat{G}_i^T P_{i+1} \widehat{F}_i,$$

$$\widehat{L}_i = \widehat{F}_i + \widehat{G}_i \widehat{K}_i.$$

Um resultado mais adiante estabelecerá a seguinte implicação

$$(\widehat{F}_i + \widehat{G}_i \widehat{K}_i)\,\text{estável} \,\Rightarrow (F_i + G_i K_i)\,\text{estável}.$$

O próximo lema apresentará, assim como foi feito para as expressões recursivas de P_i, algumas expressões equivalentes para as matrizes K_i e L_i.

Lema 6.2.4. *Considere para todo $i = N, ..., 0$ a equação recursiva para o cálculo de P_i dada por*

$$P_i = L_i^T P_{i+1} L_i + K_i^T R_i K_i + Q_i.$$

São equivalentes as seguintes expressões para K_i e L_i:

(i) -

$$\begin{bmatrix} L_i \\ K_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ I & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} P_{i+1}^{-1} & 0 & 0 & 0 & I & 0 \\ 0 & R_i^{-1} & 0 & 0 & 0 & I \\ 0 & 0 & Q_i^{-1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \mathcal{A} & -\mathcal{G}_i \\ I & 0 & 0 & \mathcal{A}^T & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 & -\mathcal{G}_i^T & 0 & 0 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -I \\ \mathcal{F}_i \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}; \tag{6.28}$$

(ii) -

$$K_i = -R_i^{-1} \mathcal{G}_i^T (\mathcal{A} P_{i+1}^{-1} \mathcal{A}^T + \mathcal{G}_i R_i^{-1} \mathcal{G}_i^T)^{-1} \mathcal{F}_i, \tag{6.29}$$

$$L_i = P_{i+1}^{-1}\mathcal{A}^T(\mathcal{A}P_{i+1}^{-1}\mathcal{A}^T + \mathcal{G}_i R_i^{-1}\mathcal{G}_i^T)^{-1}\mathcal{F}_i, \tag{6.30}$$

sendo $\mathcal{G}_i = \begin{bmatrix} G_i \\ E_{G_i} \end{bmatrix}$, $\mathcal{F}_i = \begin{bmatrix} F_i \\ E_{F_i} \end{bmatrix}$, $\mathcal{A} = \begin{bmatrix} I \\ 0 \end{bmatrix}$;

(iii) -

$$K_i = -\widehat{R}_i G_i^T \left(P_{i+1}^{-1} + G_i \widehat{R}_i G_i^T\right)^{-1} \widehat{F}_i - R_i^{-1}E_{G_i}^T \left(E_{G_i}R_i^{-1}E_{G_i}^T\right)^{-1} E_{F_i}, \tag{6.31}$$

$$L_i = P_{i+1}^{-1}(P_{i+1}^{-1} + G_i\widehat{R}_i G_i^T)^{-1}\widehat{F}_i, \tag{6.32}$$

sendo

$$\widehat{R}_i = R_i^{-1} - R_i^{-1}E_{G_i}^T(E_{G_i}R_i^{-1}E_{G_i}^T)^{-1}E_{G_i}R_i^{-1},$$

$$\widehat{F}_i = F_i - G_i R_i^{-1}E_{G_i}^T\left(E_{G_i}R_i^{-1}E_{G_i}^T\right)^{-1}E_{F_i};$$

(iv) -

$$K_i = -\widehat{R}_i G_i^T \left(P_{i+1}^{-1} + G_i \widehat{R}_i G_i^T\right)^{-1} \widehat{F}_i - R_i^{-1}E_{G_i}^T \left(E_{G_i}R_i^{-1}E_{G_i}^T\right)^{-1} E_{F_i}, \tag{6.33}$$

$$L_i = F_i + G_i K_i. \tag{6.34}$$

Demonstração. $(i) \Leftrightarrow (ii)$ - Segue do Lema 6.2.1.

$(ii) \Leftrightarrow (iii)$ - Já vimos que

$$(\mathcal{A}P_{i+1}^{-1}\mathcal{A}^T + \mathcal{G}_i R_i^{-1}\mathcal{G}_i^T)^{-1} = \begin{bmatrix} P_{i+1}^{-1} + G_i R_i^{-1}G_i^T & G_i R_i^{-1}E_{G_i}^T \\ E_{G_i}R_i^{-1}G_i^T & E_{G_i}R_i^{-1}E_{G_i}^T \end{bmatrix}^{-1} =$$

$$= \begin{bmatrix} I & 0 \\ -A_{22}^{-1}A_{12}^T & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (A_{11} - A_{12}A_{22}^{-1}A_{12}^T)^{-1} & 0 \\ 0 & A_{22}^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & -A_{12}A_{22}^{-1} \\ 0 & I \end{bmatrix},$$

com

$$A_{11} = P_{i+1}^{-1} + G_i R_i^{-1} G_i^T, \;\; A_{12} = G_i R_i^{-1}E_{G_i}^T \;\text{ e }\; A_{22} = E_{G_i}R_i^{-1}E_{G_i}^T. \tag{6.35}$$

Considerando a expressão do ganho K_i, resulta

$$K_i = -R_i^{-1}(G_i^T - E_{G_i}^T A_{22}^{-1}A_{12}^T)(A_{11} - A_{12}A_{22}^{-1}A_{12}^T)^{-1}(F_i - A_{12}A_{22}^{-1}E_{F_i}) - R_i^{-1}E_{G_i}^T A_{22}^{-1}E_{F_i}.$$

Substituindo os termos A_{11}, A_{12} e A_{22} de (6.35) na expressão anterior, obtemos:

$$(G_i^T - E_{G_i}^T A_{22}^{-1}A_{12}^T) = (G_i^T - E_{G_i}^T(E_{G_i}R_i^{-1}E_{G_i}^T)^{-1}E_{G_i}R_i^{-1}G_i^T),$$

$$(F_i - A_{12}A_{22}^{-1}E_{F_i}) = (F_i - G_iR_i^{-1}E_{G_i}^T(E_{G_i}R_i^{-1}E_{G_i}^T)^{-1}E_{F_i}),$$

$$(A_{11} - A_{12}A_{22}^{-1}A_{12}^T)^{-1} = (P_{i+1}^{-1} + G_i\widehat{R}_iG_i^T)^{-1}.$$

Então,

$$K_i = -\widehat{R}_iG_i^T(P_{i+1}^{-1} + G_i\widehat{R}_iG_i^T)^{-1}\widehat{F}_i - R_i^{-1}E_{G_i}^T(E_{G_i}R_i^{-1}E_{G_i}^T)^{-1}E_{F_i}.$$

Considerando agora a expressão da matriz L_i e as substituições das matrizes identificadas em (6.35), resulta

$$L_i \;=\; P_{i+1}^{-1}\mathcal{A}^T(\mathcal{A}P_{i+1}^{-1}\mathcal{A}^T + \mathcal{G}_iR_i^{-1}\mathcal{G}_i^T)^{-1}\mathcal{F}_i \;=$$

$$= P_{i+1}^{-1}\begin{bmatrix} I \\ 0 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} I & 0 \\ -A_{22}^{-1}A_{12}^T & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (A_{11} - A_{12}A_{22}^{-1}A_{12}^T)^{-1} & 0 \\ 0 & A_{22}^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & -A_{12}A_{22}^{-1} \\ 0 & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F_i \\ E_{F_i} \end{bmatrix}.$$

Então,

$$L_i = P_{i+1}^{-1}(P_{i+1}^{-1} + G_i\widehat{R}_iG_i^T)^{-1}\widehat{F}_i.$$

$(iii) \Leftrightarrow (iv)$ - Como $\widehat{R}_i \succeq 0$, então $\widehat{R}_i = \widehat{R}_i^{\frac{1}{2}}\widehat{R}_i^{\frac{T}{2}}$. Substituindo esta fatoração em (6.32), temos

$$L_i \;=\; P_{i+1}^{-1}(P_{i+1}^{-1} + (G_i\widehat{R}_i^{\frac{1}{2}})I(\widehat{R}_i^{\frac{T}{2}}G_i^T))^{-1}(F_i - G_iR_i^{-1}E_{G_i}^T(E_{G_i}R_i^{-1}E_{G_i}^T)^{-1}E_{F_i}).$$

Definindo $\widehat{G}_i := G_i\widehat{R}_i^{\frac{1}{2}}$, temos

$$L_i \;=\; P_{i+1}^{-1}(P_{i+1}^{-1} + \widehat{G}_iI\widehat{G}_i^T)^{-1}(F_i - G_iR_i^{-1}E_{G_i}^T(E_{G_i}R_i^{-1}E_{G_i}^T)^{-1}E_{F_i}).$$

Manipulando a expressão acima obtemos

$$L_i \;=\; (I - \widehat{G}_iI\widehat{G}_i^T(P_{i+1}^{-1} + \widehat{G}_iI\widehat{G}_i^T)^{-1})(F_i - G_iR_i^{-1}E_{G_i}^T(E_{G_i}R_i^{-1}E_{G_i}^T)^{-1}E_{F_i}).$$

Substituindo $\widehat{G}_i \;=\; G_i\widehat{R}_i^{\frac{1}{2}}$, resulta

$$L_i \;=\; F_i - G_i\bigg(\widehat{R}_iG_i^T(P_{i+1}^{-1} + G_i\widehat{R}_iG_i^T)^{-1}\widehat{F}_i \;+\; R_i^{-1}E_{G_i}^T(E_{G_i}R_i^{-1}E_{G_i}^T)^{-1}E_{F_i}\bigg).$$

Então, $L_i = F_i + G_iK_i$.

$\square$

Nosso principal objetivo aqui é demonstrar a convergência e a estabilidade do regulador robusto proposto no Capítulo 5. Os lemas 6.2.2 e 6.2.4 provados anteriormente serão de grande importância para tal propósito, já que, através das equivalências estabelecidas entre as expressões, nosso problema reduziu-se a uma avaliação das condições de convergência, existência e unicidade de solução e estabilidade de um caso particular do problema de controle RLQ nominal.

Consideraremos a partir daqui o sistema linear incerto dado por

$$\begin{aligned} x_{i+1} &= (F+\delta F)x_i + (G+\delta G)u_i \\ \begin{bmatrix}\delta F & \delta G\end{bmatrix} &= H\Delta\begin{bmatrix}E_F & E_G\end{bmatrix}, \ \|\Delta\| \leq 1 \end{aligned}, \tag{6.36}$$

sendo $F \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $G \in \mathbb{R}^{n\times m}$, $H \in \mathbb{R}^{n\times k}$, $E_F \in \mathbb{R}^{l\times n}$ e $E_G \in \mathbb{R}^{l\times m}$ assumidas conhecidas e invariantes no tempo. Com exceção, é claro, das matrizes $\delta F \in \mathbb{R}^{n\times n}$ e $\delta G \in \mathbb{R}^{n\times m}$ que variam com o tempo devido a matriz $\Delta \in \mathbb{R}^{k\times l}$ que é assumida aleatória para cada i.

Embora as matrizes de parâmetros e de ponderação do sistema sejam assumidas invariantes no tempo a partir de agora, as equivalências obtidas nos lemas nas duas subseções precedentes permanecem válidas.

6.3 Convergência e Estabilidade

Primeiramente, nós abordaremos o problema de convergência da sequência de matrizes simétricas definidas positivas $\{P_i\}$, quando $i \to -\infty$, gerada a partir da equação recursiva (de trás para frente no tempo)

$$P_i = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -I \\ \mathcal{F} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} P_{i+1}^{-1} & 0 & 0 & 0 & I & 0 \\ 0 & R^{-1} & 0 & 0 & 0 & I \\ 0 & 0 & Q^{-1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \mathcal{A} & -\mathcal{G} \\ I & 0 & 0 & \mathcal{A}^T & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 & -\mathcal{G}^T & 0 & 0 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -I \\ \mathcal{F} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \tag{6.37}$$

com condição inicial $0 \prec P_{N+1} \preceq Q$ e sendo $R \succ 0$, $Q \succ 0$, $\mathcal{A} = \begin{bmatrix} I \\ 0 \end{bmatrix}$, $\mathcal{G} = \begin{bmatrix} G \\ E_G \end{bmatrix}$, $\mathcal{F} = \begin{bmatrix} F \\ E_F \end{bmatrix}$.
Em seguida, mostraremos que o limite da sequência $\{P_i\}$ é uma matriz simétrica definida positiva

e trata-se da solução da equação

$$P = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -I \\ \mathcal{F} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} P^{-1} & 0 & 0 & 0 & I & 0 \\ 0 & R^{-1} & 0 & 0 & 0 & I \\ 0 & 0 & Q^{-1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \mathcal{A} & -\mathcal{G} \\ I & 0 & 0 & \mathcal{A}^T & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 & -\mathcal{G}^T & 0 & 0 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -I \\ \mathcal{F} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}. \tag{6.38}$$

Além disso, as matrizes L e K associadas a esta solução e dadas por

$$\begin{bmatrix} L \\ K \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ I & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} P^{-1} & 0 & 0 & 0 & I & 0 \\ 0 & R^{-1} & 0 & 0 & 0 & I \\ 0 & 0 & Q^{-1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \mathcal{A} & -\mathcal{G} \\ I & 0 & 0 & \mathcal{A}^T & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 & -\mathcal{G}^T & 0 & 0 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -I \\ \mathcal{F} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \tag{6.39}$$

são tais que $L = F + GK$ e L é estável.

Com a finalidade de simplificar o raciocínio nas deduções que virão, o índice de tempo na equação recursiva (6.37) será revertido, ou melhor, i será trocado por $i+1$ e vice-versa. Além da simplicidade do raciocínio, destacamos o caráter da implementação computacional que tal modificação permite quando tais resultados são aplicados no controle online de sistemas. Baseado nisso, a convergência da sequência $\{P_i\}$, agora com condição inicial $0 \prec P_0 \preceq Q$

$$P_{i+1} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -I \\ \mathcal{F} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} P_i^{-1} & 0 & 0 & 0 & I & 0 \\ 0 & R^{-1} & 0 & 0 & 0 & I \\ 0 & 0 & Q^{-1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \mathcal{A} & -\mathcal{G} \\ I & 0 & 0 & \mathcal{A}^T & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 & -\mathcal{G}^T & 0 & 0 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -I \\ \mathcal{F} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \tag{6.40}$$

passará a ser analisada quando $i \to +\infty$.

Suponha $R \succ 0$ e $Q \succ 0$. Seja $\{P_i\}_{i=0}^{+\infty}$ a sequência de matrizes simétricas definidas positivas gerada a partir da equação (6.40). Já sabemos do Lema 6.2.2 que a expressão (6.40) admite uma estrutura recursiva equivalente dada por

$$P_{i+1} = \widehat{F}^T(P_i - P_i\widehat{G}(I + \widehat{G}^T P_i\widehat{G})^{-1}\widehat{G}^T P_i)\widehat{F} + \widehat{Q}, \tag{6.41}$$

sendo

$$\begin{aligned}
\widehat{F} &:= F - GR^{-1}E_G^T(E_G R^{-1}E_G^T)^{-1}E_F,\\
\widehat{R} &:= R^{-1} - R^{-1}E_G^T(E_G R^{-1}E_G^T)^{-1}E_G R^{-1},\\
\widehat{G} &:= G\widehat{R}^{\frac{1}{2}},\\
\widehat{Q} &:= Q + E_F^T(E_G R^{-1}E_G^T)^{-1}E_F,
\end{aligned} \tag{6.42}$$

e a condição inicial P_0 é assumida a satisfazer $0 \prec P_0 \preceq Q$. Tal equivalência será extremamente útil para nosso propósito.

Embora a expressão (6.41) não dependa da inversa de P_i e, consequentemente, da imposição de que P_i seja definida positiva, não devemos perder de vista que tal exigência deve ser mantida em virtude da estrutura original (6.37) através da qual a sequência de matrizes $\{P_i\}$ é gerada.

O resultado a seguir mostrará que a sequência de matrizes $\{P_i\}_{i=0}^{+\infty}$ gerada a partir de (6.40) é monótona crescente. Tal conclusão não é imediata a partir da estrutura (6.40), para isso uma das equivalências do Lema 6.2.2 será utilizada.

Lema 6.3.1. *A sequência $\{P_i\}_{i=0}^{+\infty}$ é monótona crescente.*

Demonstração. Lembremos que a equação (6.40) admite uma estrutura equivalente dada pelo Lema 6.2.2:

$$P_{i+1} = \mathcal{F}^T(\mathcal{A}P_i^{-1}\mathcal{A}^T + \mathcal{G}R^{-1}\mathcal{G}^T)^{-1}\mathcal{F} + Q,$$

sendo $\mathcal{G} = \begin{bmatrix} G \\ E_G \end{bmatrix}$, $\mathcal{F} = \begin{bmatrix} F \\ E_F \end{bmatrix}$ e $\mathcal{A} = \begin{bmatrix} I \\ 0 \end{bmatrix}$. E que, cada elemento da sequência $\{P_i\}_{i=0}^{+\infty}$ é uma matriz simétrica definida positiva.

A prova será feita por indução. Suponha $0 \prec P_0 \preceq Q$ e observe que:

$$P_1 = \mathcal{F}^T(\mathcal{A}P_0^{-1}\mathcal{A}^T + \mathcal{G}R^{-1}\mathcal{G}^T)^{-1}\mathcal{F} + Q \succeq \mathcal{F}^T(\mathcal{A}P_0^{-1}\mathcal{A}^T + \mathcal{G}R^{-1}\mathcal{G}^T)^{-1}\mathcal{F} + P_0 \succeq P_0.$$

Logo, $P_1 \succeq P_0 \succ 0$.

Mostremos agora que $P_1 \succeq P_0 \Rightarrow P_2 \succeq P_1 \succ 0$. Como $P_1 \succeq P_0$ e ambas são definidas positivas então, pelo Corolário B.4.1, $P_1^{-1} \preceq P_0^{-1}$. Assim,

$$P_1 \succeq P_0 \Rightarrow P_1^{-1} \preceq P_0^{-1} \Rightarrow \mathcal{A}P_1^{-1}\mathcal{A}^T + \mathcal{G}R^{-1}\mathcal{G}^T \preceq \mathcal{A}P_0^{-1}\mathcal{A}^T + \mathcal{G}R^{-1}\mathcal{G}^T \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (\mathcal{A}P_1^{-1}\mathcal{A}^T + \mathcal{G}R^{-1}\mathcal{G}^T)^{-1} \succeq (\mathcal{A}P_0^{-1}\mathcal{A}^T + \mathcal{G}R^{-1}\mathcal{G}^T)^{-1} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \mathcal{F}^T(\mathcal{A}P_1^{-1}\mathcal{A}^T + \mathcal{G}R^{-1}\mathcal{G}^T)^{-1}\mathcal{F} + Q \succeq \mathcal{F}^T(\mathcal{A}P_0^{-1}\mathcal{A}^T + \mathcal{G}R^{-1}\mathcal{G}^T)^{-1}\mathcal{F} + Q \Rightarrow P_2 \succeq P_1.$$

Hipótese de Indução : $P_i \succeq P_{i-1} \succ 0$. Mostremos que $P_{i+1} \succeq P_i$ para todo $i = 0, 1, \ldots$. O raciocínio é idêntico ao que foi feito acima

$$P_i \succeq P_{i-1} \Rightarrow P_i^{-1} \preceq P_{i-1}^{-1} \Rightarrow \mathcal{A}P_i^{-1}\mathcal{A}^T + \mathcal{G}R^{-1}\mathcal{G}^T \preceq \mathcal{A}P_{i-1}^{-1}\mathcal{A}^T + \mathcal{G}R^{-1}\mathcal{G}^T \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (\mathcal{A}P_i^{-1}\mathcal{A}^T + \mathcal{G}R^{-1}\mathcal{G}^T)^{-1} \succeq (\mathcal{A}P_{i-1}^{-1}\mathcal{A}^T + \mathcal{G}R^{-1}\mathcal{G}^T)^{-1} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \mathcal{F}^T(\mathcal{A}P_i^{-1}\mathcal{A}^T + \mathcal{G}R^{-1}\mathcal{G}^T)^{-1}\mathcal{F} + Q \succeq \mathcal{F}^T(\mathcal{A}P_{i-1}^{-1}\mathcal{A}^T + \mathcal{G}R^{-1}\mathcal{G}^T)^{-1}\mathcal{F} + Q \Rightarrow P_{i+1} \succeq P_i.$$

Assim,

$$0 \prec P_0 \preceq P_1 \preceq P_2 \preceq \ldots \preceq P_{i-1} \preceq P_i \preceq P_{i+1} \ldots \ .$$

Portanto, a sequência $\{P_i\}_{i=0}^{+\infty}$ é monótona crescente. $\square$

Associado à equação (6.41) considere também a sequência de ganhos $\{\widehat{K}_i\}_{i=0}^{+\infty}$ obtida através de

$$\widehat{K}_i = -(I + \widehat{G}^T P_i \widehat{G})^{-1} \widehat{G}^T P_i \widehat{F}. \tag{6.43}$$

Algumas manipulações algébricas de imediata verificação permitem reescrever a expressão (6.41) como

$$P_{i+1} = (\widehat{F} + \widehat{G}\widehat{K}_i)^T P_i (\widehat{F} + \widehat{G}\widehat{K}_i) + \widehat{K}_i^T \widehat{K}_i + \widehat{Q}. \tag{6.44}$$

Considere agora, para uma sequência arbitrária de ganhos $\{K_{arb,i}\}_{i=0}^{+\infty}$ e condição inicial $0 \prec Y_0 \preceq Q$, a sequência de matrizes simétricas definidas positivas $\{Y_i\}_{i=0}^{+\infty}$ gerada a partir da seguinte equação recursiva

$$Y_{i+1} = (\widehat{F} + \widehat{G}K_{arb,i})^T Y_{i+1} (\widehat{F} + \widehat{G}K_{arb,i}) + K_{arb,i}^T K_{arb,i} + \widehat{Q}. \tag{6.45}$$

Nosso objetivo é realizar uma comparação entre as sequências $\{P_i\}_{i=0}^{+\infty}$ gerada a partir de (6.43)-(6.44) e $\{Y_i\}_{i=0}^{+\infty}$. Mais especificamente, mostrar que para qualquer sequência arbitrária de ganhos $\{K_{arb,i}\}_{i=0}^{+\infty}$, se $0 \prec P_0 \preceq Y_0$ então $P_i \preceq Y_i$, para todo $i = 0, 1, \dots$.

Lema 6.3.2. *Sejam* $\{K_{arb,i}\}_{i=0}^{+\infty}$ *uma sequência de ganhos arbitrários e* $\{Y_i\}_{i=0}^{+\infty}$ *a sequência gerada a partir de*

$$Y_{i+1} = (\widehat{F} + \widehat{G}K_{arb,i})^T Y_i (\widehat{F} + \widehat{G}K_{arb,i}) + K_{arb,i}^T K_{arb,i} + \widehat{Q},$$

com condição inicial $Y_0 \succ 0$*. Considere* $R \succ 0$*,* $Q \succ 0$*,* P_0 *uma matriz satisfazendo* $0 \prec P_0 \preceq Y_0$ *e* $\{P_i\}_{i=0}^{+\infty}$ *a sequência gerada através de*

$$P_{i+1} = (\widehat{F} + \widehat{G}\widehat{K}_i)^T P_i (\widehat{F} + \widehat{G}\widehat{K}_i) + \widehat{K}_i^T \widehat{K}_i + \widehat{Q},$$

com

$$\widehat{K}_i = -(I + \widehat{G}^T P_i \widehat{G})^{-1} \widehat{G}^T P_i \widehat{F},$$

$$\widehat{F} = F - GR^{-1}E_G^T (E_G R^{-1} E_G^T)^{-1} E_F,$$

$$\widehat{R} = R^{-1} - R^{-1} E_G^T (E_G R^{-1} E_G^T)^{-1} E_G R^{-1},$$

$$\widehat{G} = G\widehat{R}^{\frac{1}{2}},$$

$$\widehat{Q} = Q + E_F^T (E_G R^{-1} E_G^T)^{-1} E_F.$$

Então $0 \prec P_i \preceq Y_i$ *para todo* $i = 0, 1, \dots$.

Demonstração. Consideremos as seguintes definições

$$Y_{i+1} := f(Y_i, K_{arb,i}) = (\widehat{F} + \widehat{G}K_{arb,i})^T Y_i (\widehat{F} + \widehat{G}K_{arb,i}) + K_{arb,i}^T K_{arb,i} + \widehat{Q}, \tag{6.46}$$

$$P_{i+1} := f(P_i, \widehat{K}_i) = (\widehat{F} + \widehat{G}\widehat{K}_i)^T Y_i (\widehat{F} + \widehat{G}\widehat{K}_i) + \widehat{K}_i^T \widehat{K}_i + \widehat{Q}, \tag{6.47}$$

$$Z_{i+1} := f(Y_i, K_i(Y_i)) = (\widehat{F} + \widehat{G}K_i(Y_i))^T Y_i (\widehat{F} + \widehat{G}K_i(Y_i)) + K_i^T(Y_i) K_i(Y_i) + \widehat{Q}, \tag{6.48}$$

$$W_{i+1} := f(P_i, K_i(Y_i)) = (\widehat{F} + \widehat{G}K_i(Y_i))^T P_i (\widehat{F} + \widehat{G}K_i(Y_i)) + K_i^T(Y_i) K_i(Y_i) + \widehat{Q}, \tag{6.49}$$

sendo $\widehat{K}_i = -(I + \widehat{G}^T P_i \widehat{G})^{-1} G^T P_i \widehat{F}$ e $K_i(Y_i) = -(I + \widehat{G}^T Y_i \widehat{G})^{-1} G^T Y_i \widehat{F}$.

Suponhamos $0 \prec P_0 \preceq Y_0$ e mostremos que $0 \prec P_1 \preceq Y_1$. O raciocínio a ser desenvolvido para mostrar que $0 \prec P_0 \preceq Y_0$ implica em $0 \prec P_1 \preceq Y_1$ é o mesmo que será utilizado a seguir para o passo geral $i+1$. Partiremos direto, portanto, para a demonstração do passo geral.

A prova será feita por indução. Hipótese de Indução : $0 \prec P_i \preceq Y_i$.

Algumas desigualdades auxiliares relacionando os elementos Y_{i+1}, P_{i+1}, Z_{i+1} e W_{i+1} serão obtidas.

(i) - $Z_{i+1} \preceq Y_{i+1}$.

Considerando $K_{arb,i} = K_i(Y_i) + (K_{arb,i} - K_i(Y_i))$ e substituindo em (6.46) obtemos

$$Y_{i+1} = f(Y_i, K_{arb,i}) = (\widehat{F} + \widehat{G}K_{arb,i})^T Y_i (\widehat{F} + \widehat{G}K_{arb,i}) + K_{arb,i}^T K_{arb,i} + \widehat{Q} =$$

$$= (\widehat{F} + \widehat{G}K_i(Y_i))^T Y_i (\widehat{F} + \widehat{G}K_i(Y_i)) + K_i^T(Y_i)K_i(Y_i) + \widehat{Q} +$$

$$+ (K_{arb,i} - K_i(Y_i))^T (I + \widehat{G}^T Y_i \widehat{G})(K_{arb,i} - K_i(Y_i)) +$$

$$+ (K_{arb,i} - K_i(Y_i))^T (K_i(Y_i) + \widehat{G}^T Y_i (\widehat{F} + \widehat{G}K_i(Y_i))) +$$

$$+ (K_i^T(Y_i) + (\widehat{F} + \widehat{G}K_i(Y_i))^T Y_i \widehat{G})(K_{arb,i} - K_i(Y_i)).$$

De $K_i(Y_i) = -(I + \widehat{G}^T Y_i \widehat{G})^{-1} G^T Y_i \widehat{F}$ tiramos que

$$K_i(Y_i) = -\widehat{G}^T Y_i (\widehat{F} + \widehat{G}K_i(Y_i)).$$

Então,

$$Y_{i+1} = f(Y_i, K_{arb,i}) = f(Y_i, K_i(Y_i)) + (K_{arb,i} - K_i(Y_i))^T (I + \widehat{G}^T Y_i \widehat{G})(K_{arb,i} - K_i(Y_i)).$$

Como $(K_{arb,i} - K_i(Y_i))^T (I + \widehat{G}^T Y_i \widehat{G})(K_{arb,i} - K_i(Y_i)) \succeq 0$, resulta que

$$Z_{i+1} = f(Y_i, K_i(Y_i)) \preceq f(Y_i, K_{arb,i}) = Y_{i+1}. \tag{6.50}$$

(ii) - $P_{i+1} \preceq W_{i+1}$.

Ao considerarmos $K_i(Y_i) = \widehat{K}_i + (K_i(Y_i) - \widehat{K}_i)$ e substituirmos em (6.49) obtemos analogamente ao que foi feito acima

$$W_{i+1} = (\widehat{F} + \widehat{G}\widehat{K}_i)^T P_i (\widehat{F} + \widehat{G}\widehat{K}_i) + \widehat{K}_i^T \widehat{K}_i + \widehat{Q} +$$

$$+(K_i(Y_i) - \widehat{K}_i)^T(I + \widehat{G}^T P_i \widehat{G})(K_i(Y_i) - \widehat{K}_i) +$$

$$+(K_i(Y_i) - \widehat{K}_i)^T(\widehat{K}_i + \widehat{G}^T P_i(\widehat{F} + \widehat{G}\widehat{K}_i)) + (\widehat{K}_i^T + (\widehat{F} + \widehat{G}\widehat{K}_i)^T P_i \widehat{G})(K_i(Y_i) - \widehat{K}_i) =$$

De $\widehat{K}_i = -(I + \widehat{G}^T P_i \widehat{G})^{-1} G^T P_i \widehat{F}$ tiramos que

$$\widehat{K}_i = -\widehat{G}^T P_i(\widehat{F} + \widehat{G}\widehat{K}_i).$$

Então,

$$W_{i+1} = f(P_i, K_i(Y_i)) = f(P_i, \widehat{K}_i) + (K_i(Y_i) - \widehat{K}_i)^T(I + \widehat{G}^T P_i \widehat{G})(K_i(Y_i) - \widehat{K}_i).$$

Como $(K_i(Y_i) - \widehat{K}_i)^T(I + \widehat{G} P_i \widehat{G})(K_i(Y_i) - \widehat{K}_i) \succeq 0$, resulta que

$$P_{i+1} = f(P_i, \widehat{K}_i) \preceq f(P_i, K_i(Y_i)) = W_{i+1}. \tag{6.51}$$

(iii) - $W_{i+1} \preceq Z_{i+1}$.

Pela hipótese de indução $P_i \preceq Y_i$ temos

$$W_{i+1} = f(P_i, K_i(Y_i)) = (\widehat{F} + \widehat{G}K_i(Y_i))^T P_i(\widehat{F} + \widehat{G}K_i(Y_i)) + K_i^T(Y_i)K_i(Y_i) + \widehat{Q} \preceq$$

$$\preceq (\widehat{F} + \widehat{G}K_i(Y_i))^T Y_i(\widehat{F} + \widehat{G}K_i(Y_i)) + K_i^T(Y_i)K_i(Y_i) + Q = f(Y_i, K_i(Y_i)) = Z_{i+1}.$$

Logo,

$$W_{i+1} = f(P_i, K_i(Y_i)) \preceq f(Y_i, K_i(Y_i)) = Z_{i+1}. \tag{6.52}$$

Combinando as desigualdades (6.50), (6.51) e (6.52) concluímos

$$P_{i+1} = f(P_i, \widehat{K}_i) \preceq f(P_i, K_i(Y_i)) \preceq f(Y_i, K_i(Y_i)) \preceq f(Y_i, K_{arb,i}) = Y_{i+1}.$$

Portanto, $0 \preceq P_{i+1} \preceq Y_{i+1}$. □

O Lema 6.3.2 mostrou que a escolha de uma sequência arbitrária $\{K_{arb,i}\}_{i=0}^{+\infty}$ produziu uma sequência de matrizes $\{Y_i\}_{i=0}^{+\infty}$, onde cada elemento Y_i superou o respectivo elemento P_i da sequência $\{P_i\}_{i=0}^{+\infty}$ gerada a partir da sequência de ganhos $\{\widehat{K}_i\}_{i=0}^{+\infty}$. A arbitrariedade na escolha da sequência de ganhos $\{K_{arb,i}\}_{i=0}^{+\infty}$ permite concluir que a escolha ótima para a sequência de ganhos é, portanto, sempre aquela gerada através de (6.43).

Supondo que o par $(\widehat{F}, \widehat{G})$ seja estabilizável, veja definição 4.1.3, é possível construirmos um limitante superior para sequência $\{P_i\}_{i=0}^{+\infty}$ gerada por (6.44). É isso o que enuncia o próximo resultado.

Proposição 6.3.1. *Seja $\{P_i\}_{i=0}^{+\infty}$ a sequência definida no Lema 6.3.2. Se o par $(\widehat{F}, \widehat{G})$ é estabilizável, então existe uma matriz $Y \succ 0$ tal que $0 \prec P_i \preceq Y$ para todo $i = 0, 1, \ldots$.*

Demonstração. Suponhamos que o par $(\widehat{F}, \widehat{G})$ seja estabilizável. Então, por definição, existe uma matriz de ganho T tal que $(\widehat{F} + \widehat{G}T)$ é estável. Consideremos, por construção, a sequência de matrizes $\{Y_i\}_{i=0}^{+\infty}$ gerada a partir da expressão recursiva

$$Y_{i+1} = (\widehat{F} + \widehat{G}K_{arb,i})^T Y_i (\widehat{F} + \widehat{G}K_{arb,i}) + K_{arb,i}^T K_{arb,i} + \widehat{Q},$$

com condição inicial $0 \prec P_0 \preceq Y_0$ e a sequência de ganhos $\{K_{arb,i}\}_{i=0}^{+\infty}$ é tal que $K_{arb,i} = T$ para todo $i = 0, 1, \ldots$. Ou seja, acabamos de gerar uma sequência de matrizes $\{Y_i\}_{i=0}^{+\infty}$ através de

$$Y_{i+1} = f(Y_i, T) = (\widehat{F} + \widehat{G}T)^T Y_i (\widehat{F} + \widehat{G}T) + T^T T + \widehat{Q},$$

com $0 \prec P_0 \preceq Y_0$.

Nestas circunstâncias, o Lema 6.3.2 garante que

$$0 \prec P_i \preceq Y_i \ \ \forall i = 0, 1, \ldots.$$

Para qualquer $j = 0, 1, ...$, observe que

$$Y_{j+1} - Y_j = f(Y_{j+1}, T) - f(Y_j, T) = (\widehat{F} + \widehat{G}T)^T (Y_j - Y_{j-1})(\widehat{F} + \widehat{G}T), \tag{6.53}$$

$$Y_j - Y_{j-1} = (\widehat{F} + \widehat{G}T)^T (Y_{j-1} - Y_{j-2})(\widehat{F} + \widehat{G}T), \tag{6.54}$$

$$Y_{j-1} - Y_{j-2} = (\widehat{F} + \widehat{G}T)^T (Y_{j-2} - Y_{j-3})(\widehat{F} + \widehat{G}T), \tag{6.55}$$

$$\vdots$$

$$Y_2 - Y_1 = (\widehat{F} + \widehat{G}T)^T (Y_1 - Y_0)(\widehat{F} + \widehat{G}T), \tag{6.56}$$

logo,

$$Y_{j+1} - Y_j = ((\widehat{F} + \widehat{G}T)^T)^j (Y_1 - Y_0)(\widehat{F} + \widehat{G}T)^j. \qquad (6.57)$$

Note ainda que para qualquer $j = 0, 1, ...$ a matriz Y_j pode ser escrita como

$$Y_j = (Y_j - Y_{j-1}) + (Y_{j-1} - Y_{j-2}) + (Y_{j-2} - Y_{j-3}) + ... + (Y_2 - Y_1) + (Y_1 - Y_0) + Y_0,$$

e que, através de (6.57) podemos escrever

$$Y_j = Y_0 + \sum_{k=1}^{j}(Y_j - Y_{j-1}) = Y_0 + \sum_{k=1}^{j}((\widehat{F} + \widehat{G}T)^T)^{k-1}(Y_1 - Y_0)(\widehat{F} + \widehat{G}T)^{k-1}.$$

Considerando que $(\widehat{F} + \widehat{G}T)$ é estável, temos $\rho(\widehat{F} + \widehat{G}T) < 1$. Então, de acordo com a Observação B.5.1, existe uma norma matricial $\| \bullet \|$ tal que $\|\widehat{F} + \widehat{G}T\| < 1$. Definindo $\alpha := \|\widehat{F} + \widehat{G}T\| < 1$, temos

$$\|Y_j\| \leq \|Y_0\| + \sum_{k=1}^{j} \|(\widehat{F} + \widehat{G}T)^T\|^{k-1} \|Y_1 - Y_0\| \|\widehat{F} + \widehat{G}T\|^{k-1} \leq$$

$$\leq \|Y_0\| + \|Y_1 - Y_0\| \sum_{k=1}^{j} \alpha^{2(k-1)} \leq \|Y_0\| + \|Y_1 - Y_0\| \sum_{k=1}^{+\infty} \alpha^{2(k-1)}.$$

Como a série $\sum_{k=1}^{+\infty} \alpha^{2(k-1)}$ converge para um número positivo β, visto que $\alpha < 1$, então

$$\|Y_j\| \leq \gamma,$$

onde $\gamma = \|Y_0\| + \|Y_1 - Y_0\|\beta$ para todo $j = 0, 1, ...$.

Perceba que γ independe de j, logo, tomando $Y = \gamma I$ concluímos que

$$P_i \preceq Y_i \preceq \|Y_i\| I \preceq Y.$$

Portanto, existe $Y \succ 0$ tal que $0 \prec P_i \preceq Y$ para todo $i = 0, 1, ...$. □

Lema 6.3.3. *Suponha $R \succ 0$ e $Q \succ 0$. Considere P_0 uma matriz satisfazendo $0 \prec P_0 \preceq Q$ e $\{P_i\}_{i=0}^{+\infty}$ a sequência de matrizes definidas positivas gerada através de*

$$P_{i+1} = (\widehat{F} + \widehat{G}\widehat{K}_i)^T P_i (\widehat{F} + \widehat{G}\widehat{K}_i) + \widehat{K}_i^T \widehat{K}_i + \widehat{Q},$$

sendo

$$\begin{aligned}
\widehat{K}_i &= -(I + \widehat{G}^T P_i \widehat{G})^{-1} \widehat{G}^T P_i \widehat{F}, \\
\widehat{F} &= F - GR^{-1} E_G^T (E_G R^{-1} E_G^T)^{-1} E_F, \\
\widehat{R} &= R^{-1} - R^{-1} E_G^T (E_G R^{-1} E_G^T)^{-1} E_G R^{-1}, \\
\widehat{G} &= G \widehat{R}^{\frac{1}{2}}, \\
\widehat{Q} &= Q + E_F^T (E_G R^{-1} E_G^T)^{-1} E_F.
\end{aligned}$$

Se o par $(\widehat{F}, \widehat{G})$ é estabilizável, então a sequência $\{P_i\}_{i=0}^{+\infty}$ é convergente. Além disso, o limite é uma matriz simétrica definida positiva.

Demonstração. A demonstração da convergência é fundamentada no fato que $\{P_i\}_{i=0}^{+\infty}$ trata-se de uma sequência monótona crescente limitada superiormente, veja [5]. A monotonicidade da sequência $\{P_i\}_{i=0}^{+\infty}$ foi provada no Lema 6.3.1, enquanto que, a sequência $\{P_i\}_{i=0}^{+\infty}$ ser limitada superiormente ficou garantida pela Proposição 6.3.1 dado que o par $(\widehat{F}, \widehat{G})$ é estabilizável.

Segue então que a sequência $\{P_i\}_{i=0}^{+\infty}$ formada por matrizes simétricas é convergente. Além disso, o limite é único. De fato, suponha que a sequência $\{P_i\}_{i=0}^{+\infty}$ converge para dois limites P_a e P_b. Para qualquer i temos

$$(P_a - P_b) = (P_a - P_i + P_i - P_b) = (P_a - P_i) + (P_i - P_b),$$

logo

$$(P_a - P_b) = \lim_{i \to +\infty} (P_a - P_b) = \lim_{i \to +\infty} (P_a - P_i) - \lim_{i \to +\infty} (P_b - P_i) = 0 \Rightarrow P_a = P_b.$$

Considere P como sendo o único limite da sequência $\{P_i\}_{i=0}^{+\infty}$. Basta notar que

$$0 \prec P_1 \preceq P_2 \preceq P_3 \preceq \ldots \preceq P_i \preceq \ldots \preceq P,$$

para concluir que $P \succ 0$.

Portanto, $\lim_{i \to +\infty} P_i = P \succ 0$. □

Lema 6.3.4. *Considere as mesmas hipóteses do Lema 6.3.3. Então, o limite $P \succ 0$ da sequência*

$\{P_i\}_{i=0}^{+\infty}$ é uma solução, em X, para a seguinte equação algébrica de Riccati

$$X = \widehat{F}^T(X - X\widehat{G}(I + \widehat{G}^T X\widehat{G})^{-1}\widehat{G}^T X)\widehat{F} + \widehat{Q}. \tag{6.58}$$

Demonstração. Considere $\{P_i\}_{i=0}^{+\infty}$ a sequência de matrizes gerada a partir da seguinte equação recursiva de Riccati

$$P_{i+1} = \widehat{F}^T(P_i - P_i\widehat{G}(I + \widehat{G}^T P_i\widehat{G})^{-1}\widehat{G}^T P_i)\widehat{F} + \widehat{Q}.$$

Aplicando o limite na expressão acima, de acordo com o Lema 6.3.3, concluímos que $P \succ 0$ satisfaz

$$P = \widehat{F}^T(P - P\widehat{G}(I + \widehat{G}^T P\widehat{G})^{-1}\widehat{G}^T P)\widehat{F} + \widehat{Q}.$$

□

Considerando que a equação (6.58) admite uma solução simétrica definida positiva $X = P$, observe então que o ganho $\widehat{K} \equiv \widehat{K}_\infty$, em (6.43), associado à matriz P é dado por

$$\widehat{K} = -(I + \widehat{G}^T P\widehat{G})^{-1}\widehat{G}^T P\widehat{F}. \tag{6.59}$$

Lema 6.3.5. *Considere as mesmas hipóteses do Lema 6.3.4. Seja $X = P$ uma solução para a seguinte equação algébrica de Riccati*

$$X = \widehat{F}^T(X - X\widehat{G}(I + \widehat{G}^T X\widehat{G})^{-1}\widehat{G}^T X)\widehat{F} + \widehat{Q}.$$

Se $P \succ 0$, então todos os autovalores da matriz

$$\widehat{L} = (\widehat{F} + \widehat{G}\widehat{K}) = \widehat{F} - \widehat{G}(I + \widehat{G}^T P\widehat{G})^{-1}G^T P\widehat{F},$$

pertencem ao disco unitário aberto, ou seja, $\widehat{L}$ é estável.

Demonstração. A demonstração de que $\widehat{L}$ é estável será feita por redução ao absurdo. Suponhamos que $\widehat{L}$ não seja estável. Logo, existe um autovalor λ da matriz $\widehat{L}$ tal que $|\lambda| \geq 1$, e mais, $\widehat{L}x = \lambda x$ para algum $x \neq 0$.

Lembremos que

$$P = \widehat{F}^T(P - P\widehat{G}(I + \widehat{G}^T P\widehat{G})^{-1}\widehat{G}^T P)\widehat{F} + \widehat{Q}$$

pode ser reescrita como

$$P = \widehat{L}^T P \widehat{L} + \widehat{K}^T I \widehat{K} + \widehat{Q}, \tag{6.60}$$

sendo

$$\widehat{L} = (\widehat{F} + \widehat{G}\widehat{K}) = \widehat{F} - \widehat{G}(I + \widehat{G}^T P \widehat{G})^{-1} \widehat{G}^T P \widehat{F}.$$

Pré-multiplicando e pós-multiplicando a expressão (6.60) por x^T e x respectivamente, obtemos

$$x^T P x = x^T \widehat{L}^T P \widehat{L} x + x^T \widehat{K}^T I \widehat{K} x + x^T \widehat{Q} x$$

$$x^T P x = |\lambda|^2 x^T P x + x^T \widehat{K}^T I \widehat{K} x + x^T \widehat{Q} x$$

$$(1 - |\lambda|^2) x^T P x = x^T (\widehat{K}^T I \widehat{K} + \widehat{Q}) x.$$

Como $|\lambda| \geq 1$, $P \succ 0$ e $x \neq 0$, então $(1 - |\lambda|^2) x^T P x \leq 0$. Porém, dado que $(\widehat{K}^T I \widehat{K} + \widehat{Q}) \succ 0$ e $x \neq 0$, então $x^T (\widehat{K}^T I \widehat{K} + \widehat{Q}) x > 0$. Logo, supor que $\widehat{L}$ não seja estável leva ao absurdo

$$(1 - |\lambda|^2) x^T P x = x^T (\widehat{K}^T I \widehat{K} + \widehat{Q}) x.$$

Portanto, $\widehat{L}$ é estável. □

Definição 6.3.1. *Seja P uma solução da equação algébrica de Riccati*

$$P = \widehat{F}^T (P - P\widehat{G}(I + \widehat{G}^T P \widehat{G})^{-1} \widehat{G}^T P) \widehat{F} + \widehat{Q}. \tag{6.61}$$

Dizemos que P é uma solução estabilizante da equação (6.61) se $\widehat{L}$ é estável.

Vimos até agora, sob certas condições, que a sequência $\{P_i\}_{i=0}^{+\infty}$ converge para uma matriz simétrica definida positiva solução da equação algébrica de Riccati e tal que $\widehat{L}$ é estável. Mostraremos agora que tal solução satisfazendo esta propriedade é única.

Lema 6.3.6. *Considere a equação algébrica de Riccati*

$$P = \widehat{F}^T (P - P\widehat{G}(I + \widehat{G}^T P \widehat{G})^{-1} \widehat{G}^T P) \widehat{F} + \widehat{Q}.$$

Se P é uma solução estabilizante, então P é única.

Demonstração. Suponhamos que existam duas soluções estabilizantes $X = P_1$ e $X = P_2$ para a equação algébrica de Riccati

$$X = \widehat{F}^T(X - X\widehat{G}(I + \widehat{G}^T X\widehat{G})^{-1}\widehat{G}^T X)\widehat{F} + \widehat{Q}.$$

Considere para $j = 1, 2$ os ganhos associados as soluções P_1 e P_2

$$\widehat{K}_j = -(I + \widehat{G}^T P_j\widehat{G})^{-1}\widehat{G}^T P_j\widehat{F}.$$

Utilizando os ganhos $\widehat{K}_j, j = 1, 2$ podemos reescrever P_1 e P_2 como

$$P_1 = \widehat{F}^T P_1\widehat{F} + \widehat{F}^T P_1\widehat{G}\widehat{K}_1 + \widehat{Q} \text{ e } P_2 = \widehat{F}^T P_2\widehat{F} + \widehat{K}_2^T G^T P_2\widehat{F} + \widehat{Q},$$

e cuja diferença fornece

$$(P_1 - P_2) = \widehat{F}^T(P_1 - P_2)\widehat{F} + \widehat{F}^T P_1\widehat{G}\widehat{K}_1 - \widehat{K}_2^T G^T P_2\widehat{F}. \tag{6.62}$$

Note também que

$$(I + \widehat{G}^T P_1\widehat{G})^{-1} - (I + \widehat{G}^T P_2\widehat{G})^{-1} = (I + \widehat{G}^T P_2\widehat{G})^{-1}\widehat{G}^T(P_2 - P_1)\widehat{G}(I + \widehat{G}^T P_1\widehat{G})^{-1}.$$

Pré-multiplicando a expressão acima por $\widehat{F}^T P_2\widehat{G}$ e pós-multiplicando por $\widehat{G}^T P_1\widehat{F}$, obtemos

$$-\widehat{F}^T P_2\widehat{G}\widehat{K}_1 + \widehat{K}_2^T\widehat{G}^T P_1\widehat{F} = \widehat{K}_2^T\widehat{G}^T(P_2 - P_1)\widehat{G}\widehat{K}_1.$$

Somando $(\widehat{F}^T P_1\widehat{F} + \widehat{F}^T P_2\widehat{F})$ em ambos os lados, obtemos

$$\widehat{F}^T(P_1 - P_2)\widehat{F} + \widehat{K}_2^T\widehat{G}^T(P_1 - P_2)\widehat{G}\widehat{K}_1 - \widehat{F}^T P_2\widehat{G}\widehat{K}_1 + \widehat{K}_2^T\widehat{G}^T P_1\widehat{F} = \widehat{F}^T(P_1 - P_2)\widehat{F}.$$

Completando quadrado dos dois primeiros termos do lado esquerdo da equação anterior, resulta

$$(\widehat{F}^T + \widehat{K}_2^T\widehat{G}^T)(P_1 - P_2)(\widehat{F} + \widehat{G}\widehat{K}_1) - \widehat{F}^T(P_1 - P_2)\widehat{G}\widehat{K}_1 - \widehat{K}_2^T\widehat{G}^T(P_1 - P_2)\widehat{F} -$$

$$-\widehat{F}^T P_2\widehat{G}\widehat{K}_1 + \widehat{K}_2^T\widehat{G}^T P_1\widehat{F} = \widehat{F}^T(P_1 - P_2)\widehat{F}.$$

Algumas manipulações algébricas adequadas na última expressão fornecem

$$(\widehat{F}^T + \widehat{K}_2^T\widehat{G}^T)(P_1 - P_2)(\widehat{F} + \widehat{G}\widehat{K}_1) = \widehat{F}^T(P_1 - P_2)\widehat{F} + \widehat{F}^T P_1\widehat{G}\widehat{K}_1 - \widehat{K}_2^T\widehat{G}^T P_2\widehat{F}.$$

Utilizando (6.62), obtemos

$$(\widehat{F}^T + \widehat{K}_2^T\widehat{G}^T)(P_1 - P_2)(\widehat{F} + \widehat{G}\widehat{K}_1) = (P_1 - P_2).$$

Ou melhor,

$$(P_1 - P_2) - (\widehat{F} + \widehat{G}\widehat{K}_2)^T(P_1 - P_2)(\widehat{F} + \widehat{G}\widehat{K}_1) = 0$$

Observe que a última expressão pode ser imediatamente identificada com a equação de Stein

$$S - BSA = \Gamma, \tag{6.63}$$

através de $S = (P_1 - P_2)$, $B = (\widehat{F} + \widehat{G}\widehat{K}_2)^T$, $A = (\widehat{F} + \widehat{G}\widehat{K}_1)$ e $\Gamma = 0$.

Sendo P_1 e P_2 soluções estabilizantes, por definição, as matrizes $\widehat{L}_j = (\widehat{F}+\widehat{G}\widehat{K}_j)$ para $j = 1, 2$ são estáveis. Como todos os autovalores de $(\widehat{F} + \widehat{G}\widehat{K}_2)$ e $(\widehat{F} + \widehat{G}\widehat{K}_1)$ pertencem disco unitário aberto, então de acordo com Teorema B.7.1 a equação de Stein (6.63) admite uma única solução. É imediato que tal solução é dada pela solução trivial $(P_1 - P_2) = 0$. Logo, $P_1 = P_2$.

Portanto, a solução estabilizante P é única. □

Após tudo o que foi feito até agora, nós estamos prontos para reunir as conclusões obtidas anteriormente à respeito da sequência $\{P_i\}_{i=0}^{+\infty}$ num único resultado.

Teorema 6.3.1. *Sejam $(\widehat{F}, \widehat{G})$ um par estabilizável, $R \succ 0$ e $Q \succ 0$. Considere a seguinte sequência de matrizes simétricas definidas positivas $\{P_i\}_{i=0}^{+\infty}$ gerada pela equação recursiva*

$$P_{i+1} = \widehat{F}^T(P_i - P_i\widehat{G}(I + \widehat{G}^T P_i\widehat{G})^{-1}\widehat{G}^T P_i)\widehat{F} + \widehat{Q},$$

sendo

$$\widehat{F} = F - GR^{-1}E_G^T(E_G R^{-1}E_G^T)^{-1}E_F,$$

$$\widehat{R} = R^{-1} - R^{-1}E_G^T(E_G R^{-1}E_G^T)^{-1}E_G R^{-1},$$

$$\widehat{G} = G\widehat{R}^{\frac{1}{2}},$$

$$\widehat{Q} = Q + E_F^T(E_G R^{-1} E_G^T)^{-1} E_F,$$

e condição inicial arbitrária satisfazendo $0 \prec P_0 \preceq Q$. *Então, existe uma única matriz* $P \succ 0$ *tal que* $P_i \to P$ *quando* $i \to +\infty$. *Além disso, o limite* $P \succ 0$ *é a única solução estabilizante para a equação algébrica de Riccati*

$$X = \widehat{F}^T(X - X\widehat{G}(I + \widehat{G}^T X \widehat{G})^{-1}\widehat{G}^T X)\widehat{F} + \widehat{Q}, \tag{6.64}$$

ou seja, a matriz $\widehat{L} = (\widehat{F} + \widehat{G}\widehat{K}) = (\widehat{F} - \widehat{G}(I + \widehat{G}^T P \widehat{G})^{-1}\widehat{G}^T P \widehat{F})$ *é estável.*

Demonstração. A convergência da sequência $\{P_i\}_{i=0}^{+\infty}$ para a solução definida positiva P da equação (6.64) segue dos lemas 6.3.3 e 6.3.4. A existência e unicidade da solução estabilizante P é garantida pelos lemas 6.3.5 e 6.3.6. $\square$

O Teorema 6.3.1 garante que a matriz $\widehat{L}$ é estável, ou seja, o ganho $\widehat{K}$ estabiliza o par $(\widehat{F}, \widehat{G})$. Resta garantir, no entanto, que o ganho

$$K^r = -\widehat{R}G^T(P^{-1} + G\widehat{R}G^T)^{-1}\widehat{F} - R^{-1}E_G^T(E_G R^{-1} E_G^T)^{-1}E_F$$

estabiliza o par $(F + \delta F, G + \delta G)$ para toda incerteza admissível δF e δG. O próximo corolário assegura esse resultado.

Corolário 6.3.1. *Considere as mesmas hipóteses do Teorema 6.3.1. Defina*

$$K^r = -\widehat{R}G^T(P^{-1} + G\widehat{R}G^T)^{-1}\widehat{F} - R^{-1}E_G^T(E_G R^{-1} E_G^T)^{-1}E_F.$$

Então, a matriz $L^r = (F + GK^r)$ *é estável.*

Demonstração. Sabe-se, de acordo com o Teorema 6.3.1, que a matriz

$$\widehat{L} = (\widehat{F} - \widehat{G}(I + \widehat{G}^T P \widehat{G})^{-1}\widehat{G}^T P \widehat{F})$$

é estável. Observe que

$$\widehat{L} = (\widehat{F} - \widehat{G}(I + \widehat{G}^T P \widehat{G})^{-1}\widehat{G}^T P \widehat{F}) = (I - \widehat{G}(I + \widehat{G}^T P \widehat{G})^{-1}\widehat{G}^T P)\widehat{F} =$$

$$= (I - \widehat{G}I\widehat{G}^T(P^{-1} + \widehat{G}I\widehat{G}^T)^{-1})\widehat{F}.$$

Lembrando que $\widehat{G} = G\widehat{R}^{\frac{1}{2}}$, temos

$$\widehat{L} = (I - G\widehat{R}^{\frac{1}{2}} I \widehat{R}^{\frac{T}{2}} \widehat{G}^T (P^{-1} + G\widehat{R}^{\frac{1}{2}} I \widehat{R}^{\frac{T}{2}} \widehat{G}^T)^{-1})\widehat{F} = (I - G\widehat{R}G^T(P^{-1} + G\widehat{R}G^T)^{-1})\widehat{F}.$$

Usando a definição de $\widehat{F}$, resulta

$$\widehat{L} = (I - G\widehat{R}G^T(P^{-1} + G\widehat{R}G^T)^{-1})(F - GR^{-1}E_G^T(E_G R^{-1} E_G^T)^{-1} E_F) =$$

$$= F - G\left(\widehat{R}G^T(P^{-1} + G\widehat{R}G^T)^{-1}(F - GR^{-1}E_G^T(E_G R^{-1} E_G^T)^{-1}E_F) + R^{-1}E_G^T(E_G R^{-1} E_G^T)^{-1} E_F\right).$$

Definindo

$$K^r = -\widehat{R}G^T(P^{-1} + G\widehat{R}G^T)^{-1}\widehat{F} - R^{-1}E_G^T(E_G R^{-1} E_G^T)^{-1} E_F,$$

temos

$$\widehat{L} = (\widehat{F} + \widehat{G}\widehat{K}) = (F + GK^r).$$

Portanto, a matriz $L^r := (F + GK^r)$ é estável. $\square$

Nós temos agora, portanto, condições de estabelecer o principal resultado deste capítulo a respeito da estabilidade e convergência do regulador robusto recursivo.

Teorema 6.3.2. *Sejam $R \succ 0$ e $Q \succ 0$. Considere a seguinte sequência de matrizes simétricas definidas positivas $\{P_i\}_{i=0}^{+\infty}$ gerada pela equação recursiva*

$$P_{i+1} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -I \\ \mathcal{F} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} P_i^{-1} & 0 & 0 & 0 & I & 0 \\ 0 & R^{-1} & 0 & 0 & 0 & I \\ 0 & 0 & Q^{-1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \mathcal{A} & -\mathcal{G} \\ I & 0 & 0 & \mathcal{A}^T & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 & -\mathcal{G}^T & 0 & 0 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -I \\ \mathcal{F} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

sendo $\mathcal{A} = \begin{bmatrix} I \\ 0 \end{bmatrix}$, $\mathcal{G} = \begin{bmatrix} G \\ E_G \end{bmatrix}$ *e* $\mathcal{F} = \begin{bmatrix} F \\ E_F \end{bmatrix}$ *e condição inicial arbitrária satisfazendo* $0 \prec P_0 \preceq Q$. *Defina*

$$\widehat{R} = R^{-1} - R^{-1}E_G^T(E_G R^{-1} E_G^T)^{-1} E_G R^{-1}.$$

Se $(F - GR^{-1}E_G^T(E_GR^{-1}E_G^T)^{-1}E_F, G\widehat{R}^{\frac{1}{2}})$ *é um par estabilizável, então existe uma única matriz* $P \succ 0$ *tal que* $P_i \to P$ *quando* $i \to +\infty$*. Além disso,* $P \succ 0$ *é a única solução estabilizante para a equação algébrica*

$$P = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -I \\ \mathcal{F} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} P^{-1} & 0 & 0 & 0 & I & 0 \\ 0 & R^{-1} & 0 & 0 & 0 & I \\ 0 & 0 & Q^{-1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \mathcal{A} & -\mathcal{G} \\ I & 0 & 0 & \mathcal{A}^T & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 & -\mathcal{G}^T & 0 & 0 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -I \\ \mathcal{F} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}. \tag{6.65}$$

E mais, as matrizes L^r *e* K^r *dadas por*

$$\begin{bmatrix} L^r \\ K^r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ I & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} P^{-1} & 0 & 0 & 0 & I & 0 \\ 0 & R^{-1} & 0 & 0 & 0 & I \\ 0 & 0 & Q^{-1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \mathcal{A} & -\mathcal{G} \\ I & 0 & 0 & \mathcal{A}^T & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 & -\mathcal{G}^T & 0 & 0 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -I \\ \mathcal{F} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

são tais que $L^r = (F + GK^r)$ *é estável.*

Demonstração. Segue do Teorema 6.3.1 e Corolário 6.3.1 quando aplicamos as equivalências das expressões estabelecidas pelos lemas auxiliares. □

6.3.1 Sistema em Malha Fechada - Estado Permanente

Considere o sistema linear discreto incerto

$$\begin{aligned} x_{i+1} &= (F + \delta F)x_i + (G + \delta G)u_i \\ \begin{bmatrix} \delta F & \delta G \end{bmatrix} &= H\Delta \begin{bmatrix} E_F & E_G \end{bmatrix}, \ \|\Delta\| \leq 1 \end{aligned}. \tag{6.66}$$

Vimos que a solução do problema de controle robusto proposto para o sistema (6.66) é uma realimentação de estado da forma

$$u_i = K_i x_i = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ I \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} P_{i+1}^{-1} & 0 & 0 & 0 & I & 0 \\ 0 & R^{-1} & 0 & 0 & 0 & I \\ 0 & 0 & Q^{-1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \mathcal{A} & -\mathcal{G} \\ I & 0 & 0 & \mathcal{A}^T & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 & -\mathcal{G}^T & 0 & 0 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -I \\ \mathcal{F} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} x_i, \tag{6.67}$$

com a sequência de ganhos K_i dada em termos de

$$P_i = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -I \\ \mathcal{F} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} P_{i+1}^{-1} & 0 & 0 & 0 & I & 0 \\ 0 & R^{-1} & 0 & 0 & 0 & I \\ 0 & 0 & Q^{-1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \mathcal{A} & -\mathcal{G} \\ I & 0 & 0 & \mathcal{A}^T & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 & -\mathcal{G}^T & 0 & 0 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -I \\ \mathcal{F} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \tag{6.68}$$

sendo $\mathcal{A} = \begin{bmatrix} I \\ 0 \end{bmatrix}$, $\mathcal{G} = \begin{bmatrix} G \\ E_G \end{bmatrix}$ e $\mathcal{F} = \begin{bmatrix} F \\ E_F \end{bmatrix}$.

Perceba, nesta situação, que o sistema em malha fechada

$$\begin{aligned} x_{i+1} &= [(F + \delta F) + (G + \delta G)K_i]x_i \\ \begin{bmatrix} \delta F & \delta G \end{bmatrix} &= H\Delta \begin{bmatrix} E_F & E_G \end{bmatrix} \end{aligned}, \tag{6.69}$$

é variante no tempo, já que os ganhos de realimentação K_i são variantes no tempo devido à dependência de P_{i+1}. Além disso, de acordo com o Lema 6.1.1, o Sistema (6.69) torna-se

$$x_{i+1} = (F + GK_i)x_i, \tag{6.70}$$

para toda incerteza paramétrica admissível δF e δG. Note ainda que a expressão do Sistema

(6.70) é justamente aquela fornecida por

$$x_{i+1} = L_i x_i = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ I \\ 0 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} P_{i+1}^{-1} & 0 & 0 & 0 & I & 0 \\ 0 & R^{-1} & 0 & 0 & 0 & I \\ 0 & 0 & Q^{-1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \mathcal{A} & -\mathcal{G} \\ I & 0 & 0 & \mathcal{A}^T & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 & -\mathcal{G}^T & 0 & 0 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -I \\ \mathcal{F} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} x_i. \tag{6.71}$$

Considerando o limite quando $i \to -\infty$ em K_i, nós já sabemos que tal limite existe e resulta em uma matriz de realimentação $K^r \equiv K_\infty$ constante dada por

$$K^r = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ I \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} P^{-1} & 0 & 0 & 0 & I & 0 \\ 0 & R^{-1} & 0 & 0 & 0 & I \\ 0 & 0 & Q^{-1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \mathcal{A} & -\mathcal{G} \\ I & 0 & 0 & \mathcal{A}^T & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 & -\mathcal{G}^T & 0 & 0 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -I \\ \mathcal{F} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

tal que $L^r = (F + GK^r)$ é estável.

Portanto, o sistema em malha fechada (6.69) é estável para toda incerteza paramétrica admissível.

Conclusões

Esta dissertação propôs um regulador robusto recursivo para uma determinada classe de sistemas lineares incertos. Primeiramente, uma nova abordagem foi considerada para resolver o problema do regulador linear quadrático ótimo. Tal abordagem foi baseada nas técnicas de mínimos quadrados ponderados e funções penalidade. A lei de controle ótimo junto com as expressões do ganho de realimentação e da equação recursiva de Riccati foram apresentadas. Além disso, tais expressões mostraram-se equivalentes as já existentes na literatura.

A eficiência desta abordagem na solução do problema RLQ permitiu que tal formulação fosse estendida para o tratamento do problema do regulador robusto recursivo para sistemas lineares de tempo discreto sujeitos a incertezas paramétricas. Um dos aspectos mais interessantes da solução recursiva proposta foi o arranjo simétrico com que as matrizes de ponderação e de parâmetros do sistema foram agrupadas, de maneira independente, em um bloco matricial de dimensão seis. É válido destacar também que, para cada passo, a forma recursiva é dependente somente das matrizes de parâmetros e de ponderação conhecidas do sistema e está associada a uma equação de Riccati. E mais, ficou garantida também a convergência e a estabilidade do regulador robusto proposto quando consideramos as matrizes de parâmetros e ponderações do sistema linear incerto como sendo invariantes no tempo.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

[1] Albert, A. (1972). *Regression and the Moore-Penrose pseudoinverse.* New York and London: Academic Press.

[2] Anderson, B. D. O. e J. B. Moore (1989). *Optimal Control - Linear Quadratic Methods.* New Jersey: Prentice-Hall, Inc.

[3] Bakule, L., J. Rodellar, e J. M. Rossell (2002). Overlapping guaranteed cost control for time-varying discrete-time uncertain systems. In *Proceedings of the American Control Conference, Anchorage, AK*, Volume 2, pp. 1705–1710.

[4] Bazaraa, M. S., H. D. Sherali, e C. M. Shetty (1993). *Nonlinear Programming: Theory and Algorithms* (2ª ed.). New York: Wiley-Interscience.

[5] Bellman, R. E. (1997). *Introduction to matrix analysis - Classics in Applied Mathematics* (2ª ed.), Volume 19. SIAM.

[6] Bellman, R. E. e S. E. Dreyfus (1962). *Applied Dynamic Programming.* New Jersey: Princeton University Press.

[7] Bellman, R. E. e R. Kalaba (1965). *Dynamic Programming and Modern Control Theory.* New York: Academic Press.

[8] Bemporad, A., F. Borrelli, e M. Morari (2003). Min-max control of constrained uncertain discrete-time linear systems. *IEEE Transactions on Automatic Control 48*(9), 1600–1606.

[9] Bertsekas, D. P. (1995). *Dynamic Programming and Optimal Control*, Volume I. Belmont, Massachusetts: Athena Scientific.

[10] Caines, P. E. e D. Q. Mayne (1970). On the discrete time matrix Riccati equation of optimal control. *International Journal of Control 12*(5), 785–794.

[11] Caines, P. E. e D. Q. Mayne (1971). On the discrete time matrix Riccati equation of optimal control - a correction. *International Journal of Control 14*(1), 205–207.

[12] Campos, J. C. T. (2004). *Filtragem Robusta para Sistemas Singulares Discretos no Tempo.* Tese de Doutorado, USP - Universidade de São Paulo, São Carlos.

[13] Chen, C. T. (1999). *Linear System - Theory and Design* (3ª ed.). New York: Oxford University Press.

[14] Dorato, P. e A. Levis (1971). Optimal linear regulators: the discrete-time case. *IEEE Transactions on Automatic Control 16*(6), 613–620.

[15] Fletcher, R. (1987). *Practical Methods of Optimization*, Volume 2. New York: Wiley.

[16] Fritzsche, H. (1978). *Programação Não-Linear - Análise e Métodos.* São Paulo: Editora Edgard Blücher : Editora da Universidade de São Paulo.

[17] Garcia, G., J. Bernussou, e D. Arzelier (1994). Robust stabilization of discrete-time linear systems with norm-bounded time varying uncertainty. *Systems & Control Letters 22*, 327–339.

[18] Garcia, G., B. Pradin, S. Tarbouriech, e F. Zeng (2002). Robust stabilization and guaranteed cost control for discrete-time linear systems by static output feedback. In *Proceedings of the American Control Conference, Anchorage, AK*, Volume 3, pp. 2398–2403.

[19] Horn, R. A. e C. R. Johnson (1996). *Matrix Analisys.* Cambridge: Cambridge University Press.

[20] Jiang, P., H. Su, e J. Chu (2000). LMI approach to optimal guaranteed cost control for a class of linear uncertain discrete systems. In *Proceedings of the American Control Conference, Chicago, Illinois*, Volume 1, pp. 327–331.

[21] Kailath, T., A. H. Sayed, e B. Hassibi (2000). *Linear Estimation.* New Jersey: Prentice-Hall, Inc.

[22] Kolla, S. e D. Border (2002). Robustness of discrete-time state feedback control systems. *ISA Transactions 41*, 191–194.

[23] Kwakernaak, H. e R. Sivan (1972). *Linear Optimal Control Systems.* New York: Wiley Interscience.

[24] Lancaster, P. e L. Rodman (1995). *Algebraic Riccati Equations*, Volume 1. Oxford and New York: Oxford Science Publications.

[25] Lewis, F. L. (1986). *Optimal Control.* New York: John Wiley and Sons.

[26] Luenberger, D. G. (2003). *Linear and Nonlinear Programming* (2^{a} ed.). Boston: Kluwer Academic Publishers.

[27] Lyashevskiy, S. (1995). Synthesis of robust controllers for uncertain discrete systems. In *Proceedings of the American Control Conference, Seattle, Washington*, Volume 3, pp. 1988–1989.

[28] Lyashevskiy, S. (1997). Control of discrete-time systems with uncertain parameters. In *Proceedings of the American Control Conference, Albuquerque, New Mexico*, Volume 6, pp. 3621–3625.

[29] Magana, M. e S. H. Zak (1988). Robust state feedback stabilization of discrete-time uncertain dynamical systems. *IEEE Transactions on Automatic Control 33*(9), 887–891.

[30] Meditch, J. S. (1969). *Stochastic Optimal Linear Estimation and Control.* McGraw-Hill Book Company.

[31] Myszkorowski, P. (1994). Robust control of linear discrete-time systems. *Systems & Control Letters 22*(4), 277–280.

[32] Nascimento, V. H. e A. H. Sayed (1999). Optimal state regularization for uncertain state-space models. In *Proceedings of the American Control Conference, San Diego, California*, Volume 1, pp. 419–424.

[33] Nikoukhah, R., A. L. Willsky, e B. C. Levy (1992). Kalman filtering and Riccati equations for decriptor systems. *IEEE Transactions on Automatic Control 37*(9), 1325–1342.

[34] Ogata, K. (1987). *Discrete-Time Control Systems.* New Jersey: Prentice-Hall, Inc.

[35] Petersen, I. R., D. C. Mcfarlane, e M. A. Rotea (1998). Optimal guaranteed cost control of discrete-time uncertain linear systems. *International Journal of Robust Nonlinear Control 8*, 649–657.

[36] Sayed, A. H. (2001). A framework for state-space estimation with uncertain models. *IEEE Transactions on Automatic Control 46*(7), 998–1013.

[37] Sayed, A. H. e V. H. Nascimento (1999). Design criteria for uncertain models with structured and unstructured uncertainties. In A. Garulli, A. Tesi, e A. Vicino (Eds.), *Robustness in Identification and Control*, Volume 245, pp. 159–173. Springer-Verlag, London.

[38] Winstead, V. (2001). Distributionally robust discrete lqr optimal cost. In *Proceedings of the American Control Conference, Arlington, VA*, Volume 4, pp. 3227–3228.

[39] Xie, L. e Y. C. Soh (1993). Control of uncertain discrete-time systems with guaranteed cost. In *Proceedings of the 32nd IEEE Conference on Decision and Control, San Antonio, Texas*, Volume 1, pp. 56–61.

[40] Xu, S. e J. Lam (2004). Robust stability and stabilization of discrete singular systems: an equivalent characterization. *IEEE Transactions on Automatic Control 49*(4), 568–574.

[41] Yang, W. C. e M. Tomizuka (1990). Discrete time robust control via state feedback for single input systems. *IEEE Transactions on Automatic Control 35*(5), 590–598.

[42] Yee, J., G. Yang, e J. L. Wang (2001). Non-fragile guaranteed cost control for discrete-time uncertain linear systems. *International Journal of Systems Science 32*(7), 845–853.

[43] Yu, L., J. Wang, e J. Chu (1997). Guaranteed cost control of uncertain linear discrete-time systems. In *Proceedings of the American Control Conference, Albuquerque, New Mexico*, Volume 5, pp. 3181–3184.

[44] Zangwill, W. I. (1969). *Nonlinear Programming - A Unified Approach*. New Jersey: Prentice-Hall.

[45] Zhang, F. (2005). *The Schur Complement and Its Applications*, Volume 4. USA: Springer.

APÊNDICE A
Regulador Robusto Recursivo - Aspectos Complementares

A.1 Comportamento $(\mu \rightarrow +\infty)$

Dado o sistema linear discreto sujeito a incertezas paramétricas

$$\begin{aligned} x_{i+1} &= (F_i + \delta F_i)x_i + (G_i + \delta G_i)u_i \\ \begin{bmatrix} \delta F_i & \delta G_i \end{bmatrix} &= H_i \Delta_i \begin{bmatrix} E_{F_i} & E_{G_i} \end{bmatrix}; \quad i = 0, ..., N \end{aligned}, \tag{A.1}$$

considere o seguinte problema de otimização min-max

$$\min_{x_{i+1}, u_i} \max_{\delta F_i, \delta G_i} \{J_i^{\mu}(x_{i+1}, u_i, \delta F_i, \delta G_i)\} \tag{A.2}$$

sendo $J_i^{\mu}(x_{i+1}, u_i, \delta F_i, \delta G_i)$ o funcional custo quadrático dado pela seguinte expressão

$$J_i^{\mu}(x_{i+1}, u_i, \delta F_i, \delta G_i) = \begin{bmatrix} x_{i+1} \\ u_i \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} P_{i+1} & 0 \\ 0 & R_i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{i+1} \\ u_i \end{bmatrix} + \tag{A.3}$$

$$+ \left\{ \left(\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ I & -G_i \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -\delta G_i \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} x_{i+1} \\ u_i \end{bmatrix} - \left(\begin{bmatrix} -I \\ F_i \end{bmatrix} x_i + \begin{bmatrix} 0 \\ \delta F_i \end{bmatrix} x_i \right) \right\}^T \begin{bmatrix} Q_i & 0 \\ 0 & \mu I \end{bmatrix} \left\{ \bullet \right\},$$

com $\mu > 0$ fixado. Vimos no Capítulo 5, através do Lema 5.2.1, que após a etapa de maximização este problema foi reduzido a um problema de MQP dado por

$$\min_{x_{i+1}, u_i} \left\{ (\mathcal{A}_i \mathcal{X}_i - \mathcal{B}_i)^T \mathcal{W}_i (\mathcal{A}_i \mathcal{X}_i - \mathcal{B}_i) \right\} \tag{A.4}$$

com as seguintes identificações

$$\mathcal{A}_i = \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & I \\ 0 & 0 \\ \mathcal{I} & -\mathcal{G}_i \end{bmatrix}, \quad \mathcal{X}_i = \begin{bmatrix} x_{i+1} \\ u_i \end{bmatrix}, \quad \mathcal{B}_i = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -I \\ \mathcal{F}_i \end{bmatrix} x_i, \quad \mathcal{W}_i = \begin{bmatrix} P_{i+1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & R_i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \widehat{W}_i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \widehat{\lambda}_i I \end{bmatrix},$$

$$\mathcal{G}_i = \begin{bmatrix} G_i \\ E_{G_i} \end{bmatrix}, \quad \mathcal{I} = \begin{bmatrix} I \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathcal{F}_i = \begin{bmatrix} F_i \\ E_{F_i} \end{bmatrix}, \quad \widehat{W}_i = \begin{bmatrix} Q_i & 0 \\ 0 & (\mu^{-1} I - \widehat{\lambda}_i^{-1} H_i H_i^T)^{-1} \end{bmatrix},$$

sendo $\widehat{\lambda}_i$ um parâmetro escalar não negativo obtido através do problema de minimização

$$\widehat{\lambda}_i \in \arg \min_{\lambda_i \geq \|\mu H_i^T H_i\|} \Gamma_i(\lambda_i),$$

com $\Gamma_i(\lambda_i)$ dado por (3.28). E que, neste passo passamos a considerar o problema de encontrar, para cada $\mu > 0$, a respectiva solução ótima $(x_{i+1}^*(\mu), u_i^*(\mu))$ para (A.4).

É bastante simples verificar que o problema de MQP (A.4) pode ser reescrito, de maneira conveniente, como

$$\min_{x_{i+1}, u_i} \left\{ \left(\begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & I \\ 0 & 0 \\ \mathcal{I} & -\mathcal{G}_i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{i+1} \\ u_i \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -I \\ \mathcal{F}_i \end{bmatrix} x_i \right)^T \begin{bmatrix} P_{i+1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & R_i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & Q_i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \Pi_i \end{bmatrix} (\bullet) \right\}, \tag{A.5}$$

quando definimos

$$\Pi_i := \Sigma_i^{-1}(\mu, \widehat{\lambda}_i) = \begin{bmatrix} (\mu^{-1} I - \widehat{\lambda}_i^{-1} H_i H_i^T)^{-1} & 0 \\ 0 & \widehat{\lambda}_i I \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Pi_{1,i} & 0 \\ 0 & \Pi_{2,i} \end{bmatrix},$$

para cada $\mu > 0$ fixado.

Considere $\Pi_{1,i} := (\mu^{-1} I - \widehat{\lambda}_i^{-1} H_i H_i^T)^{-1}$ e $\Pi_{2,i} := \widehat{\lambda}_i I$. Conforme $\mu \to +\infty$, as entradas da matriz $\Pi_{1,i}$ e os elementos da diagonal da matriz $\Pi_{2,i}$ crescem indefinidamente. Logo, certos elementos π_{kj} (entradas da matriz de ponderação Π_i) crescem indefinidamente quando $\mu \to +\infty$. Isto é equivalente a considerarmos, em substituição de Π_i em (A.5), a matriz de ponderação $\Xi := \alpha\, \Upsilon$ quando fazemos $\alpha \to +\infty$ para alguma matriz simétrica definida positiva assumida conhecida Υ de dimensão compatível. Dessa maneira, o problema de MQP irrestrito torna-se

$$\min_{x_{i+1},u_i} \left\{ \left(\begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & I \\ 0 & 0 \\ \mathcal{I} & -\mathcal{G}_i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{i+1} \\ u_i \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -I \\ \mathcal{F}_i \end{bmatrix} x_i \right)^T \begin{bmatrix} P_{i+1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & R_i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & Q_i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \Xi \end{bmatrix} \left(\bullet \right) \right\}, \tag{A.6}$$

para cada $\alpha > 0$ fixado. Perceba então que o problema de MQP irrestrito (A.6) pode ser interpretado como um problema de MQP sujeito a uma restrição de igualdade linear dado por

$$\begin{aligned} \min_{x_{i+1},u_i} & \left\{ \left(\begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & I \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{i+1} \\ u_i \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -I \end{bmatrix} x_i \right)^T \begin{bmatrix} P_{i+1} & 0 & \\ 0 & R_i & 0 \\ 0 & 0 & Q_i \end{bmatrix} \left(\begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & I \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{i+1} \\ u_i \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -I \end{bmatrix} x_i \right) \right\}, \\ s.a & \begin{bmatrix} \mathcal{I} & -\mathcal{G}_i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{i+1} \\ u_i \end{bmatrix} - \mathcal{F}_i x_i = 0 \end{aligned} \tag{A.7}$$

onde a restrição foi incorporada à função objetivo através da função penalidade definida por

$$\Theta(\mathcal{X}_i) := H(\mathcal{X}_i)^T \Xi H(\mathcal{X}_i) = \alpha P(\mathcal{X}_i),$$

sendo $H(\mathcal{X}_i) := \left(\begin{bmatrix} \mathcal{I} & -\mathcal{G}_i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{i+1} \\ u_i \end{bmatrix} - \mathcal{F}_i x_i \right)$ e $\alpha > 0$. Observe agora que a função

$$P(\mathcal{X}_i) = H(\mathcal{X}_i)^T \Upsilon H(\mathcal{X}_i), \quad \Upsilon \succ 0$$

satisfaz todas as condições da função P exigidas na Seção 2.5 e, de acordo com o método de penalidades, o termo $\alpha P(\mathcal{X}_i^*(\alpha)) \to 0$ quando o parâmetro de penalidade $\alpha \to +\infty$. Ou seja, o termo $P(\mathcal{X}_i^*(\alpha))$ vai a zero muito mais rápido do que o parâmetro de penalidade α tende ao infinito.

De forma equivalente à análise feita acima, a solução

$$\mathcal{X}_i^*(\mu) = \begin{bmatrix} x_{i+1}^*(\mu) \\ u_i^*(\mu) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L_i^\mu \\ K_i^\mu \end{bmatrix} x_i$$

encontrada para cada $\mu > 0$ é tal que $H(\mathcal{X}_i^*(\mu))^T \Pi_i H(\mathcal{X}_i^*(\mu)) \to 0$ quando $\mu \to +\infty$. Isto é, $H(\mathcal{X}_i^*(\mu)) \to 0$ mais rápido do que as entradas da matriz Π_i crescem indefinidamente.

Logo,

$$(\mathcal{I}L_i^{\mu} - \mathcal{G}_i K_i^{\mu} - \mathcal{F}_i)^T \Pi_i (\mathcal{I}L_i^{\mu} - \mathcal{G}_i K_i^{\mu} - \mathcal{F}_i) \to 0$$

à medida que $\mu \to +\infty$. Dessa forma, obtemos que

$$(\mathcal{I}L_i^{\mu} - \mathcal{G}_i K_i^{\mu} - \mathcal{F}_i) \to 0 \;\Rightarrow\; \begin{cases} L_i^{\infty} \,=\, F_i \,+\, G_i K_i^{\infty} \\ E_{F_i} \,+\, E_{G_i} K_i^{\infty} \,=\, 0 \end{cases}.$$

Portanto, o ganho de realimentação K_i obtido é tal que

$$\begin{cases} L_i \,=\, F_i \,+\, G_i K_i \\ E_{F_i} \,+\, E_{G_i} K_i \,=\, 0 \end{cases} \tag{A.8}$$

ao definirmos $L_i := L_i^{\infty}$ e $K_i := K_i^{\infty}$.

A.2 Análise da dimensão das matrizes de incertezas do sistema

Considere o sistema linear incerto previamente introduzido no Capítulo 6

$$\begin{array}{c} x_{i+1} \,=\, (F + \delta F)x_i \,+\, (G + \delta G)u_i \\ \begin{bmatrix} \delta F & \delta G \end{bmatrix} \,=\, H\Delta \begin{bmatrix} E_F & E_G \end{bmatrix} \end{array}, \tag{A.9}$$

sendo $F \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $G \in \mathbb{R}^{n\times m}$, $\delta F \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $\delta G \in \mathbb{R}^{n\times m}$, $H \in \mathbb{R}^{n\times k}$, $\Delta \in \mathbb{R}^{k\times l}$, $E_F \in \mathbb{R}^{l\times n}$ e $E_G \in \mathbb{R}^{l\times m}$. Assuma que o sistema acima seja instável para toda incerteza admissível δF e δG.

O objetivo desta seção é levantar hipóteses preliminares, para estudos futuros, sobre as dimensões das matrizes do sistema que possam garantir a existência de um ganho de realimentação K, isto é, $u_i \,=\, Kx_i$, satisfazendo

(i) - $(F + GK)$ estável,

(ii) - $E_F + E_G K = 0$,

em $x_{i+1} \,=\, (F + GK)\, x_i \,+\, H\Delta(E_F + E_G K)x_i$, para toda incerteza admissível δF e δG.

Já vimos no Capítulo 6 que, sob certas condições, o regulador robusto recursivo proposto no Capítulo 5 ajusta um ganho K, quando $i \to -\infty$, que estabiliza o Sistema (A.9). Porém, a existência de tal ganho que satisfaça as condições (i) e (ii) não fica garantida quando consideramos escolhas arbitrárias para as dimensões das matrizes de incertezas do sistema (A.9). De fato, basta notar que a expressão

$$K^r \;=\; -\widehat{R}G^T(P^{-1} + G\widehat{R}G^T)^{-1}\widehat{F} - R^{-1}E_G^T(E_G R^{-1}E_G^T)^{-1}E_F$$

sendo $\widehat{R} = R^{-1} - R^{-1}E_G^T(E_G R^{-1}E_G^T)^{-1}E_G R^{-1}$, reduz-se a $K^r \;=\; -(E_G)^{-1}E_F$ se considerarmos E_G uma matriz quadrada invertível. Apesar de $(E_F + E_G K^r \;=\; 0)$, exemplos numéricos mostram que $L^r \;=\; (F + GK^r)$ não é estável. No entanto, há a ocorrência de (i) e (ii) quando supomos E_G sendo uma matriz retangular posto linha pleno, conforme o que vimos no Capítulo 6.

Suponhamos que, dadas as informações sobre o Sistema (A.9), tentássemos encontrar um ganho K compatível com as condições (i) e (ii). Para isso seria razoável então resolver um sistema de equações, como veremos na sequência, cujas incógnitas correspondem às entradas da matriz de ganho K. Sejam então

$$F = \begin{bmatrix} f_{11} & f_{12} & \cdots & f_{1n} \\ f_{21} & f_{22} & \cdots & f_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ f_{n1} & f_{n2} & \cdots & f_{nn} \end{bmatrix},\; G = \begin{bmatrix} g_{11} & g_{12} & \cdots & g_{1m} \\ g_{21} & g_{22} & \cdots & g_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ g_{n1} & g_{n2} & \cdots & g_{nm} \end{bmatrix},\; K \;=\; \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & \cdots & k_{1n} \\ k_{21} & k_{22} & \cdots & k_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ k_{m1} & k_{m2} & \cdots & k_{mn} \end{bmatrix},$$

$$E_F = \begin{bmatrix} E_{f_{11}} & E_{f_{12}} & \cdots & E_{f_{1n}} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ E_{f_{l1}} & E_{f_{l1}} & \cdots & E_{f_{ln}} \end{bmatrix}, E_G = \begin{bmatrix} E_{g_{11}} & E_{g_{12}} & \cdots & E_{g_{1m}} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ E_{g_{l1}} & E_{g_{l1}} & \cdots & E_{g_{lm}} \end{bmatrix},$$

e considere

$$F + GK \;=$$

$$= \begin{bmatrix} f_{11} & f_{12} & \cdots & f_{1n} \\ f_{21} & f_{22} & \cdots & f_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ f_{n1} & f_{n2} & \cdots & f_{nn} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} g_{11} & g_{12} & \cdots & g_{1m} \\ g_{21} & g_{22} & \cdots & g_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ g_{n1} & g_{n2} & \cdots & g_{nm} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & \cdots & k_{1n} \\ k_{21} & k_{22} & \cdots & k_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ k_{m1} & k_{m2} & \cdots & k_{mn} \end{bmatrix},$$

$$E_F + E_G K = 0$$

$$\begin{bmatrix} E_{f_{11}} & E_{f_{12}} & \cdots & E_{f_{1n}} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ E_{f_{l1}} & E_{f_{l1}} & \cdots & E_{f_{ln}} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} E_{g_{11}} & E_{g_{12}} & \cdots & E_{g_{1m}} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ E_{g_{l1}} & E_{g_{l1}} & \cdots & E_{g_{lm}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & \cdots & k_{1n} \\ k_{21} & k_{22} & \cdots & k_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ k_{m1} & k_{m2} & \cdots & k_{mn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}.$$

Primeiro, para que a matriz $(F + GK)$ seja estável é preciso que seus autovalores estejam dentro do disco unitário. O polinômio característico, em s, de $F + GK$ é dado por

$$P_r(s) = s^n + a_1 s^{n-1} + a_2 s^{n-2} + \cdots + a_{n-1} s^1 + a_n s^0, \tag{A.10}$$

onde $a_1 = a_1(k_{11}, \ldots, k_{mn})$; $a_2 = a_2(k_{11}, \ldots, k_{mn}); \ldots; a_n = a_n(k_{11}, \ldots, k_{mn})$. Suponha agora que as raízes do polinômio $P_r(s)$ ou, equivalentemente, os autovalores de $F + GK$ sejam realocados em $s_1, s_2, \cdots, s_n$ onde $|s_i| < 1$, $i = 0, \ldots, n$. Então, o polinômio característico desejado com as escolhas de $s_1, s_2, \cdots, s_n$ é dado por

$$\begin{aligned} P_r(s) &= (s - s_1)(s - s_2) \cdots (s - s_{n-1})(s - s_n) = \\ &= s^n + b_1 s^{n-1} + b_2 s^{n-2} + \cdots + b_{n-1} s^1 + b_n s^0, \end{aligned} \tag{A.11}$$

onde $b_1 = b_1(s_1, \ldots, s_n)$; $b_2 = b_2(s_1, \ldots, s_n)$; $\ldots$; $b_n = b_n(s_1, \ldots, s_n)$. Note que todos os $b_i, i = 0, \ldots, n$ são valores constantes obtidos a partir dos valores conhecidos s_i, $i = 0, \ldots, n$. Obtemos então o seguinte sistema

$$\left\{ \begin{array}{rcl} a_1(k_{11}, \ldots, k_{mn}) & = & b_1 \\ a_2(k_{11}, \ldots, k_{mn}) & = & b_2 \\ \vdots & & \\ a_n(k_{11}, \ldots, k_{mn}) & = & b_n \end{array} \right. \tag{A.12}$$

com n equações e $m \cdot n$ incógnitas $k_{11}, \ldots, k_{mn}$.

Segundo, para que $E_F + E_G K = 0$ seja satisfeita precisamos também encontrar a solução para a seguinte sistema

$$
\begin{cases}
E_{f_{11}} + E_{g_{11}}k_{11} + E_{g_{12}}k_{21} + \ldots + E_{g_{1m}}k_{m1} & = & 0 \\
\vdots & \vdots & \vdots \\
E_{f_{1n}} + E_{g_{11}}k_{1n} + E_{g_{12}}k_{2n} + \ldots + E_{g_{1m}}k_{mn} & = & 0 \\
E_{f_{21}} + E_{g_{21}}k_{11} + E_{g_{22}}k_{21} + \ldots + E_{g_{2m}}k_{m1} & = & 0 \\
\vdots & \vdots & \vdots \\
E_{f_{2n}} + E_{g_{21}}k_{1n} + E_{g_{22}}k_{2n} + \ldots + E_{g_{2m}}k_{mn} & = & 0 \\
\vdots & \vdots & \vdots \\
E_{f_{l1}} + E_{g_{l1}}k_{11} + E_{g_{l2}}k_{21} + \ldots + E_{g_{lm}}k_{m1} & = & 0 \\
\vdots & \vdots & \vdots \\
E_{f_{ln}} + E_{g_{l1}}k_{1n} + E_{g_{l2}}k_{2n} + \ldots + E_{g_{lm}}k_{mn} & = & 0
\end{cases}
\tag{A.13}
$$

composto por $n \cdot l$ equações e $m \cdot n$ incógnitas.

Considerando que as incógnitas $(k_{11}, \ldots, k_{mn})$ devem satisfazer ao mesmo tempo as exigências (A.12) e (A.13), temos o sistema

$$
\begin{cases}
a_1(k_{11}, \ldots, k_{mn}) & = & b_1 \\
\vdots & \vdots & \vdots \\
a_n(k_{11}, \ldots, k_{mn}) & = & b_n \\
E_{f_{11}} + E_{g_{11}}k_{11} + E_{g_{12}}k_{21} + \ldots + E_{g_{1m}}k_{m1} & = & 0 \\
\vdots & \vdots & \vdots \\
E_{f_{1n}} + E_{g_{11}}k_{1n} + E_{g_{12}}k_{2n} + \ldots + E_{g_{1m}}k_{mn} & = & 0 \\
E_{f_{21}} + E_{g_{21}}k_{11} + E_{g_{22}}k_{21} + \ldots + E_{g_{2m}}k_{m1} & = & 0 \\
\vdots & \vdots & \vdots \\
E_{f_{2n}} + E_{g_{21}}k_{1n} + E_{g_{22}}k_{2n} + \ldots + E_{g_{2m}}k_{mn} & = & 0 \\
\vdots & \vdots & \vdots \\
E_{f_{l1}} + E_{g_{l1}}k_{11} + E_{g_{l2}}k_{21} + \ldots + E_{g_{lm}}k_{m1} & = & 0 \\
\vdots & \vdots & \vdots \\
E_{f_{ln}} + E_{g_{l1}}k_{1n} + E_{g_{l2}}k_{2n} + \ldots + E_{g_{lm}}k_{mn} & = & 0
\end{cases}
\tag{A.14}
$$

com $n \cdot (l+1)$ equações e $m \cdot n$ incógnitas.

Suponha que as matrizes do Sistema (A.9) sejam tais que suas dimensões satisfaçam $m \geq (l+1)$, isto é, $0 < l \leq (m-1) \leq n$. Dessa maneira, o sistema de equações (A.14) é composto por um número de incógnitas maior que o de equações. É mais razoável esperar, apesar de não ser garantido, que o sistema (A.14) venha admitir, nestas condições, uma solução satisfazendo (i) e (ii) devido a quantidade de graus de liberdade.

Esperamos em um estudo posterior explorar profundamente estes aspectos e formular um resultado que forneça condições suficientes, associadas à dimensão das matrizes de incertezas, para a aplicabilidade do regulador robusto recursivo projetado neste trabalho.

APÊNDICE B

Análise Matricial - Alguns Resultados

Este apêndice tem o propósito de apresentar, sem demonstrações, alguns conceitos e resultados da análise matricial que foram utilizados no desenvolvimento deste trabalho. Dada a forma de apresentação do conteúdo, assumimos que o leitor tenha familiaridade com conceitos básicos de álgebra linear. Dessa maneira, este apêndice será útil ao leitor somente como uma consulta rápida durante a leitura do trabalho. As demonstrações dos resultados mencionados podem ser encontradas, quase que na totalidade, nas referências citadas.

B.1 Inversão de Matrizes

Lema B.1.1. *[34] Sejam $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $B \in \mathbb{R}^{n\times m}$, $C \in \mathbb{R}^{m\times m}$ e $D \in \mathbb{R}^{m\times n}$. Suponha que A, C, $(A + BCD)$ e $(C^{-1} + DA^{-1}B)$ sejam não-singulares. Então*

$$(A + BCD)^{-1} = A^{-1} - A^{-1}B(C^{-1} + DA^{-1}B)^{-1}DA^{-1}. \tag{B.1}$$

Lema B.1.2. *[12] Suponha A, C, $(A + BC^{-1}D)$ e $(C + DA^{-1}B)^{-1}$ invertíveis. Então é válida a seguinte relação*

$$(A + BC^{-1}D)^{-1}BC^{-1} = A^{-1}B(C + DA^{-1}B)^{-1}. \tag{B.2}$$

B.2 Matrizes Particionadas e Complemento de Schur

Definição B.2.1. *[45] Sejam $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ uma matriz não-singular, $B \in \mathbb{R}^{n\times m}$, $C \in \mathbb{R}^{m\times n}$, $D \in \mathbb{R}^{m\times m}$ e $M \in \mathbb{R}^{(n+m)\times(n+m)}$ a matriz particionada definida por*

$$M := \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}. \tag{B.3}$$

A matriz $D - CA^{-1}B$ denotada por (M/A) é chamada de complemento de Schur de A em M. Similarmente, se D é não-singular, o complemento de Schur de D em M é definido por $(M/D)= A - BD^{-1}C$.

Lema B.2.1. *[45] (Fórmula da diagonalização de Aitken) Seja M uma matriz particionada dada por*

$$M := \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \tag{B.4}$$

e suponha A não-singular. Então,

$$\begin{bmatrix} I & 0 \\ -CA^{-1} & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & -A^{-1}B \\ 0 & I \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & (M/A) \end{bmatrix}. \tag{B.5}$$

Lema B.2.2. *[45] (Fórmula da aditividade do posto de Guttman) Seja M uma matriz particionada dada por*

$$M := \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}. \tag{B.6}$$

Então, posto$(M) =$ posto$(A) +$ posto(M/A).

Lema B.2.3. *[45] Seja M uma matriz particionada dada por*

$$M := \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}. \tag{B.7}$$

(i) - Suponha que A e M sejam não-singulares. Então (M/A) é não-singular e

$$M^{-1} = \begin{bmatrix} I & -A^{-1}B \\ 0 & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A^{-1} & 0 \\ 0 & (M/A)^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & 0 \\ -CA^{-1} & I \end{bmatrix}. \tag{B.8}$$

(ii) - Suponha que D e M sejam não-singulares. Então (M/D) é não singular e

$$M^{-1} = \begin{bmatrix} I & 0 \\ -D^{-1}C & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (M/D)^{-1} & 0 \\ 0 & D^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & -BD^{-1} \\ 0 & I \end{bmatrix}. \tag{B.9}$$

Lema B.2.4. *[45] (Fórmula da Inversão de Banachiewicz) Seja M uma matriz particionada dada por*

$$M := \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}. \tag{B.10}$$

(i) - Suponha que A e M sejam não-singulares. Então (M/A) é não-singular e

$$M^{-1} = \begin{bmatrix} A^{-1} + A^{-1}B(M/A)^{-1}CA^{-1} & -A^{-1}B(M/A)^{-1} \\ -(M/A)^{-1}CA^{-1} & (M/A)^{-1} \end{bmatrix}. \tag{B.11}$$

(ii) - Suponha que D e M sejam não-singulares. Então (M/D) é não singular e

$$M^{-1} = \begin{bmatrix} (M/D)^{-1} & -(M/D)^{-1}BD^{-1} \\ -D^{-1}C(M/D)^{-1} & D^{-1} + D^{-1}C(M/D)^{-1}BD^{-1} \end{bmatrix}. \tag{B.12}$$

Lema B.2.5. *[12] Sejam $R \in \mathbb{R}^{n\times n}$ uma matriz não singular e $A \in \mathbb{R}^{n\times m}$ uma matriz posto coluna pleno. Então:*

(i) - a matriz $(A^T R^{-1} A)$ é invertível.

(ii) - a matriz $\begin{bmatrix} R & A \\ A^T & 0 \end{bmatrix}$ é invertível.

Além disso, são válidas as seguintes identidades:

$$(A^T R^{-1} A)^{-1} = -\begin{bmatrix} 0 & I_m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} R & A \\ A^T & 0 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ I_m \end{bmatrix} \tag{B.13}$$

$$(A^T R^{-1} A)^{-1} A^T R^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & I_m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} R & A \\ A^T & 0 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} I_n \\ 0 \end{bmatrix} \tag{B.14}$$

$$R^{-1} A (A^T R^{-1} A)^{-1} = \begin{bmatrix} I_n & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} R & A \\ A^T & 0 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ I_m \end{bmatrix}. \tag{B.15}$$

B.3 Matrizes Semidefinidas e Definidas Positivas

Definição B.3.1. *[19] Uma matriz simétrica $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ é dita definida positiva ($A \succ 0$) se $x^T Ax > 0, \forall x \in \mathbb{R}^n$. Se $x^T Ax \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}^n$ então A é dita semidefinida positiva ($A \succeq 0$). Similarmente, os termos definida negativa e semidefinida negativa podem ser estabelecidos a partir da reversão das desigualdades nas definições de definida positiva e semidefinida positiva. Caso a matriz simétrica A não se encaixe em nenhuma das definições acima, então ela é dita indefinida.*

Lema B.3.1. *[19] Seja $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ definida positiva. Se $C \in \mathbb{R}^{n\times m}$, então $C^T AC$ é semidefinida positiva. E mais, posto$(C^T AC)$ = posto(C), de modo que $C^T AC$ é definida positiva se e somente se posto$(C) = m$.*

Lema B.3.2. *[19] Seja $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ simétrica não-singular. A matriz A é definida positiva se e somente se A^{-1} é definida positiva.*

Teorema B.3.1. *[13] Uma matriz $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ simétrica é definida positiva (semidefinida positiva) se e somente se qualquer uma das seguintes condições valem:*

(i) - todo autovalor de A é positivo (positivo ou zero).

(ii) - existe uma matriz $N \in \mathbb{R}^{n\times n}$ não-singular (uma matriz $N \in \mathbb{R}^{n\times n}$ singular ou uma matriz $N \in \mathbb{R}^{m\times n}$ com $m < n$) tal que $M = N^T N$.

Lema B.3.3. *[45] Sejam $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ uma matriz não-singular, $B \in \mathbb{R}^{n\times m}$, $D \in \mathbb{R}^{m\times m}$ e $M \in \mathbb{R}^{(n+m)\times(n+m)}$ a matriz particionada simétrica dada por*

$$M := \begin{bmatrix} A & B \\ B^T & D \end{bmatrix}. \tag{B.16}$$

Então:

(i) - $M \succ 0$ se e somente se $A \succ 0$ e $(M/A) \succ 0$.

(ii) - $M \succeq 0$ se e somente se $A \succ 0$ e $(M/A) \succeq 0$.

Analogamente, podemos enunciar também

Lema B.3.4. *[45] Sejam $D \in \mathbb{R}^{n \times n}$ uma matriz não-singular, $B \in \mathbb{R}^{n \times m}$, $D \in \mathbb{R}^{m \times m}$ e $M \in \mathbb{R}^{(n+m)\times(n+m)}$ a matriz particionada simétrica dada por*

$$M := \begin{bmatrix} A & B \\ B^T & D \end{bmatrix}. \tag{B.17}$$

Então:

(i) - $M \succ 0$ se e somente se $D \succ 0$ e $(M/D) \succ 0$.

(ii) - $M \succeq 0$ se e somente se $D \succ 0$ e $(M/D) \succeq 0$.

Lema B.3.5. *[45] Sejam $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $B \in \mathbb{R}^{n \times m}$, $D \in \mathbb{R}^{m \times m}$ e $M \in \mathbb{R}^{(n+m)\times(n+m)}$ a matriz particionada simétrica dada por*

$$M := \begin{bmatrix} A & B \\ B^T & D \end{bmatrix}. \tag{B.18}$$

Considere $\mathcal{C}(A)$ e $\mathcal{C}(B)$ os espaços gerados pelas colunas das matrizes A e B, respectivamente. Dessa forma, $M \succeq 0$ se e somente se $A \succeq 0$, $\mathcal{C}(B) \subseteq \mathcal{C}(A)$ e $(M/A) \succeq 0$.

Lema B.3.6. *[26] Seja $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ definida positiva e $B \in \mathbb{R}^{n \times m}$ uma matriz posto coluna pleno. Então, a matriz*

$$\begin{bmatrix} A & B \\ B^T & 0 \end{bmatrix} \tag{B.19}$$

é invertível.

Lema B.3.7. *[33] Seja $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ semidefinida positiva e $B \in \mathbb{R}^{n \times m}$ uma matriz posto coluna pleno. Então, se $\begin{bmatrix} A & B \end{bmatrix}$ é posto linha pleno, a matriz*

$$\begin{bmatrix} A & B \\ B^T & 0 \end{bmatrix} \tag{B.20}$$

é invertível.

Definição B.3.2. *[19] Uma matriz $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ é uma raiz quadrada de B se $A^2 = B$.*

Teorema B.3.2. *[19] Sejam $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ semidefinida positiva e $k \geq 1$ um número inteiro dado. Então existe uma única matriz simétrica semidefinida positiva B tal que $B^k = A$.*

Observação B.3.1. *[19] A maior utilidade do teorema anterior é para $k = 2$. A única raiz* *quadrada (semi)definida positiva da matriz (semi)definida positiva A é geralmente denotada por $A^{\frac{1}{2}}$.*

B.4 Ordem Parcial de Matrizes Simétricas

Definição B.4.1. *[19] Sejam $A, B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ matrizes simétricas. Dizemos que $A \succeq B$ se a matriz $(A-B)$ é semidefinida positiva. Similarmente, $A \succ B$ significa que $(A-B)$ é definida positiva.*

Proposição B.4.1. *[19] Sejam $A, B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ matrizes simétricas.*

(i) - Se $A \succeq B$, então $T^T AT \succeq T^T BT$ para toda $T \in \mathbb{R}^{n\times m}$.

(ii) - Se $T \in \mathbb{R}^{n\times m}$ com $m \leq n$, temos que $A \succ B$ implica $T^T AT \succ T^T BT$ quando posto$(T) = m$.

Definição B.4.2. *[19] Seja $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Defina*

$$\rho(A) := max\left\{|\lambda| : \lambda \text{ é um autovalor de} A\right\}.$$

Denominamos $\rho(A)$ como o raio espectral da matriz A.

Teorema B.4.1. *[19] Sejam $A, B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ matrizes simétricas, e suponha que $A \succ 0$ e $B \succeq 0$. Então:*

(i) - $A \succeq B$ se e somente se $\rho(BA^{-1}) \leq 1$,

(ii) - $A \succ B$ se e somente se $\rho(BA^{-1}) < 1$.

Corolário B.4.1. *[19] Sejam $A, B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ matrizes simétricas definidas positivas. Então $A \succeq B$ se e somente se $B^{-1} \succeq A^{-1}$.*

B.5 Normas, Sequências e Séries de Matrizes

Definição B.5.1. *[19] Uma função $\|\bullet\| : \mathbb{R}^{n\times n} \to \mathbb{R}$ é definida como norma matricial se para todas as matrizes $A, B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ ela satisfaz os seguintes axiomas:*

(i) - $\|A\| \geq 0$;

(ii) - $\|A\| \geq 0 \Leftrightarrow A = 0$;

(iii) - $\|cA\| = |c|\|A\|$, *para todo* $c \in \mathbb{C}$;

(iv) - $\|A + B\| \leq \|A\| + \|B\|$;

(v) - $\|AB\| \leq \|A\|\|B\|$.

Definição B.5.2. *[19] A norma espectral* $\| \bullet \|_2 : \mathbb{R}^{n \times n} \rightarrow \mathbb{R}$ *é definida como*

$$\|A\|_2 := \{\sqrt{\lambda} : \lambda \, \text{é um autovalor de} \, A^T A\}. \tag{B.21}$$

Teorema B.5.1. *[19] Seja* $\| \bullet \|$ *qualquer norma matricial. Se* $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, *então* $\rho(A) \leq \|A\|$.

Lema B.5.1. *[19] Sejam* $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ *e* $\epsilon > 0$ *dados. Então existe uma norma matricial* $\| \bullet \|$ *tal que* $\rho(A) \leq \|A\| \leq \rho(A) + \epsilon$.

Observação B.5.1. *[19] Note que se* $\rho(A) < 1$ *então pelo Lema B.5.1 existe uma norma matricial* $\| \bullet \|$ *tal que* $\|A\| < 1$.

Lema B.5.2. *[19] Seja* $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ *uma matriz dada. Se existe uma norma matricial* $\| \bullet \|$ *tal que* $\|A\| < 1$, *então* $\lim_{k \rightarrow +\infty} A^k = 0$, *isto é, todas as entradas de* A^k *tendem a zero quando* $k \rightarrow +\infty$.

Definição B.5.3. *[19] Dada* $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, *a sequência de matrizes* $\{A^k\}_{k=0}^{+\infty}$ *tais que* $\lim_{k \rightarrow +\infty} A^k = 0$ *é chamada de convergente.*

Teorema B.5.2. *[19] Seja* $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$. *A sequência* $\{A^k\}_{k=0}^{+\infty}$ *é convergente se e somente se* $\rho(A) < 1$.

B.6 Derivadas Fundamentais

Lema B.6.1. *[34] Sejam* $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ *qualquer e* $x, y \in \mathbb{R}^n$ *quaisquer. Então:*

(i) - $\dfrac{\partial}{\partial x}(y^T x) = y$;

(ii) - $\dfrac{\partial}{\partial x}(x^T A x) = Ax + A^T x$.

Se A é simétrica então $\frac{\partial}{\partial x}(x^T A x) = 2Ax$.

Lema B.6.2. *[34] Sejam* $A \in \mathbb{R}^{n \times m}$, $x \in \mathbb{R}^n$ *e* $y \in \mathbb{R}^m$ *quaisquer. Então:*

(i) - $\dfrac{\partial}{\partial x}(x^T A y) = Ay$;

(ii) - $\dfrac{\partial}{\partial y}(x^T A y) \;=\; A^T x.$

B.7 Equação de Stein

Teorema B.7.1. *[24] Sejam $A \in \mathbb{R}^{m\times m}$, $B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ e $\Gamma \in \mathbb{R}^{n\times m}$. A equação de Stein*

$$S \,-\, BSA = \Gamma \tag{B.22}$$

admite uma única solução se e somente se $\lambda_a\lambda_b \neq 1$ para todo λ_a e λ_b autovalores de A e B, respectivamente.