

Realimentação de Estado

Profa. Vilma A. Oliveira
USP São Carlos
Junho de 2017

Sumário

1. Introdução.....	1
2. Realimentação de estado.....	2
3. Posicionamento de polos	2
3.1 <i>Caso SISO</i>	3
Fórmula de Ackerman	4
3.2 <i>Caso MIMO</i>	5
3.2.1 Posicionamento via transformação A em matriz cíclica.....	5
3.2.2 Posicionamento via forma canônica controlável multivariável	5
4. Atribuição de auto-estrutura.....	6
4.1. <i>Desacoplamento de sistemas lineares via atribuição de auto-estrutura</i>	7
4.1.1 Decomposição modal	7
5. Regulador linear quadrático.....	9
5.1 <i>Formulação do problema do regulador quadrático</i>	9
5.2 <i>Problema de horizonte finito: equação matricial de Riccati</i>	10
5.3 <i>Problema LQR de estado estacionário</i>	11
5.4 <i>Margens de estabilidade do regulador</i>	13
5.4.1 Robustez de estabilidade	13
5.5 <i>Análise de estabilidade e síntese de controladores usando LMIs</i>	15
5.5.1 O complemento de Schur	17
5.6 <i>D-Estabilidade</i>	17
6. Observador de estado de ordem completa	18
6.1 <i>Controlador baseado em observador</i>	19

1. Introdução

Um problema de interesse e importância em controle é modificar um dado sistema visando melhorar o seu comportamento dinâmico. A representação espaço de estado de sistemas introduziu o conceito de estado interno ao sistema e permitiu o desenvolvimento de técnicas de controle multivariável no domínio do tempo. A técnica de controle que utiliza realimentação de estado pode ser utilizada para atingir as características de desempenho desejadas. O problema mais básico da teoria de controle no domínio do tempo é a seleção da lei de controle a

realimentação de estado que minimize um índice quadrático de desempenho para sistemas lineares. Este é chamado regulador quadrático linear (LQR, do inglês).

O caso de sistemas com múltiplas-entradas e múltiplas-saídas (MIMO, do inglês) e o caso uma entrada uma saída (SISO, do inglês) são tratados a seguir.

Referências utilizadas

C. T. Chen (1999). *Linear System Theory and Design*. Oxford University Press, New York.

Peter Dorato (1995), *Linear-Quadratic Control: An Introduction*. Prentice Hall, Englewood Cliffs.

Skogestad, S., Postlethwaite I., *Multivariable Feedback Control: Analysis and Design*, John Wiley & Sons, 2005.

2. Realimentação de estado

Seja a representação espaço de estado (A,B,C) onde a matriz do sistema D é zerada por razões de simplicidade.:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + Bu, \\ y &= Cx \end{aligned} \quad (1)$$

com $A \in R^{n \times n}$, $B \in R^{n \times m}$, $C \in R^{p \times n}$ e (A,B) controlável. O polinômio característico de A é

$$\Delta(s) := \det(sI - A) = s^n + \alpha_n s^{n-1} + \dots + \alpha_1, \text{ com } \alpha_i \text{ real.}$$

Considere a lei de realimentação:

$$u = -K_c x + v \quad (2)$$

onde

$K_c \in R^{m \times n}$ e $v \in R^m$, a matriz de realimentação e v a nova entrada do sistema.

3. Posicionamento de polos

Problema: Obter K tal que o polinômio característico do sistema realimentado tenha as raízes desejadas.

As equações do sistema realimentado podem ser obtidas substituindo a lei de controle no sistema a malha aberta:

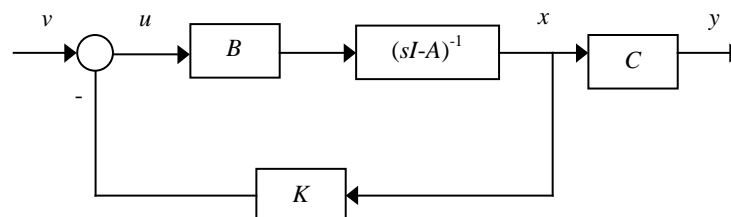
$$\begin{aligned} \dot{x} &= (A - BK_c)x + Bv \\ y &= Cx \end{aligned} \quad (3)$$

A matriz $A - BK_c$ gera o polinômio característico do sistema realimentado.

Pode-se mostrar que para qualquer polinômio mônico:

$$\pi(s) := s^n + \pi_n s^{n-1} + \dots + \pi_1 \quad (4)$$

existe uma matriz de realimentação de estado K se e só se (A,B) for controlável. O sistema de controle com $u = -Kx + v$ é mostrado abaixo na forma de diagrama de blocos.



3.1 Caso SISO

Teorema: Se e somente se (A,b,c) for controlável, então existe uma transformação de equivalência $z = Px$, P não singular tal que o sistema equivalente $(\bar{A}, \bar{b}, \bar{c})$ esteja na forma controlável:

$$\dot{z} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & 0 & 0 & 0 & 1 \\ -a_n & -a_{n-1} & \cdots & -a_2 & -a_1 \end{bmatrix} z + \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} u \quad (5)$$

$$y = [b_n \quad \cdots \quad b_1] z$$

onde os a s são os coeficientes do polinômio característico de A e os b s são computados de (A,b,c) .

Verificação. Usando a suposição de controlabilidade a matriz $U = [b \quad Ab \quad A^2b \quad \cdots \quad A^{n-1}b]$ é não singular e portanto existe um vetor linha h o qual é solução da seguinte equação linear

$$hU = h[b \quad Ab \quad A^2b \quad \cdots \quad A^{n-1}b] = [hb \quad hAb, \cdots, hA^{n-1}b] = [0 \quad \cdots \quad 0 \quad 1]$$

que é

$$h = [0 \quad \cdots \quad 0 \quad 1]U^{-1}.$$

Seja

$\det(sI - A) = s^n + \alpha_n s^{n-1} + \cdots + \alpha_1$ o polinômio característico da matriz A . Do Teorema de Cayley-Hamilton que diz que $A^n + \alpha_n A^{n-1} + \cdots + \alpha_2 A + \alpha_1 I = 0$ temos

$$A^n = -\alpha_n A^{n-1} - \cdots - \alpha_2 A - \alpha_1 I. \text{ Defina uma matriz não singular } P$$

$$P = \begin{bmatrix} h \\ hA \\ \vdots \\ hA^{n-1} \end{bmatrix}. \text{ Para mostrar que } P \text{ é não singular verifique que } N = PU \text{ abaixo é não singular.}$$

$$N = PU = \begin{bmatrix} h \\ hA \\ \vdots \\ hA^{n-1} \end{bmatrix} [b \quad Ab \quad A^2b \quad \cdots \quad A^{n-1}b] = \begin{bmatrix} hb & hAb & \cdots & hA^{n-1}b \\ hAb & hA^2b & \cdots & hA^n b \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ hA^{n-1}b & hA^n b & \cdots & hA^{2n-2}b \end{bmatrix} \text{ desde que pela definição}$$

da escolha de hU tem-se:

$$hA^i b = 0, \quad 0 \leq i \leq n-2$$

$$hA^{n-i} b = 1$$

Uma vez que U é não singular por suposição, $P = NU^{-1}$ é também não singular e $z = Px, z \in \mathbb{R}^n$ é uma mudança de coordenadas. Na coordenada z temos

$$\begin{aligned} \dot{z}_1 &= h\dot{x} = hAx + hbu = hAx = z_2 \\ &\vdots \\ \dot{z}_{n-1} &= hA^{n-2}\dot{x} = hA^{n-1}x + hA^{n-2}bu = hA^{n-1}x = z_n \\ \dot{z}_n &= hA^n x + hA^{n-1}bu = hA^n x + u = h(-a_{n-1}A^{n-1} - \dots - a_2A - a_1I)x + u \\ &= -a_n z_n - \dots - a_2 z_2 - a_1 z_1 + u \end{aligned}$$

E então chega-se à forma canônica facilmente. A necessidade pode ser mostrada por contradição e não será apresentada.

Comandos do Matlab:

```
% testando a controlabilidade
C=ctrb(A,B);
Rank(C)
O=obsv(A,C);
Rank(O)
% Posicionamento de pólos: obtenção de matriz de ganho Kc.
Kc=place(A,B,p) p é o vetor de autovalores desejados.
Kc=acker(A,B,P)
```

Algoritmo (Chen, 1999)

Dado um sistema (A,b,c) controlável e um conjunto de autovalores $\{\bar{\lambda}_i\}, i = 1, \dots, n$, encontrar um vetor real K_c , $1 \times n$ tal que a matriz $A - bK_c$ possua o conjunto de autovalores $\{\bar{\lambda}_i\}, i = 1, \dots, n$.

1. Obter polinômio característico de A : $\det(sI - A) = s^n + a_1s^{n-1} + \dots + a_n$
2. Calcular $\prod_{i=1}^n (s - \bar{\lambda}_i) = s^n + \bar{a}_1s^{n-1} + \dots + \bar{a}_n$
3. Calcular $\bar{K}_c := [a_n - \bar{a}_n \quad a_{n-1} - \bar{a}_{n-1} \quad \dots \quad a_1 - \bar{a}_1] :=$
4. Construir $Q = UA$ onde

$$U := [B \quad AB \quad A^2B \quad \dots \quad A^{n-1}B] \quad \text{e} \quad \Lambda = \begin{bmatrix} a_{n-1} & a_{n-2} & \dots & a_1 & 1 \\ a_{n-2} & a_{n-3} & \dots & 1 & 0 \\ \vdots & \vdots & \dots & 0 & 0 \\ a_1 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

5. Obter $P := Q^{-1}$

6. Calcular $K_c = \bar{K}_c P$

Fórmula de Ackerman

(Franklin and Powell, 1996)

$$K_c = e^T U^{-1} \Delta^D(A)$$

onde

$$e = [0 \quad \dots \quad 0 \quad 1]^T;$$

U a matriz de controlabilidade; $\Delta^D(A)$ o polinômio característico desejado calculado em A ; uma matriz polinomial $n \times n$:

$$\Delta^D(A) = A^n + \bar{a}_1 A^{n-1} + \dots + \bar{a}_n I$$

3.2 Caso MIMO

Seja a representação espaço de estado (A,B,C) :

$$\begin{aligned}\dot{x} &= Ax + Bu, \\ y &= Cx\end{aligned}$$

com $A \in R^{n \times n}$, $B \in R^{n \times m}$, $C \in R^{p \times n}$ e (A,B) controlável. E considere a lei de controle $u = -K_c x + v$ com K uma matriz $m \times n$.

3.2.1 Posicionamento via transformação A em matriz cíclica

O problema MIMO é convertido no caso SISO baseando-se na propriedade de ciclicidade de uma matriz. Uma matriz A é cíclica se existir um vetor b $1 \times n$ tal que $b, Ab, \dots, A^{n-1}b$ gera o espaço n -dimensional ou equivalentemente (A,b) é controlável. Os três teoremas abaixo fornecem um procedimento de projeto.

Teorema: Se (A,B) for controlável e A cíclica então para quase todo vetor v $m \times 1$ o par (A,Bv) é controlável.

Teorema: Se (A,B) for controlável então para quase todo vetor K_c $m \times n$ todos os autovalores de $(A-BK_c)$ são distintos e $(A-BK_c)$ é cíclica.

Teorema: Se (A,B) for controlável utilizando a lei de controle $u = -K_c x + v$, K $m \times n$ real, os autovalores de $(A-BK_c)$ podem ser arbitrariamente selecionados dado que os autovalores complexos apareçam em pares.

Verificação: Suponha A não cíclica. Introduza $u = w - K_1 x$ tal que $\bar{A} = A + BK_1$ seja cíclica:

$$\dot{x} = (A + BK_1)x + Bw \tag{6}$$

e portanto, (\bar{A}, Bv) é controlável. Pode-se fazer: $w = r - K_2 x$ com $K_2 = vk$, k vetor $1 \times n$:

$$\dot{x} = (\bar{A} + BK_2)x + Br = (\bar{A} + Bvk)x + Br \tag{7}$$

E o problema resume-se em obter k para posicionar autovalores uma vez que (\bar{A}, Bv) é controlável. A lei de controle fica:

$$u = w - K_1 x \text{ e } w = r - K_2 x \tag{8}$$

ou, equivalentemente

$$u = r - [K_1 + K_2]x \tag{9}$$

3.2.2 Posicionamento via forma canônica controlável multivariável

O par (A,B) é colocado na forma canônica controlável e associa-se a cada bloco da forma canônica o polinômio desejado correspondente.

Ilustrativos comandos do Matlab:

$C=ctrb(A,B);$
 $O=obsv(A,C)$
 $K_c=place(A,B,P):$ P é o vetor de autovalores desejados
 $K_c=acker(A,B,P)$

4. Atribuição de auto-estrutura

Diferente do problema de posicionamento de polos onde apenas os autovalores desejados são selecionados, a atribuição de uma auto-estrutura ao sistema realimentado pode até certo ponto também atribuir autovetores ao sistema realimentado (Lewis, 1992). Suponha que a matriz B do sistema (A,B,C) tenha posto completo.

Problema: Selecionar K_c de forma que um autovalor λ_i e o autovetor associado v_i desejados sejam atribuídos ao sistema realimentado.

Suponha que λ_i não seja autovalor da matriz A do sistema e que exista $u_i \in R^m$ tal que

$$\begin{bmatrix} \lambda_i I - A & B \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_i \\ u_i \end{bmatrix} = 0 \quad (10)$$

Escolha K_c tal que $K_c v_i = u_i$. Substituindo em (10) pode-se escrever:

$$\begin{aligned} (\lambda_i I - A)v_i + B u_i &= [\lambda_i I - (A - B K_c)]v_i \\ &= 0 \end{aligned} \quad (11)$$

E, então, v_i passa a ser um autovetor do sistema realimentado para o autovalor λ_i .

O raciocínio acima pode ser estendido para os n autovalores e autovetores associados desejados definindo-se:

$$K_c [v_1 \quad \dots \quad v_n] = [u_1 \quad \dots \quad u_n] \quad (12)$$

ou, equivalentemente

$$K_c V = U \quad (13)$$

para matrizes U e V definidas de acordo. Defina $J = diag\{\lambda_i\}$ e a equação acima pode ser rescrita como:

$$\lambda_i v_i - A v_i + B u_i = 0, i = 1, \dots, n$$

ou, na forma matricial

$$AV - VJ = BU \quad (14)$$

Esta equação é chamada equação matricial de Sylvester. Portanto, se J e V forem fornecidos a equação de Sylvester pode ser solucionada em U e então K pode ser obtido pela equação:

$$K_c = UV^{-1}. \quad (15)$$

Pontos importantes do projeto:

1. O conjunto de autovetores desejados $\{v_i\}$ são linearmente independentes, uma vez que os autovetores do sistema realimentado devem ser linearmente independentes.

2. O conjunto de autovalores desejados $\{\lambda_i\}$ deve ser selecionado de forma que os autovalores complexos ocorram em pares conjugados. Ainda, se v_i for um autovetor associado a um autovalor complexo, v_i^* deve ser escolhido para corresponder a λ_i^* .
3. Ambos λ_i e v_i não podem ser arbitrariamente selecionados, p. e., dado um λ_i tem-se:

$$\begin{aligned} v_i &= (\lambda_i I - A)^{-1} B u_i \\ &= 0, i = 1, \dots, n \end{aligned}$$

portanto, para existir u_i tem-se que $v_i \in \text{imagem}(\lambda_i I - A)^{-1} B$

4. Uma vez que assume-se que B possui posto completo, m , $(\lambda_i I - A)^{-1} B$ também possui posto m . Então, $v_i \in R^m$, um subespaço m -dimensional dependente da escolha de λ_i . Portanto, para um dado λ_i existem m graus de liberdade para escolher v_i .

4.1. Desacoplamento de sistemas lineares via atribuição de auto-estrutura

A utilização imediata da atribuição de auto-estrutura ao sistema realimentado é no desacoplamento de sistemas multivariáveis. Um sistema multivariável é dito ser desacoplado se certas entradas afetam somente certos grupos de estados ou saídas. A possibilidade de desacoplamento está relacionada com a controlabilidade do sistema e com o número de entradas da planta. A seguir decomposição modal é apresentada para ilustrar como selecionar os autovetores para separar o efeito das entradas nos estados ou saídas.

4.1.1 Decomposição modal

Denotando por J a forma de Jordan da matriz A do sistema, pode-se escrever

$$\begin{aligned} A &= QJQ^{-1} \\ e^{At} &= Qe^{Jt}Q^{-1} \end{aligned} \tag{16}$$

com $Q = [v_1 \ v_2 \ \dots \ v_n]$ uma base formada pelos autovetores de A . Assim, a solução de (A, B, C) pode ser escrita como:

$$\begin{aligned} x(t) &= e^{At}x(0) + \int_0^t e^{A(t-\tau)}Bu(\tau)d\tau \\ &= Qe^{Jt}Q^{-1}x(0) + \int_0^t Qe^{J(t-\tau)}Q^{-1}Bu(\tau)d\tau \end{aligned} \tag{17}$$

Inicialmente, considere o primeiro termo de (17) (supondo que a matriz A admita uma forma diagonal):

$$\begin{aligned} x(t) &= [v_1 \ v_2 \ \dots \ v_n] \begin{bmatrix} e^{\lambda_1 t} & & & \\ & e^{\lambda_2 t} & & \\ & & \ddots & \\ & & & e^{\lambda_n t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_1^T \\ w_2^T \\ \vdots \\ w_n^T \end{bmatrix} x(0) \\ &= \sum_{i=1}^n v_i e^{\lambda_i t} w_i^T x(0) \end{aligned} \tag{18}$$

Uma vez que $w_i^T x(0)$ é escalar, pode-se escrever

$$x(t) = \sum_{i=1}^n w_i^T x(0) e^{\lambda_i t} v_i.$$

Similarmente, tem-se:

$$\begin{aligned} x(t) &= \sum_{i=1}^n (w_i^T x(0)) e^{\lambda_i t} v_i + \sum_{i=1}^n v_i \int_0^t e^{\lambda_i(t-\tau)} w_i^T B u(\tau) d\tau \\ y(t) &= \sum_{i=1}^n (w_i^T x(0)) e^{\lambda_i t} C v_i + \sum_{i=1}^n C v_i \int_0^t e^{\lambda_i(t-\tau)} w_i^T B u(\tau) d\tau \end{aligned} \quad (19)$$

A solução do sistema foi decomposta em uma soma de termos na direção dos autovetores v_i . Cada termo é uma exponencial da forma $e^{\lambda_i t}$. Esta decomposição da solução em uma soma de termos da forma $e^{\lambda_i t}$ é chamada decomposição modal. Uma vez que $\{v_i\}$ and $\{w_i\}$ são bases recíprocas, o escalar $w_i^T x(0)$ é a decomposição da condição inicial na direção de v_i . Por outro lado, $w_i^T B$ mapeia a entrada u na direção do autovetor v_i ; i.e., $w_i^T B u$ representa a influência da entrada no modo de λ_i . A influência do modo $e^{\lambda_i t}$ na saída y é representada por $C v_i$. Assim, a decomposição modal decompõe a entrada e condições iniciais em termos que excitam separadamente os modos $e^{\lambda_i t}$.

Observabilidade implica que $C v_i \neq 0$ para todo i o que garante todos os modos aparecendo independentemente na saída. Controlabilidade significa que $w_i^T B \neq 0$ para todo i o que garante todos os modos sendo influenciados pela entrada independentemente.

Portanto, a escolha de direções de autovetores associados a autovalores pode ser realizada de forma a desacoplar entradas e saída dos estados.

Exemplo (atribuição de auto-estrutura em desacoplamento)

Considere a planta:

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} u$$

Os polos do sistema são:

$$\begin{aligned} s_{12} &= -0.5 \pm j0.8 \\ s_{34} &= -1.5 \pm j0.8 \end{aligned}$$

Pede-se: Obter a lei de controle $u = -K_c x + r$ para desacoplar a entrada r_1 dos estados x_2 e x_4 e a entrada r_2 dos estados x_1 e x_3 . Escolha os polos do sistema realimentado como:

$$\begin{aligned} \lambda_{12} &= -1.5 \pm j1.5 \\ \lambda_{34} &= -1.0 \pm j0.5 \end{aligned}$$

Solução: Para associar λ_{12} com as variáveis de estado x_1 e x_3 e desacoplar a entrada r_1 das outras variáveis de estado escolha os autovetores:

$$v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} + j \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \text{ e } v_2 = v_1^*$$

Assim, a saída ficou restrita à uma direção no espaço de estado que não envolve x_2 e x_4 . Similarmente, associe λ_{34} com as variáveis de estado x_2 e x_4 e desacople a entrada r_2 das outras variáveis de estado. Escolha os autovetores:

$$v_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + j \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \text{ e } v_4 = v_3^*$$

A partir daqui solucione a equação matricial de Sylvester em U: $AV - VJ = BU$ e encontre $K_c = UV^{-1}$.

Observação: Nem sempre existe uma solução U dado J e V . Mas, pode-se achar uma solução para U e V' , onde V' é o mais próximo possível no sentido dos mínimos quadrados de V .

5. Regulador linear quadrático

A teoria de controle linear quadrático fornece uma ferramenta analítica para o projeto de controladores multivariáveis. O problema foi primeiro tratado por Wiener nos anos 40 com trabalhos em filtragem pelo método da média quadrática, referenciado como problema de controle de média quadrática. O nome regulador quadrático linear (LQR, do inglês) só aparece na literatura no final da década de 50 com Kalman. O problema básico envolvido é a obtenção de uma lei de controle de realimentação de estado que minimize uma função custo.

5.1 Formulação do problema do regulador quadrático

Seja o sistema linear invariante no tempo (A,B,I,0)

$$\dot{x} = Ax + Bu, \quad x(0) = x_0$$

com $x \in R^n$, $u \in R^m$ e (A,B) estabilizável e a lei de realimentação de estado:

$$u = -K_c x$$

onde $K \in R^{m \times n}$ é a chamada matriz de realimentação de estado. Substituindo a lei de realimentação de estado no sistema (A,B,C) tem-se

$$\begin{aligned} \dot{x} &= (A - BK_c)x, \\ y &= Cx \end{aligned} \tag{20}$$

Problema: Obter $u(\cdot)$, uma função contínua por partes em R , que minimiza a função de custo quadrática $J(x_0, u)$ associada ao sistema (A,B,I,0):

$$J(x_0, u) = \int_0^T (x^T Q x + u^T R u) dt + x^T(T) M x(T) \tag{21}$$

onde $Q \geq 0$, $M \geq 0$, $R > 0$ são matrizes de ponderação e $x(\cdot)$ solução de (A,B,I,0) em resposta à lei de controle $u(\cdot)$ e condição inicial x_0 ; T é fixo e $x(T)$ livre.

Princípio de otimalidade: Se $u^*(\tau)$ é ótimo no intervalo $[t, T]$, iniciando em $x(t)$, então $u^*(\tau)$ é necessariamente ótimo no subintervalo $[t + \delta t, T]$ para qualquer δt tal que $T - \delta \geq \delta t > 0$

Seja

$$J^*(x, t) = \min_{u[t, T]} \left\{ \int_t^T (x' Q x + u' R u) d\tau + x^T(T) M x(T) \right\} \text{ custo mínimo para } x_0 = x \text{ e } t_0 = t$$

onde $*$ denota valor ótimo e $u[t, T]$ o sinal de controle no intervalo $[t, T]$.

Usando a propriedade de adição de integrais e o princípio de otimalidade temos:

$$J^*(x, t) = \min_{u[t, t + \delta t]} \left\{ \int_t^{t + \delta t} (x' Q x + u' R u) d\tau + J^*(x(t + \delta t), t + \delta t) \right\} \quad (22)$$

Note que para escrever a equação acima usamos o fato que o valor mínimo de J em (21) iniciando no estado $x(t + \delta t)$ no tempo $t + \delta t$ é dado por $J^*(x(t + \delta t), t + \delta t)$.

Note também que pelo princípio de otimalidade, o problema de obter um controle ótimo no intervalo $[t, T]$ foi reduzido ao problema de obter um controle ótimo no intervalo reduzido $[t, t + \delta t]$.

Uma vez que $\frac{dJ^*}{dt} = \frac{\partial J^*}{\partial t} \frac{dt}{dt} + \frac{\partial J^*}{\partial x} \frac{dx}{dt}$, expandindo $J^*(x(t + \delta t), t + \delta t)$ no ponto $(x(t), t)$ em série de Taylor tem-se:

$$J^*(x(t + \delta t), t + \delta t) = J^*(x, t) + \left[\frac{\partial J^*}{\partial t} \right]^T \delta t + \left[\frac{\partial J^*}{\partial x} \right]^T (x(t + \delta t) - x(t))$$

Agora, aproximando a integral em (9) por $(x^T Q x + u^T R u) \delta t$, com $x(t + \delta t) - x(t)$ aproximada por $(Ax + Bu) \delta t$, obtém-se

$$J^*(x, t) = \min_{u(t)} \left\{ (x^T Q x + u^T R u) \delta t + J^*(x, t) + \left[\frac{\partial J^*}{\partial t} \right]^T \delta t + \left[\frac{\partial J^*}{\partial x} \right]^T (Ax + Bu) \delta t \right\}.$$

No limite, quando $\delta t \rightarrow 0$ e com $J^*(x(t), T) = x^T(T) M x(T)$ obtém-se a **equação de Hamilton-Jacobi**

$$-\frac{\partial J^*}{\partial t} = \min_{u(t)} \left\{ x^T Q x + u^T R u + \left[\frac{\partial J^*}{\partial x} \right]^T (Ax + Bu) \right\} \quad (23)$$

sendo

$$J^*(x, T) = x^T M x, \forall x \text{ condição de contorno.}$$

5.2 Problema de horizonte finito: equação matricial de Riccati

A minimização pode ser feita calculando o gradiente relação a u do argumento em (23)

$$x^T Q x + u^T R u + \left[\frac{\partial J^*}{\partial x} \right]^T (Ax + Bu) \text{ e resolvendo para } u, \text{ o que fornece}$$

$$u^* = \frac{-1}{2} R^{-1} B^T \frac{\partial J^*}{\partial x} \quad (24)$$

Utilizou-se aqui $\frac{\partial}{\partial u} [(u^T R u) + B^T \frac{\partial J^*}{\partial x} u] = 2Ru + B^T \frac{\partial J^*}{\partial x}$.

Há necessidade aqui de conhecer a forma de $J^*(x, t)$. Sabe-se que a integral de uma forma quadrática para um sistema linear é quadrática na condição inicial. Assim, é razoável considerar a seguinte forma para $J^*(x, t)$

$$J^*(x, t) = x^T P(t)x; P(t) \text{ simétrica.}$$

O gradiente de $J^*(x, t)$ em relação a x é então $2P(t)x$. Substituindo o gradiente de $J^*(x, t)$ em relação a t na equação de Hamilton-Jacobi (23) e substituindo $u^* = \frac{-1}{2} R^{-1} B^T \frac{\partial J^*}{\partial x}$ fornece

$$-x^T \dot{P}(t)x = x^T (A^T P + PA - PBR^{-1}B^T P + Q)x \text{ (usando a identidade } 2x^T PAx = x^T (A^T P + PA)x).$$

A condição de contorno é dada por:

$$J^*(x, T) = x^T P(T)x = x^T Mx$$

Então, obtém-se a equação de Riccati e a condição de contorno:

$$\dot{P}(t) = A^T P + PA - PBR^{-1}B^T P + Q$$

$$P(T) = M$$

E, finalmente obtém-se a lei de controle ótimo em função de $P(t)$

$$u^* = -K_c(t)x$$

$$\text{com } K(t) = R^{-1}B^T P(t)$$

5.3 Problema LQR de estado estacionário

Neste caso, a função de custo quadrática $J(x_0, u)$ torna-se

$$J(x_0, u) = \int_0^\infty (x^T Qx + u^T Ru) dt. \text{ Como } \frac{\partial J^*(x, t)}{\partial t} = x^T \dot{P}x \text{ e } J^*(x, t) \text{ tem que ser finito para } t \rightarrow \infty,$$

$\dot{P}(t) \rightarrow 0$, e a equação de Riccati é a equação algébrica

$$0 = A^T P + PA - PBR^{-1}B^T P + Q.$$

Assim obtém-se

$$u^* = -Kx$$

$$\text{com } K = R^{-1}B^T P$$

A solução do problema LQR de estado estacionário é geralmente dada em duas partes. Primeiro estabelece-se condições de existência de uma solução única positiva definida da equação de Riccati tal que $A - BR^{-1}B^T P$ seja estável e então o problema LQR é solucionado pela lei de realimentação ótima $u = -R^{-1}B^T P x$.

Teorema: Considere o problema LQR. Suponha (A, B) estabilizável e (A, D) detectável com $Q = D^T D$. Então, existe P única definida positiva satisfazendo

$$A^T P + PA - PBR^{-1}B^T P + Q = 0 \tag{25}$$

e a lei de controle dada por $u = -R^{-1}B^T Px$ é ótima e estabiliza o sistema realimentado com custo para condição inicial x_0 dado por

$$J(x_0, u^*) = x_0^T P x_0$$

Prova. Usando a seguinte candidata de função de Lyapunov $V(x) = x^T Px$ mostra-se que $\dot{V}(x) = \frac{d}{dt} x^T Px < 0$ para $x \neq 0$. A derivada de $V(x)$ para $u = -R^{-1}B^T Px$ é dada por $\dot{V}(x) = x^T (A^T P + PA - 2PBR^{-1}B^T P)x$. Usando (25) obtém-se então $\dot{V}(x) = -x^T (Q + PBR^{-1}B^T P)x$ a qual pode ser escrita como $\dot{V}(x) = -x^T (Q + (R^{-1}B^T P)^T R(R^{-1}B^T P))x$. Para ter $\dot{V}(x) = 0$ o implica $Dx = 0$ e $R^{-1}B^T Px = 0$. Pela condição de detetabilidade tem-se que $Dx = 0$ só para $x = 0$ e então segue que $\dot{V}(x) < 0$ e $\dot{V}(x) = 0$ para $x = 0$ e o sistema é assintoticamente estável. Para verificar que a lei $u = -R^{-1}B^T Px$ é ótima, substituir o gradiente de $J^*(x, t) = x^T Px$ em (24). A seguir, verifica-se a ultima parte do teorema. Utilizando a lei de controle ótimo, a função custo (21) para o caso horizonte infinito pode ser reescrita como

$$J(x_0, u^*(t)) = \int_0^{\infty} \{x^T(t) [Q + PBR^{-1}B^T P] x(t)\} dt .$$

Como

$$\begin{aligned} x^T [Q + PBR^{-1}B^T P] x &= -\dot{V}(x, t) \\ &= -\frac{d}{dt} V(x) \\ &= -\frac{d}{dt} x^T Px \end{aligned}$$

tem-se

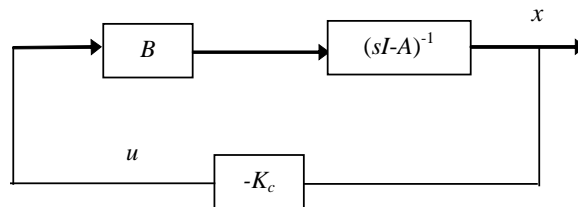
$$J(x_0, u(t)) = \int_0^{\infty} \{x^T(t) [Q + PBR^{-1}B^T P] x(t)\} dt = \int_0^{\infty} \left\{ -\frac{d}{dt} x^T Px(t) \right\} dt = -x(\infty)^T Px(\infty) + x_0^T Px_0$$

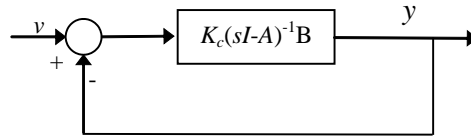
Dado que o sistema é assintoticamente estável, pode-se escrever $x(\infty)^T Px(\infty) = 0$, e

$$J(x_0, u(t)) = x_0^T Px_0$$

Observação: A solução do LQR padrão reduz-se ao problema de obter a solução positiva definida da equação de Riccati.

O diagrama de blocos do sistema realimentado é mostrado abaixo com e sem entrada de referência r .





A matriz de transferência de malha aberta é $L = K_c(sI - A)^{-1} B$.

5.4 Margens de estabilidade do regulador

Para $R_c = \rho I$, manipulando a equação de Riccati

$$A^T P_c + P_c A - P_c B R_c^{-1} B^T P_c + Q_c = 0,$$

pode-se verificar que:

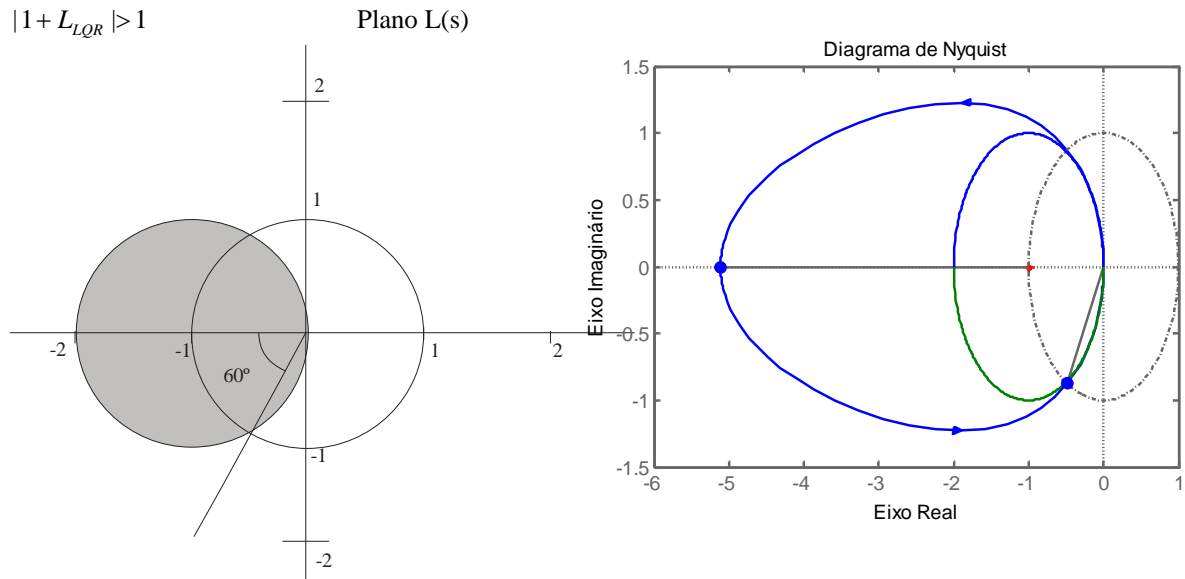
$$\|1 + L_{LQR}(j\omega)\|_{\infty} \geq 1, \text{ para todo } \omega, \text{ com } L_{LQR} = -K_c(sI - A)^{-1} B, \text{ a matriz de transferência de malha.}$$

Para sistemas SISO tem-se

$$|1 + L_{LQR}(j\omega)|^2 \geq 1, \text{ para todo } \omega.$$

Isto significa que o diagrama de Nyquist de $L_{LQR}(j\omega)$ fica fora do círculo unitário centrado no ponto $(-1,0)$ e que o sistema de malha fechada possui uma margem de ganho no intervalo $(-20\log 2, +\infty)$ e uma margem de fase $(-60, +60)$ sem que o número de envoltimentos do $(-1,0)$ se altere e portanto a estabilidade se mantém.

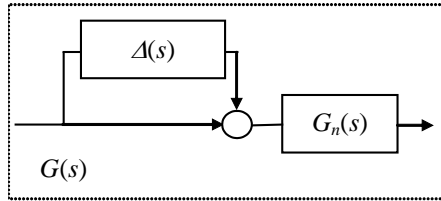
$$|1 + L_{LQR}| > 1$$



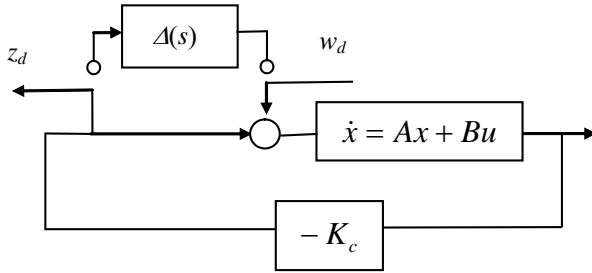
5.4.1 Robustez de estabilidade

Considere o modelo de incerteza multiplicativa na entrada da planta nominal denotada $G_n(s)$:

$G(s) = G_n(s)[I + \Delta(s)]$. O diagrama de blocos correspondente a $G(s)$ possui a forma:



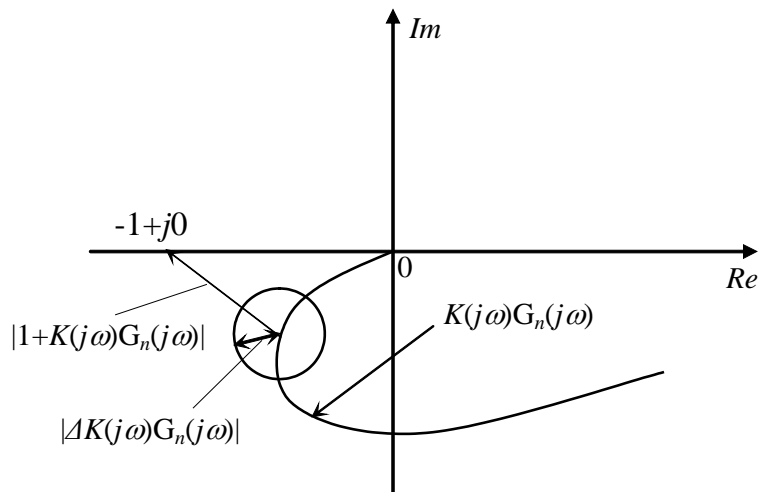
O diagrama de blocos do sistema realimentado possui então a forma



A análise de estabilidade pode ser feita utilizando o critério de Nyquist. Considere novamente o caso SISO. Para evitar o envolvimento do ponto crítico $-1+j0$ nenhum dos círculos de raio $\|\Delta(j\omega)K(j\omega)G_n(j\omega)\|$, $\forall \omega$ como ilustrado na figura abaixo pode cruzar este ponto crítico. Para ver isto lembre-se que para o caso de incertezas multiplicativas tem-se $K(j\omega)G_n(j\omega) + \Delta(j\omega)K(j\omega)G_n(j\omega) = K(j\omega)G_n(j\omega)$. Por inspeção, concluímos que o envolvimento é evitado para

$\|\Delta(s)K(s)G_n(s)\| < \|1 + K(s)G_n(s)\|$, ou equivalentemente, definindo $T := \frac{K(s)G_n(s)}{1 + K(s)G_n(s)}$, tem-se

$$\left\| \frac{K(s)G_n(s)}{1 + K(s)G_n(s)} \right\|_{\infty} < \frac{1}{\|\Delta(j\omega)\|_{\infty}}$$



Para robustez de estabilidade utilizando o critério de Nyquist deve-se ter então

$$\|\Delta(j\omega)M_{z_d w_d}\|_{\infty} < 1 \text{ em que}$$

$$M_{z_d w_d} = -\frac{K(s)G_n(s)}{1 + K(s)G_n(s)} = -K_c(sI - A)^{-1}B[I + K_c(sI - A)^{-1}B]^{-1}$$

com $K(s)G_n(s) = K_c(sI - A)^{-1}B$ e $K_c = R^{-1}B^T P_c$.

A condição acima pode ser escrita da forma

$$\|\Delta(j\omega)\|_\infty \leq \frac{1}{\|[-K_c(sI - A)^{-1}B[I + K_c(sI - A)^{-1}B]^{-1}]\|_\infty} = \frac{1}{\|[I + K_c(sI - A)^{-1}B]^{-1} - I\|_\infty}.$$

Aqui usou-se a identidade:

$(I + L_{LQR})^{-1} = I - L_{LQR}(I + L_{LQR})^{-1}$ com $L_{LQR} = K_c(sI - A)^{-1}B$. A seguir mostra-se que:

$$\|[I + K_c(sI - A)^{-1}B]^{-1} - I\|_\infty \leq 2.$$

Uma vez que $\max_w \sigma_{\max}[K_c(j\omega I - A)^{-1}B]^{-1} - I \leq 1 + \sigma_{\max}[I + K_c(j\omega I - A)^{-1}B]^{-1}$, com σ_{\max} o máximo valor singular, usando $\|1 + L_{LQR}(j\omega)\|_\infty \geq 1$ pode-se escrever:

$$1 = \sigma_{\min}[I] \leq \sigma_{\min}[[I + L_{LQR}]^{-1}[I + L_{LQR}]] = \sigma_{\min}[[I + L_{LQR}]^{-1}]^2.$$

Assim, tem-se :

$1 \leq \sigma_{\min}[I + L_{LQR}]$ e $1 \geq \sigma_{\max}[[I + L_{LQR}]^{-1}]$. Portanto, usando a desigualdade acima obtém-se

$\max_\omega \sigma_{\max}[[I + L_{LQR}]^{-1} - I] \leq 2$ e a condição para robustez de estabilidade estabelece que o sistema

permanece estável para $\|\Delta(j\omega)\|_\infty \leq \frac{1}{2}$ e $R_c = \rho I$.

5.5 Análise de estabilidade e síntese de controladores usando LMIs

Teorema (Estabilidade quadrática): Considere o Sistema autônomo

$$\dot{x} = Ax$$

sendo x o vetor de estados e A uma matriz constante e não-singular de dimensões apropriadas. Uma condição necessária e suficiente para que o estado de equilíbrio $x = 0$ seja assintoticamente estável é que exista uma matriz P simétrica positiva definida, tal que

$$A^T P + PA < 0.$$

A desigualdade acima é referenciada como desigualdade de Lyapunov onde P é a variável e A é conhecida. Esta LMI é factível se, e somente se, a matriz A é estável, isto é, todas as trajetórias do sistema convergem para zero quando $t \rightarrow \infty$, ou equivalentemente, todos os autovalores de A tem parte real negativa. Esta LMI pode ser resolvida de modo explícito, ou seja, escolhe-se $Q > 0$ e resolve-se a equação de Lyapunov $ATP + PA = -Q$, que é apenas um conjunto de $n(n+1)/2$ equações lineares de $n(n+1)/2$ variáveis escalares em P . Este conjunto de equações lineares terá solução e resultará em $P > 0$ se, e somente se, a LMI for factível.

Baseado no teorema acima, para se verificar se um sistema autônomo é estável, precisamos verificar se as seguintes desigualdades são verdadeiras:

$$A^T P + PA < 0$$

$$P = P^T > 0$$

Utilizando o módulo LMI do Matlab podemos escrever um programa para verificar estas desigualdades simultaneamente. (Ver exemplo)

```
% Exemplo de estudo de estabilidade usando LMIs
A=[0 1 0; 0 0 1; -6 -11 -6];
setlmis([]); % Inicio da montagem das LMIs
P=lmivar(1,[length(A) 1]); % Declaracao que P e uma matriz simetrica
lmiterm([1 1 1 P],1,A,'s'); % LMI #1: P*A+A'*P<0
lmiterm([-2 1 1 P],1,1); % LMI #2: P >0
lmiestabilidade=getlmis; % Termino da montagem das LMIs
[tmin,xfesp]=feasp(lmiestabilidade); % Teste da factibilidade da lmi.
% Se tmin<0: a LMI e factivel
if tmin<0
Pf=dec2mat(lmiestabilidade,xfesp,P);
disp('Sistema estavel');
disp('P= '), disp(Pf)
disp('Autovalores de P'), disp(eig(Pf))
disp('Autovalores de A'), disp(eig(A))
else
disp('Sistema instavel')
end
```

Considere o sistema dinâmico

$$\dot{x} = Ax + Bu$$

sendo x o vetor de estados, u o vetor de entradas, A e B matrizes constantes. O objetivo agora é projetar uma lei de controle por realimentação de estado do tipo

$$u = -Fx$$

que estabilize o sistema dinâmico. O sistema dinâmico com realimentação de estado é dado por

$$\dot{x} = Ax - BFx = (A - BF)x.$$

Podemos então utilizar o Teorema 1 para encontrar os ganhos de realimentação de estado F . Por analogia, as condições que devem ser checadas agora são

$$(A - BF)^T P + P(A - BF) < 0$$

$$P = P^T > 0$$

Note que a primeira desigualdade não é uma LMI, pois aparece o produto entre as variáveis P e F . No entanto, usando de uma manipulação algébrica, podemos reescrever esta desigualdade como

$$A^T P - F^T B^T P + PA - PBF < 0$$

$$P^{-1}[A^T P - F^T B^T P + PA - PBF]P^{-1} < 0$$

$$P^{-1}A^T - P^{-1}F^T B^T + AP^{-1} - BFP^{-1} < 0$$

e definir $X = P^{-1}$ e $G = FP^{-1}$, que resulta em

$$XA^T - G^T B^T + AX - BG < 0$$

Agora baseado no Teorema 1, para se verificar se obter os ganhos de realimentação de estado F para o sistema dinâmico seja assintoticamente estável, precisamos verificar se as seguintes desigualdades são verdadeiras:

$$XA^T - G^T B^T + AX - BG < 0$$

$$X = X^T > 0$$

Exercício

Utilizando o módulo LMI do Matlab escreva um programa para obtenção dos ganhos de realimentação de estado para o sistema dinâmico representado por:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}; \quad B = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Sugestões:

- O programa do Matlab tem a mesma estrutura do programa anterior, para o sistema autônomo.
- Declare as variáveis X e G como variáveis LMI, utilizando o comando **lmivar**.
- A primeira LMI tem que ser dividida em duas, uma para representar a variável X e outra para representar a variável G. Utilize os comandos **lmiterm**([1 1 1 X],A,1,'s') e **lmiterm**([1 1 1 G],B,-1,'s'), respectivamente.
- Para recuperar as variáveis X e G, utilize o comando **dec2mat** para ambas. O controlador pode então ser obtido como **F = G*inv(X)**.

5.5.1 O complemento de Schur

Permite que uma desigualdade matricial não-linear seja escrita em uma forma equivalente que é uma LMI. Seja a desigualdade matricial não-linear:

$$Q(x) - S(x)R(x)^{-1}S(x)^T > 0, \quad R(x) > 0$$

sendo que $Q(X) = Q(X)^T$, $R(X) = R(X)^T$ e $S(X)$ são funções afins em x. Esta desigualdade é equivalente a

$$\begin{bmatrix} Q(X) & S(X) \\ S(X)^T & R(X) \end{bmatrix} > 0.$$

5.6 D-Estabilidade

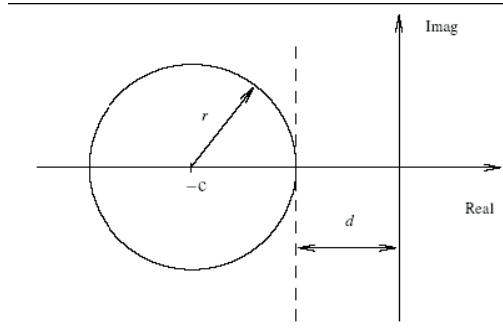
Definição (D-Estabilidade) O sistema linear invariante $\dot{x} = Ax$ é D-estável se, e somente se, todos os autovalores da matriz A pertencem a sub-região D do plano complexo, isto é:

$$\lambda_i(A) \in D \subset C, \quad i = 1, \dots, n.$$

Considere uma região LMI circular $D \subset C^-$. O sistema é D-estável se existir uma matriz Z e uma matriz simétrica definida positiva P , de dimensões apropriadas, tais que

$$\begin{bmatrix} \bar{A}P + P\bar{A}^T + BZ + Z^T B^T & * \\ P\bar{A}^T + Z^T B^T & -rP \end{bmatrix} < 0.$$

em que $\bar{A} = A + dI$ e $d = c - r$ e o símbolo $*$ denota o transposto do bloco diagonalmente oposto. O controlador é dado por $K = ZP^{-1}$.



Exercício (Posicionamento de pólos em um círculo) Considere o sistema contínuo no tempo:

$$\dot{x} = Ax + Bu$$

$$\text{com } A = \begin{bmatrix} 2.44 & 0.68 \\ 0.93 & 2.78 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0.60 \\ 0.62 \end{bmatrix}.$$

Deseja-se, através de uma lei de realimentação de estado $u = Kx$, posicionar os pólos em um círculo de raio 3 e centro em $(-10, 0)$.

5.7 Regulador quadrático com integrador

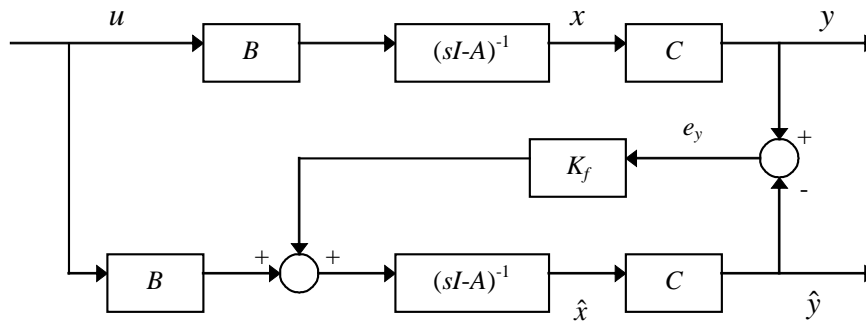
$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + Bu & \dot{x}_i &= Cx - r \\ y &= Cx & y &= Cx \end{aligned}$$

$$x_i = \int edt$$

6. Observador de estado de ordem completa

Problema: Estimar ou gerar o estado $x(t)$ a partir da entrada $u(t)$ e saída $y(t)$ conhecendo-se (A, B, C) .

Suponha o sistema (A, B, C) duplicado como na configuração abaixo.



onde

$$e_y := y - \hat{y} : \text{erro de observação}$$

Obtém-se então o chamado observador de estado:

$$\dot{\hat{x}} = A\hat{x} + Bu + K_f(y - C\hat{x})$$

ou

$$\dot{\hat{x}} = (A - K_f C)\hat{x} + K_f y + Bu$$

cujo erro de estimação $\varepsilon := x - \hat{x}$ é regido pela equação:

$$\dot{\varepsilon} = (A - K_f C)\varepsilon$$

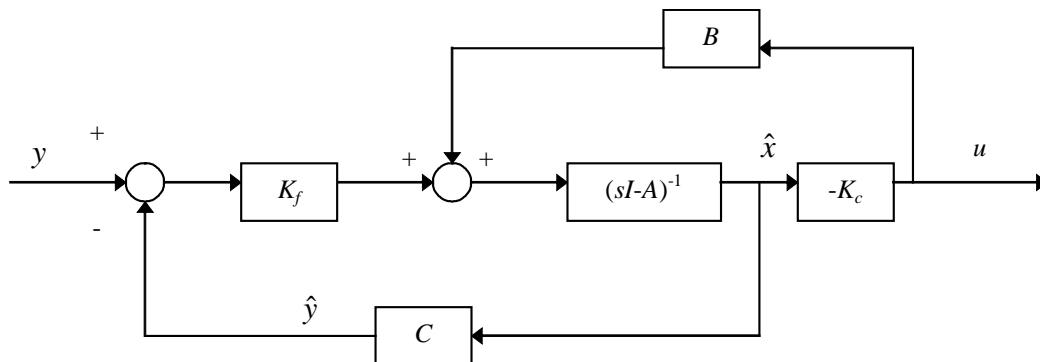
Com o par (A, C) observável tem-se que existe K_f tal que $\lim_{t \rightarrow \infty} \varepsilon = 0$.

6.1 Controlador baseado em observador

A combinação de um observador de estado com a realimentação de estado dá origem ao que é costumeiro chamar controlador baseado em observador. Considerando a utilização de um observador de estado, a lei de controle de realimentação de estado torna-se:

$$u = -K_c \hat{x}$$

e a seguinte estrutura de controlador pode ser obtida.



As equações do controlador/observador possui a representação de estado

$$\begin{aligned}\dot{\hat{x}} &= (A - K_f C - BK_c)\hat{x} + K_f y \\ u &= -K_c \hat{x}\end{aligned}$$

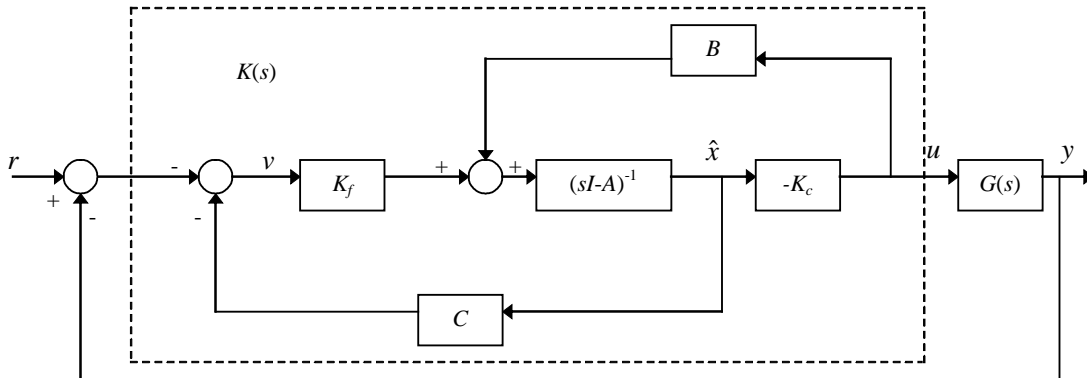
e função de transferência de $-u$ a y :

$$K(s) = K_c (sI - A + BK_c + K_f C)^{-1} K_f$$

a qual por conveniência pode ser escrita como:

$$K(s) = \begin{bmatrix} A - BK_c - K_f C & K_f \\ K_c & 0 \end{bmatrix}$$

O compensador resultante possui uma estrutura interna dada pela combinação de um observador com uma matriz de realimentação de estado; como pode ser visualizado no diagrama de blocos dado a seguir.



As equações do sistema realimentado possuem a representação de estado:

$$\begin{aligned}\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{\varepsilon} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} A - BK_c & BK_c \\ 0 & A - K_f C \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ \varepsilon \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} K_f \\ 0 \end{bmatrix} r \\ y &= \begin{bmatrix} C & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ \varepsilon \end{bmatrix}\end{aligned}$$

O comportamento do sistema combinado com controlador/observador depende da equação característica:

$$\Delta(s) = \det(sI - A + BK_c) \det(sI - A + K_f C) = 0$$

Entretanto, os polos do sistema de controle e observador são os polos do sistema de controle sem observador com os polos do observador. Os polos do sistema de controle podem ser determinados independentemente uma vez que não são influenciados uns pelos outros. Esta característica é conhecida como Propriedade de Separação.

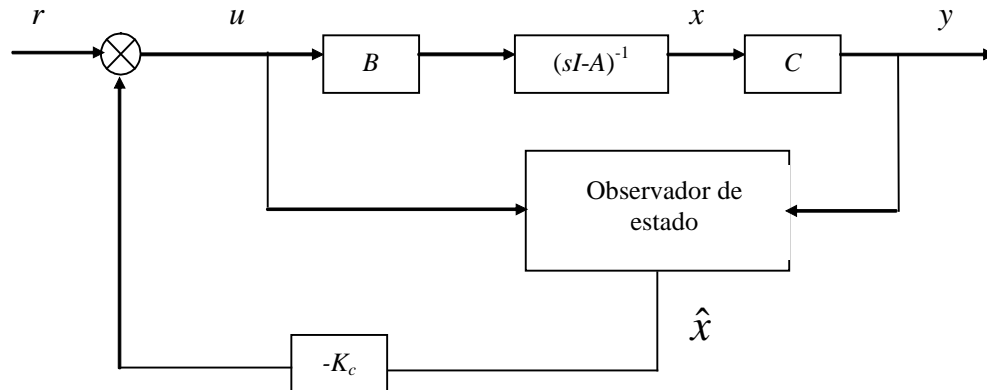
Exercício

O diagrama de blocos abaixo representa uma estrutura de controle com realimentação de estado estimado por um observador. O sistema a ser controlado é representado no espaço de estados pelas equações:

$$\dot{x} = Ax + Bu$$

$$y = Cx$$

As matrizes A , B e C têm dimensões compatíveis com a ordem do sistema e com os números de entradas e saídas.



O observador de estados é representado pela equação a seguir, em que K_f é a matriz de ganhos do observador e \hat{x} é o estado estimado.

A dinâmica do erro de estimação é descrita por:

$$\dot{\hat{x}} = A\hat{x} + Bu + K_f(y - C\hat{x})$$

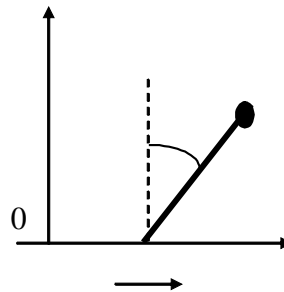
$$\dot{\varepsilon} = (A - K_f C)\varepsilon, \quad \varepsilon := x - \hat{x}.$$

Pede-se:

- Obter a representação de estados correspondente ao sistema em malha fechada, considerando o vetor de estados aumentado na forma

$$x_a = \begin{bmatrix} x \\ e \end{bmatrix}$$

- Determine, com base no princípio da separação, as expressões que permitem calcular os autovalores do sistema em malha fechada, em função das matrizes de ganhos K_c e K_f .
- A figura abaixo representa um pêndulo invertido. O modelo linear a seguir aproxima sua dinâmica para pequenas variações do ângulo φ .



O modelo em espaço de estados com $x := [\varphi \quad \dot{\varphi}]^T$ é o seguinte

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 3 & 0 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u$$

$$y = [1 \quad 0] x$$

Calcular a matriz de ganho $K_f = \begin{bmatrix} K_{f1} \\ K_{f2} \end{bmatrix}$ de modo que os autovalores de $(A-K_f C)$ sejam iguais ao par complexo conjugado $\{-10+j10, -10-j10\}$.

Calcular a matriz de ganho $K_c = [K_{c1} \quad K_{c2}]$ de modo que os autovalores de $(A-BK_c)$ apresentem coeficiente de amortecimento $\zeta = 0.6$ e frequência natural $\omega_n = 5$.

Calcular a função de transferência do controlador baseado em observador $K(s)$: função de transferência entre $-u$ e y .

O módulo *Control System* contém subrotinas para o cálculo do ganho de realimentação K e da solução da equação de Riccati. Comandos Matlab

$[K, P] = lqr(A, B, Q, R)$

$[K, P] = lqr2(A, B, Q, R)$ Solução da ARE via matriz Hamiltoniana do sistema:

$$H = \begin{bmatrix} A & -BR^{-1}B^T \\ -Q & -A^T \end{bmatrix}$$

Outras rotinas: *reg; are; ric*