

## Propriedades estruturais de sistemas multivariáveis

Profa. Vilma A. Oliveira  
USP São Carlos  
Abril 2017

1. Introdução.....	2
2. Descrição de sistemas dinâmicos lineares.....	2
3. Estabilidade .....	3
3.1 BIBO estabilidade .....	3
Caso Multivariável .....	4
3.2 Estabilidade de polinômios: o teorema de Hermite Biehler .....	5
3.3 Estabilidade nos modelos espaço de estado .....	6
Resposta ao estado-zero .....	6
Resposta a entrada nula .....	6
3.4 Estabilidade local para sistemas lineares ou não .....	7
Estabilidade uniforme .....	7
Estabilidade assintótica uniforme.....	8
3.5 Método de Lyapunov .....	8
3.6 Estabilidade de sistemas lineares.....	10
Caso invariante no tempo.....	11
4. Controlabilidade e estabilizabilidade, observabilidade, detectabilidade.....	12
4.1 Controlabilidade .....	12
Sistemas variantes no tempo .....	12
Sistemas invariantes no tempo .....	13
4.2 Estabilizabilidade .....	15
4.3 Observabilidade.....	15
Sistemas variantes no tempo .....	15
Sistemas invariantes no tempo .....	16
4.4 Detectabilidade.....	16
4.5 Controlabilidade e observabilidade para sistemas lineares invariantes e discretos no tempo .....	18
Controlabilidade .....	19
Observabilidade.....	19
5.2 Forma de Jordan .....	23
6. Equação de Lyapunov .....	26

## 1. Introdução

Durante as últimas duas décadas a estrutura de sistemas lineares tem sido exaustivamente estudada por diversos autores em diferentes contextos. Destacam-se as contribuições de Wolovich (1967), Kailath (1980), Wonham (1985) e Rosenbrock (1970). A estrutura de polos e zeros do sistema e propriedades de controlabilidade, estabilizabilidade, observabilidade, detetabilidade desempenham um papel importante no projeto de sistemas de controle. As estruturas de zeros finitos e infinitos das funções de transferência do sistema dado e da malha objetivo têm um papel preponderante na análise e procedimento de recuperação de funções de transferência do sistema. Na verdade, o tema recuperação de funções de transferência de malha pode ser visto como o estudo de atribuição de uma estrutura de zeros a um sistema a malha fechada dentro das condições impostas pelas estruturas dos zeros da planta e da malha objetivo. As representações de sistemas relacionadas com as propriedades de sistemas utilizam a decomposição de Kalman e uma base de coordenada especial de Saberi.

Referências utilizadas:

Colaneri, P., Geromel, J. C. & Locatelli, A. (1997). *A Control Theory and Design - An  $RH_2$  e  $RH_\infty$  Viewpoint*. Academic Press, London.

Zhou, Kemin, J. C. Doyle & K. Glover (1996). *Robust and Optimal Control*. Prentice Hall, Upper Saddle River.

Morris, Kirsten (2002). *Introduction to Feedback Control*, Academic Press.

Antsaklis & Michel (2007). *A Linear System Primer*, Birkhauser, Boston.

Jean-Jacques E. Slotine & Weping Li (1991). *Applied Nonlinear Control*. Prentice Hall, Englewood Cliffs.

## 2. Descrição de sistemas dinâmicos lineares

Considere a representação de sistemas na forma espaço de estado

$$\dot{x} = Ax + Bu,$$

$$y = Cx + Du$$

(1)

onde  $u \in R^m$  é a entrada,  $y \in R^p$ , a saída,  $x \in R^n$  o estado,  $A, B, C$  e  $D$  matrizes  $n \times n$ ,  $n \times m$ ,  $p \times n$  e  $p \times m$ .

Um sistema com uma entrada ( $m=1$ ) e uma saída ( $p=1$ ) é chamado sistema SISO das iniciais de *single input and single output*, se não for o caso o sistema é chamado MIMO das iniciais de *multiple input and multiple output*). A correspondente matriz de transferência entre  $y$  e  $u$  é definida por:

$$Y(s) = G(s)U(s)$$

(2)

onde

$$G(s) = C(sI - A)^{-1}B + D$$

Supõe-se que  $G(s)$  tem posto completo e  $\text{Posto}(G(s)) = \min(p, m) =: r$ .

A seguinte notação é usada:

$$\left[ \begin{array}{c|c} A & B \\ \hline C & D \end{array} \right] := C(sI - A)^{-1}B + D$$

(3)

$(A, B, C, D)$  denota o sistema dinâmico linear na forma espaço de estado.

O modelo espaço de estado  $(A, B, C, D)$  tal que  $G(s) = C(sI - A)^{-1}B + D$  é denominado uma realização espaço de estado de  $G(s)$ .

### 3. Estabilidade

#### 3.1 BIBO estabilidade

**Definição 3.1:** Um sistema linear relaxado é dito ser BIBO estável se e só se para qualquer entrada limitada a saída for limitada.

#### Caso contínuo

**Teorema 3.1:** Um sistema monovariável relaxado descrito por

$$y(t) = \int_0^t g(t, \tau)u(\tau)d\tau \quad (4)$$

é BIBO estável se e só se existir um finito  $k$  tal que

$$\int_0^t |g(t, \tau)|d\tau \leq k < \infty \quad t \in (0, \infty) \quad (5)$$

**Teorema 3.2:** (Chen, 1999) Considere um sistema monovariável relaxado

$$y(t) = \int_0^t g(t, \tau)u(\tau)d\tau \quad (6)$$

Se  $\int_0^t |g(t, \tau)|dt \leq k < \infty$  para algum  $k$  então tem-se:

1. Se  $u$  for uma função periódica com período  $T$ ;  $u(t) = u(t + T)$  para todo  $t \geq 0$  então a saída  $y(t)$  tende a uma função periódica com o mesmo período  $T$ .
2. Se  $u(t)$  for limitada e tender para uma constante então a saída tende para uma constante.
3. Se  $u$  for de energia finita, ou seja:

$$\|u\|_2 = \left( \int_0^\infty |u(t)|^2 dt \right)^{1/2} \leq k_1 < \infty \quad (7)$$

então, a saída é também de energia finita, existe  $k_2$  dependente de  $k_1$ , ou seja,

$$\|y\|_2 = \left( \int_0^\infty |y(t)|^2 dt \right)^{1/2} \leq k_2 < \infty \quad (8)$$

**Observação:** A saída apresenta as mesmas propriedades da entrada em um sistema BIBO estável.

Considere o espaço linear com norma  $L_2$  em  $R^m$  denotado por  $L_2(0, \infty; R^m)$ .

**Definição 3.2:** Um sistema é  $L_2$  estável ou externamente estável se para toda entrada  $u$  pertencente ao espaço linear com norma  $L_2$ , ou seja,  $u \in L_2(0, \infty; R^m)$ , a saída  $y \in L_2(0, \infty; R^m)$ .

**Corolário 3.1:** (Resposta em frequência). Seja o sistema invariante no tempo

$$y(t) = \int_0^t g(t, \tau) u(\tau) d\tau \quad (9)$$

se  $\int_0^t |g(t, \tau)| d\tau \leq k < \infty$  para algum  $k$  e se  $u(t) = \text{sen} \omega t$ ,  $t \geq 0$  então

$$y(t) \rightarrow |g(j\omega)| \text{sen}(\omega t + \theta) \quad t \rightarrow \infty \quad (10)$$

onde

$$\theta = \tan^{-1} \frac{\text{Im } g(j\omega)}{\text{Re } g(j\omega)}$$

**Verificação:**

Lembrando que  $\text{sen}(t - \tau) = \text{sen } t \cos \tau - \cos t \text{sen } \tau$  tem-se:

$$\begin{aligned} y(t) &= \int_0^t g(\tau) u(t - \tau) d\tau \\ &= \text{sen} \omega t \int_0^t g(\tau) \cos \omega \tau d\tau - \cos \omega t \int_0^t g(\tau) \text{sen} \omega \tau d\tau - \int_t^\infty g(\tau) \text{sen} \omega (t - \tau) d\tau \end{aligned}$$

Uma vez que

$$\left| \int_t^\infty g(\tau) \text{sen} \omega (t - \tau) d\tau \right| \leq \int_t^\infty |g(\tau)| \text{sen} \omega (t - \tau) d\tau \leq \int_t^\infty |g(\tau)| d\tau$$

e  $g$  é integrável), ou seja  $\int_t^\infty |g(\tau)| d\tau \rightarrow 0$   $t \rightarrow \infty$ , tem-se:

$$y(t) \rightarrow \text{sen} \omega t (\text{Re } g(j\omega)) + \cos \omega t (\text{Im } g(j\omega))$$

com  $g(j\omega)$  a transformada de Fourier de  $g(t)$ . Agora, usando a identidade de Euler para sen e cos, i.e.

$$\text{sen} \omega t = \frac{1}{2j} (e^{j\omega t} - e^{-j\omega t}), \quad \cos \omega t = \frac{1}{2} (e^{j\omega t} + e^{-j\omega t}), \quad \text{tem-se que } y(t) = \frac{1}{2j} [g(j\omega)e^{j\omega t} - g(-j\omega)e^{-j\omega t}].$$

Finalmente, usando a notação fasorial para  $g(j\omega)$ , i.e.,  $g(j\omega) = |g(j\omega)|e^{j\theta}$  e  $g(-j\omega) = g^*(j\omega) = |g(j\omega)|e^{-j\theta}$ , pode-se escrever

$$y(t) \xrightarrow{t \rightarrow \infty} |g(j\omega)| \text{sin}(\omega t + \theta) \quad \text{com } \theta = \tan^{-1} \frac{\text{Im } g(j\omega)}{\text{Re } g(j\omega)}.$$

**Teorema 3.3:** Um sistema monovariável e relaxado descrito por  $g(s)$  própria é BIBO estável se e só se todos os polos de  $g(s)$  estiverem no semiplano lateral esquerdo do plano  $s$  ou, equivalentemente, se todos os polos de  $g(s)$  tiverem a parte real negativa.

**Caso Multivariável**

Defina  $g_{ij}$  como a resposta impulsional entre a  $j$ -ésima entrada e  $i$ -ésima saída.

**Teorema 3.4:** Um sistema relaxado

$$y(t) = \int_{-\infty}^t G(t, \tau) u(\tau) d\tau \quad (11)$$

é BIBO estável se e só se existir  $k$  finito tal que

$$\int_{-\infty}^t \|G(t, \tau)\| d\tau = k < \infty, \forall t \quad (12)$$

onde  $\|G(t, \tau)\| := \|G(t, \tau)\|_{\infty} = \max_i \sum_j |g_{ij}|$  e  $G(.,.) \in R^p \times R^m$ . Na verdade qualquer norma poderia ser usada.

**Teorema 3.5:** Um sistema multivariável e relaxado descrito por  $y(s) = G(s)u(s)$  onde  $G(s)$  é uma matriz racional própria, é BIBO estável se e só se todos os polos de cada elemento de  $G(s)$  tiverem parte real negativa.

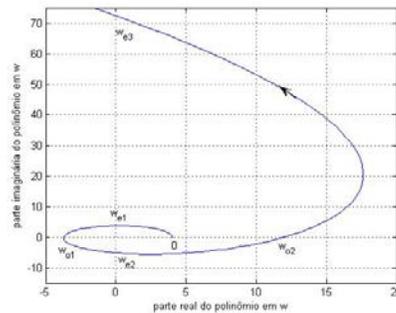
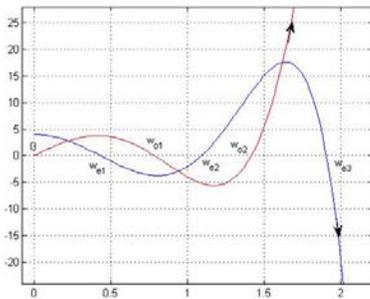
### 3.2 Estabilidade de polinômios: o teorema de Hermite Biehler

O teorema de Hermite Biehler fornece condições necessárias e suficientes para a estabilidade de polinômios usando a condição de entrelaçamento.

**Propriedade 3.1:** Se  $P(s)$  é um polinômio real de Hurwitz então todos os seus coeficientes são não zero e têm o mesmo sinal, ou positivo ou negativo.

**Propriedade 3.2:** Se  $P(s)$  é um polinômio real de Hurwitz de grau  $n$ , o  $\arg[P(jw)]$  é uma função contínua e estritamente crescente de  $w \in (-\infty, \infty)$ . Além disso, a fase para  $w \in (-\infty, \infty)$  é  $n\pi$ .

**Teorema 3.6** (Hermite Biehler): Seja  $\delta(s) = a_0 + a_1s + \dots + a_{n-1}s^{n-1} + a_n s^n$  um polinômio real de grau  $n$ . Escreva  $\delta(s) = \delta_e(s^2) + s\delta_o(s^2)$  onde  $\delta_e(s^2)$  e  $s\delta_o(s^2)$  são as componentes de  $\delta(s)$  de potências de  $s$  pares e ímpares, respectivamente. Sejam  $w_{e1}, w_{e2}, \dots$  zeros reais não negativos de  $\delta_e(-w^2)$  e  $w_{o1}, w_{o2}, \dots$  zeros reais não negativos de  $\delta_o(-w^2)$ , ambos dispostos em ordem ascendentes de magnitude. Então,  $\delta(s)$  é Hurwitz estável se e só se todos os zeros de  $\delta_e(-w^2), \delta_o(-w^2)$  são reais e distintos,  $\delta_n, \delta_{n-1}$  possuem o mesmo sinal e os zeros reais não negativos satisfazem a seguinte propriedade de entrelaçamento:  $0 < w_{e1} < w_{o1} < w_{e2} < w_{o2} < \dots$ . Os gráficos abaixo ilustram um polinômio estável.



Uma caracterização analítica equivalente do teorema de Hermite Biehler foi dada por Bhattacharyya (1991) seguida por sua generalização com vistas a utilização da propriedade de entrelaçamento de polinômios estáveis no projeto de

obtenção de famílias de controladores estabilizantes para sistemas monovariáveis não necessariamente de fase mínima.

### 3.3 Estabilidade nos modelos espaço de estado

Considere o sistema  $(A, B, C, D)$

$$\begin{aligned}\dot{x} &= A(t)x + B(t)u \\ y &= C(t)x\end{aligned}\tag{13}$$

$$x(t) = s(t; t_0, x_0, 0) + s(t; t_0, 0, u)\tag{14}$$

Resposta ao estado-zero

$$\begin{aligned}y(t) &= \int_{t_0}^t C(\tau)\Phi(t, \tau) B(\tau)u(\tau)d\tau \\ &= \int_{t_0}^t G(t, \tau)u(\tau)d\tau\end{aligned}\tag{15}$$

onde  $\Phi(t, \tau)$  é a matriz transição de estado.

Seguem as principais propriedades da matriz de transição de estado:

$$1. \Phi(t, t) = I\tag{16}$$

$$2. \Phi^{-1}(t, t_0) = \Phi(t_0, t)\tag{17}$$

$$3. \Phi(t, t_0) = \Phi(t, t_1)\Phi(t_1, t_0).\tag{18}$$

**Teorema 3.7:** A resposta ao estado zero de  $(A, B, C, D)$  é BIBO estável se e só se existir um número finito  $k$  tal que

$$\int_{t_0}^t \|C(\tau)\Phi(t, \tau)B(\tau)\|d\tau \leq k < \infty\tag{19}$$

para todo  $t_0$  e para todo  $t \geq t_0$ .

Resposta a entrada nula

$$\begin{aligned}\dot{x} &= A(t)x \\ x(t) &:= s(t; t_0, x_0, 0) = \Phi(t, t_0)x_0\end{aligned}\tag{20}$$

**Definição:** Um estado  $x_e$  de  $(A, B, C, D)$  é um estado de equilíbrio em  $t_0$  se e só se  $x_e = s(t; t_0, x_e, 0)$ , para todo  $t \geq t_0$  e  $\dot{x}_e = 0$ , para todo  $t \geq t_0$ .

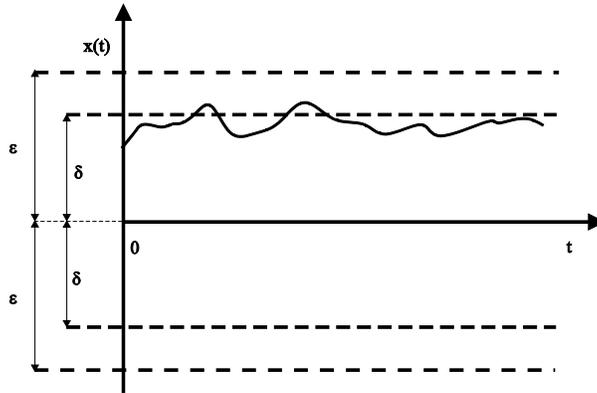
O estado de equilíbrio é solução de  $A(t)x = 0$ ,  $t \geq t_0$ .

**Observação:** O estado zero,  $0$ , é sempre um estado de equilíbrio de  $\dot{x} = A(t)x$ .

### 3.4 Estabilidade local para sistemas lineares ou não

**Definição 3.2:** Um estado de equilíbrio  $x_e$  é estável em  $t_0$  no sentido de Lyapunov (i.s.L) se e só se para todo  $\varepsilon > 0$ , existir um número positivo  $\delta(\varepsilon, t_0)$  tal que se  $\|x_0 - x_e\| \leq \delta$ , então

$$\|s(t; t_0, x_0, 0) - x_e\| \leq \varepsilon \text{ para todo } t \geq t_0.$$



#### Estabilidade uniforme

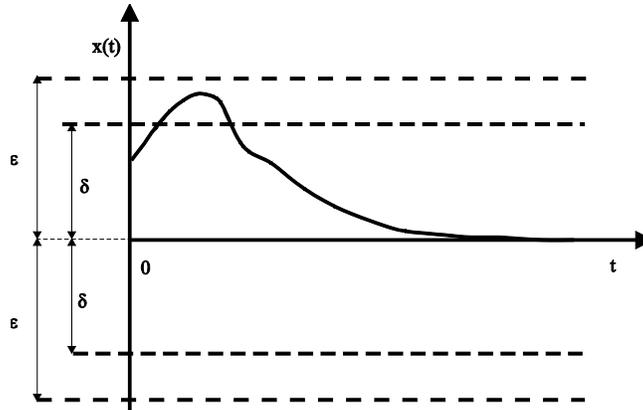
O estado de equilíbrio  $x_e$  é uniformemente estável no sentido de Lyapunov (i.s.L) sobre  $[t_0, \infty)$  se e só se para cada  $\varepsilon > 0$ , existir um  $\delta$  positivo que depende de  $\varepsilon$  mas não de  $t_0$  tal que  $\|x_0 - x_e\| \leq \delta$ , então

$$\|s(t; t_1, x_0, 0) - x_e\| \leq \varepsilon \text{ para todo } t_1 \geq t_0 \text{ e para todo } t \geq t_1.$$

"Escolhe-se primeiro uma bola  $B_\varepsilon$ , e para cada  $B_\varepsilon$  deve existir uma bola  $B_\delta$  tal que trajetórias iniciando dentro de  $B_\delta$  não escapa de  $B_\varepsilon$ , quando  $t$  cresce indefinidamente".

**Definição 3.3:** O estado de equilíbrio  $x_e$  é assintoticamente estável em  $t_0$  se for estável (i.s.L) em  $t_0$  e se toda trajetória iniciando suficientemente próximo de  $x_e$  converge para  $x_e$  quando  $t \rightarrow \infty$ . Dado algum  $\gamma > 0$  tal que se  $\|x(t_1) - x_e\| \leq \gamma$ , então para qualquer  $\bar{\varepsilon} > 0$  existe um  $T$ ,  $T(\bar{\varepsilon}, \gamma, t_1) > 0$  tal que

$$\|s(t; t_1, x(t_1), 0) - x_e\| \leq \bar{\varepsilon}, \quad \text{todo } t \geq t_1 + T$$



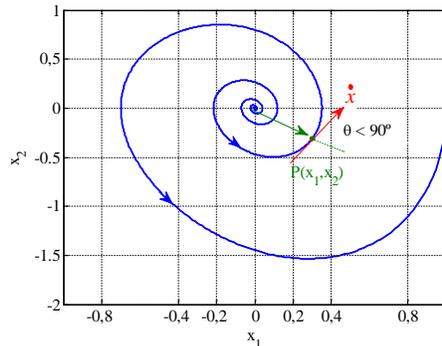
### Estabilidade assintótica uniforme

O estado de equilíbrio  $x_e$  é uniformemente assintoticamente estável sobre  $[t_0, \infty)$  se  $T$  na Definição 3.3 depende de  $t_1$ .

No plano de fase pode-se fazer a seguinte interpretação de estabilidade. Para haver estabilidade da origem, requer-se que o ângulo entre o vetor de estado  $x$  e vetor velocidade  $\dot{x}$  seja maior do que 90 graus quando uma componente do vetor velocidade aponta para a origem (a outra é ortogonal ao vetor  $x$ ) isto é:

$$(x^T \dot{x}) / \|x\| \|\dot{x}\| = \cos \theta < 0.$$

De fato, uma vez que  $\dot{x} = Ax$ , tem-se que  $x^T Ax < 0$  o que implica real  $\lambda < 0$ , ver figura.



### 3.5 Método de Lyapunov

Considere o sistema  
 $\dot{x} = f(x); \quad f(0) = 0$

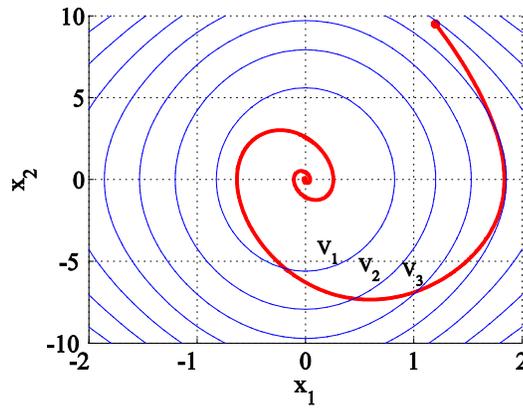
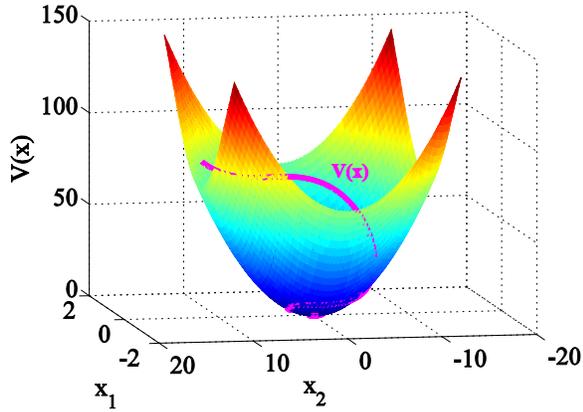
A idéia básica do método de Lyapunov é associar a estabilidade do sistema à variação de energia. Se um sistema possui um estado de equilíbrio estável  $x_e$ , então a energia total armazenada no sistema decresce com o tempo até a energia total atingir o seu valor mínimo no estado de equilíbrio. A estabilidade é analisada via uma função escalar especial chamada função de Lyapunov.

**Definição.** A função de Lyapunov  $V(x)$  satisfaz as seguintes condições para todo  $t_1 > t_0$  e para todo  $x$  na vizinhança de  $x_e$ , com  $x = 0$  um ponto de equilíbrio do sistema

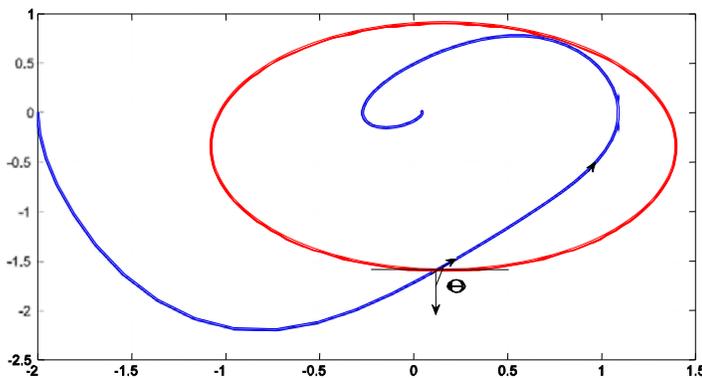
1.  $V(x)$  e suas derivadas parciais são definidas e são contínuas.
2.  $V(0) = 0$

3.  $V(x) > 0$  para todo  $x \neq 0$  e  $\dot{V} \leq 0$  com  $\dot{V}$  a derivada de  $V(x)$  em relação ao tempo, i.e.

$$\begin{aligned} \dot{V} &= L_f V(x) \\ &= \text{Grad}_x V(x)^T f(x) \end{aligned}$$



Representação geométrica de uma função de Lyapunov. (a) Representação 3D da função de Lyapunov ilustrando  $V(x)$  ao longo de uma solução iniciando em  $x_0$ , (b) Curvas de nível:  $V_1 < V_2 < V_3$  e a solução  $x(t)$  iniciando em  $x_0$ .



Sistema estável

$$\cos \Theta = \frac{\langle \text{Grad}_x V f(x) \rangle}{\|\text{Grad}_x V\| \|f(x)\|} < 0$$

**Teorema 3.8.** Suponha que uma função de  $V(x)$  possa ser determinada para o sistema. Então, o estado de equilíbrio  $x = 0$  é assintoticamente estável se  $\dot{V}$  for negativa definida e estável no sentido de Lyapunov se  $\dot{V}$  for semi-definida negativa.

**Teorema 3.9 (Estabilidade local).** Se em uma bola  $B_{R_0}$  existe uma função escalar  $V(x)$  com derivadas contínuas tal que:

1.  $V(x) > 0$  localmente

2.  $\dot{V}(x) \leq 0$  localmente em  $B_{R_0}$ .

Então, o ponto de equilíbrio  $x_e = 0$  é estável. Se  $\dot{V}(x) < 0$  em  $B_{R_0}$  então a estabilidade é assintótica.

Nota-se que a derivada de  $V(x)$  é o produto escalar de dois vetores. A função  $f(x)$  é um vetor que aponta no sentido da tangente da trajetória  $x(t)$  do sistema naquele ponto, e  $\text{grad}_x V(x)$  é um vetor normal, no sentido de crescimento de  $V(x)$  em relação à uma curva de nível  $V(x) = c, c > 0$ . A figura ilustra o caso em que a derivada de  $V(x)$  é negativa. O teorema seguinte pode garantir a estabilidade assintótica do sistema mesmo que a derivada da função de Lyapunov  $V(x)$  seja semi-definida negativa. A Definição 3.3 é necessária para entender o teorema.

**Definição 3.3** O conjunto  $M$  é dito invariante com respeito ao sistema  $\dot{x} = f(x)$  se para  $x_0 \in M$ , a solução do sistema  $s(t; t_0, x_0, 0) \in M$  para todo  $t \in \mathbb{R}$ .

Assim, um conjunto invariante com respeito a  $\dot{x} = f(x)$  indica que se a solução pertence a  $M$  em um instante  $t$ , então a solução pertence a  $M$  para todo tempo futuro.

**Teorema 3.10** [Princípio de invariância de La Salle] Suponha  $V(x)$  uma função definida positiva continuamente diferenciável contendo a origem  $x = 0$  tal que em  $\omega_\ell = \{x : V(x) < \ell\}$  tem-se  $\dot{V} \leq 0$ . Defina  $E = \{x \in \omega_\ell : \dot{V}(x) = 0\}$ . Então, toda solução  $s(t; t_0, x_0, 0)$  iniciando em  $\omega_\ell = \{x : V(x) < \ell\}$  é atraída para o maior conjunto invariante em  $E$ . Se  $E$  não conter outra trajetória a não ser  $x = 0$ , a origem é assintoticamente estável.

### 3.6 Estabilidade de sistemas lineares

As definições de estabilidade de estados de equilíbrio dadas anteriormente têm uma natureza local porque não se sabe quão pequenas as constantes  $\delta$  e  $\gamma$  devem ser. Entretanto, para sistemas lineares por causa da propriedade de homogeneidade  $\delta$  e  $\gamma$  as definições de estabilidade podem ser estendidas para todo o espaço de estado. O que significa que em sistemas lineares estabilidade local implica estabilidade global.

**Teorema 3.11:** O estado de equilíbrio  $x_e$  de  $\dot{x} = A(t)x$  é estável no sentido de Lyapunov em  $t_0$  se e só se existir alguma constante  $k(t_0)$  tal que

$$\|\Phi(t, t_0)\| \leq k < \infty \quad \text{para todo } t \geq t_0 \quad (21)$$

se  $k$  for independente de  $t_0$  tem-se estabilidade uniforme i.s.L.

**Observação:** Se o estado zero for assintoticamente estável, então, o estado zero é o único estado de equilíbrio do sistema. Se existisse outro diferente de zero, escolhendo-o como condição inicial este não se aproximaria do estado zero.

**Teorema 3.12:** O estado zero de  $\dot{x} = A(t)x$  é assintoticamente (exponencialmente) estável em  $t_0$  se e só se  $\|\Phi(t, t_0)\| \leq k(t_0) < \infty$  e  $\|\Phi(t, t_0)\| \rightarrow 0$  quando  $t \rightarrow \infty$ . O estado zero é uniformemente assintoticamente estável sobre  $[t_0, \infty]$  se e só se existem números positivos  $k_1$  e  $k_2$  tais que

$$\|\Phi(t, t_0)\| \leq k_1 e^{-k_2(t-t_0)} \quad (22)$$

para qualquer  $t_0 \geq 0$  e para todo  $t \geq t_0$ .

### Caso invariante no tempo

Inspecionando a solução  $x(t) = e^{At} x_0$  com

$$\begin{aligned} e^{At} &= \sum_{i=1}^m \sum_{k=0}^{n_i-1} A_{ik} t^k e^{\lambda_i t} \\ &= \sum_{i=1}^m [A_{i0} e^{\lambda_i t} + A_{i1} t e^{\lambda_i t} + \dots + A_{i(n_i-1)} t^{n_i-1} e^{\lambda_i t}] \end{aligned}$$

com  $\lambda_1, \dots, \lambda_m$  os  $m$  autovalores com multiplicidade  $n_i$  distintos de  $A$  e usando

$$A_{ik} = \frac{1}{k! (n_i - 1 - k)!} \lim_{s \rightarrow \lambda_i} [(s - \lambda_i)^{n_i} (sI - A)^{-1}]^{(n_i-1-k)}.$$

pode-se estabelecer o seguinte teorema para estabilidade.

**Teorema 3.13:** O estado de equilíbrio  $x_e$  de  $\dot{x} = Ax$  é

1. assintoticamente estável se e só se todos os autovalores de  $A$  tiverem parte real negativa ou seja  $\text{Re } \lambda_i < 0, i = 1, \dots, n$ .
2. estável no sentido de Lyapunov ou marginalmente estável se e só se todos os autovalores de  $A$  tiverem parte real zero ou negativa, ou seja,  $\text{Re } \lambda_i \leq 0, i = 1, \dots, n$ , e aqueles com parte real zero  $\text{Re } \lambda_j = 0$  forem raízes simples do polinômio mínimo de  $A$  quando

$$A_{jk} = \lim_{s \rightarrow \lambda_j} [(s - \lambda_j)^{n_j} (sI - A)^{-1}]^{(n_j-1-k)} = 0, \quad k = 1, \dots, n_j - 1.$$

3. instável se e só se condição (2) não for satisfeita.

### **Método de Lyapunov e Funções Quadráticas**

**Teorema 3.14.** Considere o sistema linear  $\dot{x} = Ax$  com  $\det A \neq 0$  e  $x_e = 0$ . Considere

$V(x) = x^T P x, \quad P = P^T > 0$ . Então,  $V(x)$  é uma função de Lyapunov do sistema linear se e só se para qualquer  $Q = Q^T > 0$  existe  $P = P^T > 0$  tal que:

$$A^T P + P A = -Q$$

Prova. Condição suficiente. Para  $V(x) = x^T P x, \quad P = P^T > 0$  tem-se  $\dot{V}(x) = \dot{x}^T P x + x^T P \dot{x}$ . Usando  $\dot{x} = Ax$  pode-se escrever  $\dot{V}(x) = x^T A^T P x + x^T P A x$ . Então,

$$\begin{aligned} \dot{V}(x) &= x^T [A^T P + P A] x \\ &= -x^T Q x < 0, \quad \forall x \neq 0 \end{aligned}$$

e o resultado segue.

Exercício: Provar a condição necessária do Teorema 3.14.

#### Caso discreto no tempo

$$x(k+1) = Ax(k) \quad (23)$$

$$\text{Solução } x(k): x(k) = A^k x_0 \quad (24)$$

**Teorema 3.15:** A equação  $x(k+1) = Ax(k)$  é marginalmente estável ou estável segundo Lyapunov se todos os autovalores de  $A$  tiverem magnitudes menores ou iguais a 1 e aqueles com magnitudes iguais a 1 forem raízes simples do polinômio mínimo de  $A$ .

**Teorema 3.16:** A equação  $x(k+1) = Ax(k)$  é assintoticamente estável se todos os autovalores de  $A$  tiverem magnitudes menores do que 1.

#### Lyapunov para o caso discreto

$$V(x(k)) > 0, \Delta V(x(k)) = V(x(k+1)) - V(x(k)) < 0$$

#### Equação de Lyapunov

$$P - PA^T P = Q$$

### 4. Controlabilidade e estabilizabilidade, observabilidade, detectabilidade

#### 4.1 Controlabilidade

##### Sistemas variantes no tempo

O conceito de controlabilidade está relacionado com entradas e estados e o conceito de observabilidade com saídas e estados. São propriedades estruturais dos sistemas  $(A(\cdot), B(\cdot), C(\cdot), D(\cdot))$  que fornecem informações relevantes para o projeto de controle. Antes de definir controlabilidade, o conceito de independência linear para funções do tempo é necessário (ver Antsaklis, 2007).

**Definição 4.1:** Um conjunto de funções  $f_i(t), i = 1, \dots, n, f_i^T(t) \in R^n$  é linearmente dependente em um intervalo  $[t_1, t_2]$  no corpo dos números complexos se um vetor  $\alpha \neq 0 \ n \times 1$  constante no corpo dos complexos tal que

$$\alpha^T \begin{bmatrix} f_1(t) \\ f_2(t) \\ \vdots \\ f_n(t) \end{bmatrix} = 0 \text{ para todo } t \in [t_1, t_2] .$$

Note que nesta definição as linhas são funções de  $t$ .

**Definição 4.2:** Um sistema  $(A(\cdot), B(\cdot), C(\cdot), D(\cdot))$  é controlável em  $t_0$  se existir uma lei de controle  $u$  (contínua por partes) que transfira qualquer estado inicial  $x_0 \in R^n$  a um estado arbitrário  $x_1 \in R^n$  em um tempo finito  $t_1 > t_0$ .

#### Ver conceito de alcançabilidade

**Teorema 4.1 (Chen, 1984):** Seja  $f_i$  uma função contínua de valor complexo definida em  $[t_1, t_2]$ . Seja  $F$  uma matriz  $n \times m$  com  $f_i$  sendo sua  $i$ -ésima linha. Defina a matriz

$$W(t_1, t_2) = \int_{t_1}^{t_2} F(t)F^*(t)dt \quad (32)$$

Então  $f_1, f_2, \dots, f_n$  são linearmente independentes em  $[t_1, t_2]$  se e só se  $W(t_1, t_2)$  for não singular.

**Teorema 4.2 (Chen, 1999):** Um sistema  $(A(t), B(t), C(t), D(t))$  é controlável em  $t_0$  se e só se existir um  $t_1 > t_0$  finito tal que as  $n$  linhas da matriz  $n \times m$   $\Phi(t_0, t)B(t)$ , sejam linearmente independentes (LI) em  $[t_0, t_1]$ .

**Verificação:**

Suficiência. Se as linhas de  $\Phi(t_0, t)B(t)$  forem LI em  $[t_0, t_1]$ , pelo Teorema 4.1 a matriz

$$W(t_0, t_1) = \int_{t_0}^{t_1} \Phi(t_0, \tau)B(\tau)B(\tau)^* \Phi^*(t_0, \tau)d\tau \quad (33)$$

é não singular. Para qualquer  $x(t_0)=x_0$  e qualquer  $x_1$  pode-se mostrar que a entrada

$$u(t) = -B^*(t)\Phi^*(t_0, t)W^{-1}(t_0, t)[x_0 - \Phi(t_0, t)x_1]$$

leva  $x_0$  ao estado  $x_1$  em  $t=t_1$ .

Necessidade: Por contradição. Suponha  $(A(t), B(t), C(t), D(t))$  controlável em  $t_0$  mas com as linhas  $\Phi(t_0, t)B(t)$  linearmente dependentes em  $[t_0, t_1]$ ,  $t_1 > t_0$  finito. Então existe um vetor  $n \times 1$  constante  $\alpha \neq 0$  tal que

$$\alpha^T \Phi(t_0, t)B(t) = 0, t \in [t_0, t_1] . \quad (34)$$

Considere agora a solução da equação espaço de estado para  $t = t_1$

$$x(t_1) = \Phi(t_1, t_0)x(t_0) + \int_{t_0}^{t_1} \Phi(t, \tau)B(\tau)u(\tau)d\tau \quad (35)$$

Pré-multiplicando a solução acima por  $\Phi(t_0, t_1)$  e escolhendo  $x(t_0)=x_0=\alpha' \neq 0$  tem-se

$$\begin{aligned} \Phi(t_0, t_1)x(t_1) &= \Phi(t_0, t_1)\Phi(t_1, t_0)\alpha + \int_{t_0}^{t_1} \Phi(t_0, t_1)\Phi(t, \tau)B(\tau)u(\tau)d\tau \\ &= \alpha + \int_{t_0}^{t_1} \Phi(t_0, \tau)B(\tau)u(\tau)d\tau \end{aligned} \quad (36)$$

Agora, premultiplicando por  $\alpha^T$  tem-se:

$$\alpha^T \Phi(t_0, t_1)x(t_1) = \alpha^T \alpha + \int_{t_0}^{t_1} \alpha^T \Phi(t_0, \tau)B(\tau)u(\tau)d\tau .$$

Por hipótese,  $(A(t), B(t), C(t), D(t))$  é controlável em  $t_0$ . Assim, para qualquer estado  $x_1$ , em particular  $x_1 = x(t_1) = 0$ , existe  $u(t)$ ,  $t$  em  $[t_0, t_1]$  tal que  $x(t_1) = 0$ . Uma vez que por suposição  $\alpha^T \Phi(t_0, \cdot)B(\cdot) = 0, t \in [t_0, t_1]$ ,  $x(t_1) = 0$  implica  $\alpha^T \alpha = 0$  e conseqüentemente que  $\alpha = 0$ , o que é uma contradição e o resultado segue.  $\square$

**Sistemas invariantes no tempo**

**Teorema 4.3:** As seguintes proposições são equivalentes.

1. O sistema  $(A, B, C, D)$  é controlável em qualquer instante  $t_0 \in [0, \infty)$ .
2. As linhas de  $e^{-At} B$  são LI em  $[0, \infty)$  sobre o corpo dos números complexos.
3. A matriz de controlabilidade  $U = [B \ AB \ A^2 B \ \dots \ A^{n-1} B]$  possui posto  $n$ .

4. A matriz  $W_c(t) = \int_0^t e^{A\tau} B B^T e^{A^T \tau} d\tau$  é não singular para qualquer  $t > 0$ .

Prova. Apresenta-se a seguir a prova de  $1 \rightarrow 3$ . Considere a solução de  $(A, B, C, D)$  no intervalo  $[0, t_1]$

$x(t_1) = \Phi(t_1 - t_0)x(t_0) + \int_{t_0}^{t_1} \Phi(t_1 - \tau) B u(\tau) d\tau$ . Para simplificar considere  $x(t_1) = 0$ . Assim,

$x(t_0) = -\int_{t_0}^{t_1} \Phi(t_0 - \tau) B u(\tau) d\tau$  (lembre-se que  $\Phi(t) = e^{At}$  e que  $\Phi(t - t_0) = \Phi(t - t_1)\Phi(t_1 - t_0)e\Phi(t - t_0)^{-1} = \Phi(t_0 - t)$ ). Utilizando o teorema de Cayley-Hamilton pode-se escrever

$$A^k = \sum_{i=0}^{n-1} (\alpha_k)_i A^i, k \geq n \text{ e então}$$

$$\begin{aligned} \Phi(t) &= e^{At} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} t^k A^k \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!} \sum_{i=0}^{n-1} (\alpha_k)_i A^i = \sum_{i=0}^{n-1} A^i \sum_{k=0}^{\infty} (\alpha_k)_i \frac{t^k}{k!} \end{aligned}$$

Usando a expressão acima na equação de  $x(t_0)$  e definindo  $\gamma_i(t) = \sum_{k=0}^{\infty} (\alpha_k)_i \frac{t^k}{k!}$  tem-se

$$\begin{aligned} x(t_0) &= -\sum_{i=0}^{n-1} A^i B \int_{t_0}^{t_1} \gamma_i(t_0 - \tau) u(\tau) d\tau \\ &= -\sum_{i=0}^{n-1} A^i B q_i \end{aligned}$$

com  $q_i = \int_{t_0}^{t_1} \gamma_i(t_0 - \tau) u(\tau) d\tau$ . Assim, pode-se escrever

$x(t_0) = -Uq$  com  $U = [B \ AB \ A^2 B \ \dots \ A^{n-1} B]$  e  $q = [q_0 \ q_1 \ \dots \ q_{n-1}]$ . Esta equação é um sistema de  $n$  equações algébricas lineares com  $nm$  incógnitas. O problema de determinar  $u(t)$  para obter  $x(t_1) = 0$  reduz-se à solução deste sistema de equações. Da álgebra linear sabe-se que o sistema possui solução para  $x(t_0)$  arbitrário se o posto de  $U$  for igual a  $n$  e o resultado segue.

**Teorema 4.4.** O sistema dinâmico  $(A, B, C, D)$  ou equivalentemente o par  $(A, B)$  é controlável se e só se as condições equivalentes seguintes forem verificadas:

a) Popov-belevitch-Hautus (PBH) teste:

$$\text{posto}[sI - A \ B] = n, \forall s \tag{37}$$

o conjunto de autovalores da parte não controlável de  $(A, B)$  coincide com o conjunto de valores de  $s$  para os quais a matriz acima perde posto.

b) Kalman teste:

$$\text{posto}[B \ AB \ \dots \ (A)^{n-1} B] = n \tag{38}$$

c) Wonham teste: Dado um conjunto arbitrário simétrico  $\Lambda$  de  $n$  números complexos, existe uma matriz  $K$  tal que o espectrum de  $A+BK$  coincide com  $\Lambda$ .

Prova. a) Volta: Suponha que  $\text{posto}[sI - A \ B] < n$  para algum  $s$ . Então, existe autovetor  $v \neq 0$  tal que  $v^*[(\lambda I - A) \ B] = 0$  para  $\lambda$  o autovalor correspondente. Assim, uma vez que  $v^* \lambda I = v^* A$  e  $v^* B = 0$ ,  $v^*[B \ AB \ A^2 B \ \dots \ A^{n-1} B] = v^*[B \ \lambda B \ \lambda^2 B \ \dots \ \lambda^{n-1} B] = 0$  o que implica que  $(A,B)$  não é controlável pelo teste de Kalman.

a) Ida: Suponha agora que  $(A,B)$  não é controlável. Então, existe  $v \neq 0$  tal que

$$v^*[B \ AB \ A^2 B \ \dots \ A^{n-1} B] = 0. \text{ O que implica que } v^* A^i B = 0, \ i = 0, \dots, n-1. \text{ Assim,}$$

$$[sI - A \ B] \text{ perde posto em } s = \lambda.$$

**Corolário:**  $\lambda_i$  corresponde a um modo não controlável de  $(A,B,C,D)$  se e só se existe um autovetor  $v_i \neq 0$  satisfazendo  $v_i^*[\lambda_i I - A \ B] = 0$ .

## 4.2 Estabilizabilidade

**Teorema 4.5:** O sistema dinâmico  $(A,B,C,D)$  ou equivalentemente o par  $(A,B)$  é estabilizável se e só se as condições equivalentes seguintes forem verificadas:

b) PBH teste:

$$\text{posto}[sI - A \ B] = n, \ \text{Re}(s) \geq 0 \tag{39}$$

b) Kalman teste: A parte não controlável do sistema é estável. Já para a parte instável o posto  $\text{posto}[sI - A \ B] = n$ , o que significa que para todo  $\lambda$  e correspondente autovetor  $v$  tal que  $v^* A = v^* \lambda$  e  $\text{Re}(\lambda) \geq 0$  tem - se  $v^* B \neq 0$ .

c) Wonham teste: Existe uma matriz  $K$  tal que  $A+BK$  é estável.

## 4.3 Observabilidade

### Sistemas variantes no tempo

Considere o sistema  $(A(\cdot), B(\cdot), C(\cdot), D(\cdot))$ :

$$\dot{x} = A(t)x + B(t)u,$$

$$y = C(t)x + D(t)u \tag{25}$$

onde  $u \in R^m$  é a entrada,  $y \in R^p$ , a saída,  $x \in R^n$  o estado,  $A(\cdot), B(\cdot), C(\cdot), D(\cdot)$  matrizes  $n \times n, n \times m, p \times n$  e  $p \times m$  e  $t \in (-\infty, \infty)$ .

**Definição 4.3:** Um sistema  $(A(\cdot), B(\cdot), C(\cdot), D(\cdot))$  é observável em  $t_0$  se e só se existir um instante tempo finito  $t_1, t_1 > t_0$ , tal que para qualquer estado inicial  $x_0 \in R^n$  a entrada  $u$  e a saída  $y$  são suficientes para determinar unicamente  $x(t_0)$ .

A resposta do sistema  $(A(\cdot), B(\cdot), C(\cdot), D(\cdot))$  é dada por

$$y(t) = C(t)\Phi(t_0, t)x(t_0) + C(t)\int_{t_0}^t \Phi(t_0, \tau)B(\tau)u(\tau)d\tau + D(t)u(t) \tag{26}$$

No estudo da estabilidade de um sistema, a saída  $y$  e a entrada  $u$  são conhecidas e o estado inicial é desconhecido. Se  $x(t_0)$  for conhecido o estado pode ser computado para  $t > t_0$  a partir de

$$x(t) = \Phi(t_0, t)x(t_0) + \int_{t_0}^t \Phi(t_0, \tau)B(\tau)u(\tau)d\tau + D(t)u(t) \quad (27)$$

**Teorema 4.6:** Suponha as matrizes  $A(\cdot)$  e  $C(\cdot)$  ( $n-1$ ) vezes diferenciáveis. Então, o sistema  $(A(\cdot), B(\cdot), C(\cdot), D(\cdot))$  é observável em  $t_0$  se existir  $t_1 > t_0$  finito tal que

$$\text{posto} \begin{bmatrix} N_0(t_1) \\ N_1(t_1) \\ N_2(t_1) \\ \vdots \\ N_{n-1}(t_1) \end{bmatrix} = n \quad (28)$$

onde

$$N_{k+1}(t) = N_k(t)A(t) + \frac{d}{dt}N_k(t), \quad k = 0, 1, \dots, n-1 \text{ e } N_0(t) = C(t)$$

**Teorema 4.7:** O sistema  $(A(\cdot), B(\cdot), C(\cdot), D(\cdot))$  é observável em  $t_0$  se existir  $t_1 > t_0$  finito tal que as  $n$  colunas da matriz  $p \times n$   $C(\cdot)\Phi(t_0, \cdot)$  forem LI em  $[t_0, t_1]$ .

### Sistemas invariantes no tempo

**Teorema 4.8.** O sistema dinâmico  $(A, B, C, D)$  ou equivalentemente o par  $(A, C)$  é observável se e só se as condições equivalentes seguintes forem verificadas (T. Kailath, 1980):

1. Popov-Beleirtch-Hautus (PBH) teste:

$$\text{posto} \begin{bmatrix} sI - A \\ C \end{bmatrix} = n, \forall s \quad (29)$$

o conjunto de autovalores da parte não observável de  $(A, C)$  coincide com o conjunto de valores de  $s$  para os quais a matriz acima perde posto.

2. Kalman teste:

$$\text{posto} [C^T \quad A^T C^T \quad \dots \quad (A^T)^{n-1} C^T]^T = n \quad (30)$$

com  $O = [C^T \quad A^T C^T \quad \dots \quad (A^T)^{n-1} C^T]^T$  a matriz de observabilidade.

3. Wonham teste: Dado um conjunto arbitrário simétrico  $\Lambda$  de  $n$  números complexos, existe uma matriz  $L$  tal que o spectrum de  $A+LC$  coincide com  $\Lambda$ .

4.

**Corolário:**  $\lambda_i$  corresponde a um modo não observável de  $(A, B, C, D)$  se e só se existe um autovetor  $v_i \neq 0$

satisfazendo

$$\begin{bmatrix} \lambda_i I - A \\ C \end{bmatrix} v_i = 0.$$

### 4.4 Detectabilidade

**Teorema 4.9 :** O sistema dinâmico  $(A, B, C, D)$  ou equivalentemente o par  $(A, C)$  é detectável se e só se as condições equivalentes seguintes forem verificadas:

a) PBH teste:

$$\text{posto} \begin{bmatrix} sI - A \\ C \end{bmatrix} = n, \quad \text{Re}(s) \geq 0 \quad (31)$$

ou seja  $\text{posto} \begin{bmatrix} sI - A \\ C \end{bmatrix}$  possui posto coluna completo.

b) Kalman teste: A parte não observável do sistema é estável. Isto é, para todo  $\lambda$  e correspondente autovetor  $v$  tal que  $Av = \lambda v$  e  $\text{Re}(\lambda) \geq 0$  tem-se  $Cv \neq 0$ . Caso tenha-se  $Cv = 0$ , pelo PBH teste, o sistema não seria detectável pois

$$\text{posto} \begin{bmatrix} sI - A \\ C \end{bmatrix} v = 0 \text{ com } Cv \neq 0, \text{ tem-se que } \text{posto} \begin{bmatrix} sI - A \\ C \end{bmatrix} < n, \text{ contradizendo a condição de posto}$$

coluna completo.

c) Wonham teste: Existe uma matriz  $L$  tal que  $A+LC$  é estável.

**Teorema 4.10:** (Teorema da dualidade)

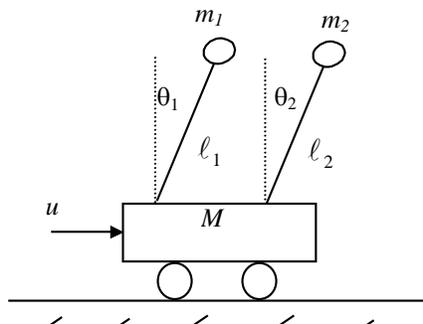
O par  $(A, B)$  é controlável se e só se o par  $(A^T, B^T)$  for observável

Prova. O par  $(A, B)$  é controlável se e só se  $W_c(t) = \int_0^t e^{A\tau} B B^T e^{A^T \tau} d\tau$  for não-singular para qualquer  $t$ . O par

$(A, C)$  é observável se e só se  $W_o(t) = \int_0^t e^{A^T \tau} C^T C e^{A\tau} d\tau$  for não singular. Substituindo  $A$  por  $A^T$  e  $C$  por  $B^T$

em  $W_o(t)$  tem-se  $W_o(t) = \int_0^t e^{A\tau} B B^T e^{A^T \tau} d\tau$  que é não-singular. Assim,  $W_o(t)$  e  $W_c(t)$  são idênticas e o teorema segue. □

**Exercício** (Kailath, 1980): Considere um carrinho com dois pêndulos invertidos:



Equações do movimento:

$$m\dot{v} = -mg\theta_1 - mg\theta_2 + u$$

$$m(\dot{v} + l_i \ddot{\theta}_i) = mg\theta_i, \quad i=1,2$$

onde  $v$  é a velocidade e  $u$  a força externa aplicada.

Pergunta-se:

1. É possível controlar os 2 pêndulos (mantê-los na vertical com  $u(\cdot)$ )?
2. O sistema é observável com  $y = \theta_1$ ?

Solução. Definindo  $x_1 = \theta_1, x_2 = \theta_2, x_3 = \dot{\theta}_1, x_4 = \dot{\theta}_2$  e eliminando  $\dot{v}$  nas equações de movimento tem-se:

$$\dot{x} = Ax + bu$$

onde

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ a_1 & a_2 & 0 & 0 \\ a_3 & a_4 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -1/M\ell_1 \\ -1/M\ell_2 \end{bmatrix}$$

com

$$a_1 = \frac{(M+m)g}{M\ell_1}, \quad a_2 = \frac{mg}{M\ell_1}, \quad a_3 = \frac{mg}{M\ell_2}, \quad a_4 = \frac{(M+m)g}{M\ell_2}$$

1. Para manter os pêndulos na vertical, a realização tem de ser controlável:  $\theta_1 = 0 = \theta_2$ .

$$\text{posto } U \rightarrow \det(U) = 0 \text{ quando } \ell_1 = \ell_2 \quad (M^2 g^2 \ell_1^2 \ell_2^2 (\ell_1 - \ell_2)^2 = 0)$$

onde  $U$  é a matriz de controlabilidade. Portanto, se  $\ell_1 = \ell_2$  o sistema não é controlável.

$$2. y = \theta_1, \quad c = [1 \ 0 \ 0 \ 0]$$

$$\det(O) = -a_2^2 = -\frac{(mg)^2}{M\ell_1} \neq 0$$

onde  $O$  é a matriz de observabilidade. Portanto o sistema é observável.

#### 4.5 Controlabilidade e observabilidade para sistemas lineares invariantes e discretos no tempo

As equações de espaço de estado discretas são normalmente escritas como:

$$x(k+1) = Ax(k) + Bu(k), \quad x(0) = x_0, \quad k \geq 0$$

$$y(k) = Cx(k) + Du(k) \tag{40}$$

A natureza recursiva das equações espaço de estado discretas torna fácil a verificação da controlabilidade e observabilidade. A matrizes de controlabilidade de dimensão  $n \times mn$

$$U := [B \ AB \ A^2B \ \dots \ A^{n-1}B] \tag{41}$$

e observabilidade de dimensão  $pn \times n$

$$V := \begin{bmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix} \quad (42)$$

desempenham um papel importante na análise de sistemas de controle.

### **Controlabilidade**

A partir das equações de estado pode-se escrever a sua solução para  $k$  no intervalo  $[0 \ n-1]$

$$x(n) = A^n x_0 + [B \ AB \ A^2 B \ \dots \ A^{n-1} B] \begin{bmatrix} u(n-1) \\ u(n-2) \\ \vdots \\ u(1) \\ u(0) \end{bmatrix} \quad (43)$$

ou

$$x(n) - A^n x_0 = [B \ AB \ A^2 B \ \dots \ A^{n-1} B] \begin{bmatrix} u(n-1) \\ u(n-2) \\ \vdots \\ u(1) \\ u(0) \end{bmatrix}.$$

A equação acima pode ser reescrita no intervalo  $[0 \ k]$ .

$$x(k) - A^k x_0 = U_k \begin{bmatrix} u(k-1) \\ u(k-2) \\ \vdots \\ u(1) \\ u(0) \end{bmatrix}$$

onde

$$U_k = [B \ AB \ A^2 B \ \dots \ A^{k-1} B].$$

Analisando a equação acima, qualquer estado inicial  $x_0$  pode ser transferido para um estado qualquer em no máximo  $n$  passos se e só se a matriz de controlabilidade  $U_k$  tiver posto  $n$ . Em outras palavras existe  $[u_{k-1} u_{k-2} \dots u_1 u_0]^T$  para quaisquer  $x(k)$  e  $x_0$  se e só se o posto  $U_k = n$ . E, pelo Teorema de Cayley Hamilton precisa-se verificar se posto  $U_k = n$  até  $k = n$ . Note que  $x(k)$  pertence ao espaço imagem de  $U_k$ .

### **Observabilidade**

A partir da equação de saída pode-se escrever a sua solução para  $k$  no intervalo  $[0 \ n-1]$ :

$$\begin{aligned}
y(0) &= Cx(0) \\
y(1) &= Cx(1) \\
&= CAx(0) + CBu(0) \\
y(2) &= Cx(2) = C(Ax(1) + Bu(1)) = CA^2x(0) + CABu(0) + CBu(1) \\
&\vdots \\
y(k-1) &= CA^{k-1}x(0) + CA^{k-2}Bu(0) + CA^{k-3}Bu(1) + \dots + CABu(k-3) + CBu(k-2)
\end{aligned} \tag{44}$$

Na forma matricial tem-se:

$$\begin{bmatrix} y(0) \\ y(1) \\ \vdots \\ y(k-1) \end{bmatrix} = Vx(0) + T \begin{bmatrix} u(0) \\ u(1) \\ \vdots \\ u(k-2) \end{bmatrix} \tag{45}$$

com

$$T = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ CB & 0 & \dots & 0 \\ CAB & CB & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ CA^{k-2}B & CA^{k-3}B & \dots & CB \end{bmatrix} .$$

Analisando (45) acima pode-se afirmar que o estado em  $t=k$  pode ser recuperado unicamente a partir das entradas e saídas se e só se a matriz de observabilidade  $V$  tiver posto completo. A equação acima pode ser reescrita para a entrada  $u(\cdot)$  igual a zero e solução  $y(\cdot)$  no intervalo  $[0 \quad k-1]$ .

$$\begin{bmatrix} y(0) \\ y(1) \\ \vdots \\ y(k-1) \end{bmatrix} = V_k x(0) \tag{46}$$

onde

$$V_k = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{k-1} \end{bmatrix} .$$

De acordo com resultados da álgebra linear,  $x(0)$  pode ser recuperado unicamente se e só se posto  $V_k = n$ , para algum  $k$ . E, pelo Teorema de Cayley Hamilton precisa-se verificar se posto  $V_k = n$  até  $k = n$ .

### Alcançabilidade

**Teorema 4.11:** Uma realização  $(A, B, C, D)$  é mínima se  $(A, B)$  for controlável e  $(A, C)$  observável.

## 5. Formas canônicas

### 5.1 Decomposição de Kalman

**Teorema 5.1:** Decomposição de Kalman. Seja

$$(A, B, C, D): \quad \dot{x} = Ax + Bu$$

$$y = Cx + Du$$

existe uma transformação equivalente  $\left[ \begin{array}{c|c} A & B \\ \hline C & D \end{array} \right] := C(sI - A)^{-1}B + D$  tal que o sistema  $(A, B, C, D)$  torna-se:

$$(\bar{A}, \bar{B}, \bar{C}, \bar{D}): \quad \begin{bmatrix} \dot{\bar{x}}_{co} \\ \dot{\bar{x}}_{c\bar{o}} \\ \dot{\bar{x}}_{\bar{c}o} \\ \dot{\bar{x}}_{\bar{c}\bar{o}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{A}_{co} & 0 & \bar{A}_{13} & 0 \\ \bar{A}_{21} & \bar{A}_{c\bar{o}} & \bar{A}_{23} & \bar{A}_{24} \\ 0 & 0 & \bar{A}_{\bar{c}o} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \bar{A}_{\bar{c}\bar{o}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{x}_{co} \\ \bar{x}_{c\bar{o}} \\ \bar{x}_{\bar{c}o} \\ \bar{x}_{\bar{c}\bar{o}} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \bar{B}_{co} \\ \bar{B}_{c\bar{o}} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$y = \begin{bmatrix} \bar{C}_{co} & 0 & \bar{C}_{\bar{c}o} & 0 \end{bmatrix} \bar{x} + Du$$

Em que

$\bar{x}_{co}$  : vetor de estado controlável e observável;

$\bar{x}_{c\bar{o}}$  : vetor de estado controlável e não observável;

$\bar{x}_{\bar{c}o}$  : vetor de estado não controlável e observável;

$\bar{x}_{\bar{c}\bar{o}}$  : vetor de estado não controlável não observável.

e a função de transferência de  $(A, B, C, D)$  é dada por :

$$\bar{G}(s) = \bar{C}_{co}(sI - \bar{A}_{co})^{-1}\bar{B}_{co} + D$$

a qual depende apenas da equação controlável e observável do sistema.

**Verificação:** Se o sistema  $(A, B, C, D)$  não é controlável, este pode ser transformado em

$$\begin{bmatrix} \dot{\bar{x}}_c \\ \dot{\bar{x}}_{\bar{c}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{A}_c & \bar{A}_{12} \\ 0 & \bar{A}_{\bar{c}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{x}_c \\ \bar{x}_{\bar{c}} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \bar{B}_c \\ 0 \end{bmatrix} u$$

$$y = \begin{bmatrix} \bar{C}_c & \bar{C}_{\bar{c}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{x}_c \\ \bar{x}_{\bar{c}} \end{bmatrix} + Du$$

com  $x := Q\bar{x}$ ,  $\bar{x} = \begin{bmatrix} \bar{x}_c \\ \bar{x}_{\bar{c}} \end{bmatrix}$  e  $Q = [q_1 \ \dots \ q_{k_1} \ q_{k_1+1} \ \dots \ q_n]$ , sendo  $[q_1 \ \dots \ q_{k_1}]$  gerado pelas colunas linearmente

independentes de  $[B \ AB \ \dots \ A^{n-1}B]$ . A  $i$ -ésima coluna de  $\bar{A}$  é a representação de  $Aq_i$  com respeito à base

$[q_1 \ \dots \ q_{k_1}]$ . O vetor  $Aq_i$ ,  $i = 1, \dots, k_1$  são linearmente dependentes no conjunto  $[q_1 \ \dots \ q_{k_1}]$  e linearmente

independentes em  $[q_{k_1+1}, \dots, q_n]$ . Portanto a matriz  $A$  tem a forma mostrada. As colunas de  $\bar{B}$  representam as colunas

de  $B$  com respeito à base  $Q = [q_1 \ \dots \ q_{k_1} \ q_{k_1+1} \ \dots \ q_n]$  e as colunas de  $\bar{B}$  dependem somente de  $[q_{k_1+1}, \dots, q_n]$ .

Portanto,  $\bar{B}$  tem a forma mostrada. O sistema controlável é então dado por:

$$\dot{\bar{x}}_c = \bar{A}_c \bar{x}_c + \bar{B}_c u$$

$$y = \bar{C}_c \bar{x}_c$$

Assim, o espaço de estado  $\bar{x}$  é particionado em dois espaços ortogonais:  $\left\{ \begin{bmatrix} \bar{x}_c \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$  e  $\left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ \bar{x}_{\bar{c}} \end{bmatrix} \right\}$  com o primeiro sendo o subespaço controlável e o segundo o subespaço não controlável. Então, o subespaço controlável é gerado pelas colunas  $q_i, i = 1, \dots, k_1$  ou, equivalentemente, pela imagem da matriz de controlabilidade.

Se a parte controlável não for observável esta pode ser transformada em:

$$\begin{bmatrix} \dot{\bar{x}}_{c\bar{o}} \\ \dot{\bar{x}}_{co} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{A}_{c\bar{o}} & \bar{A}_{12} \\ 0 & \bar{A}_{co} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{x}_{c\bar{o}} \\ \bar{x}_{co} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \bar{B}_{c\bar{o}} \\ \bar{B}_{co} \end{bmatrix} u$$

$$y = \begin{bmatrix} 0 & \bar{C}_{co} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{x}_{c\bar{o}} \\ \bar{x}_{co} \end{bmatrix} + Du$$

onde o sistema observável e controlável é:

$$\dot{\bar{x}}_{co} = \bar{A}_c \bar{x}_{co} + \bar{B}_{co} u$$

$$y = \bar{C}_{co} \bar{x}_{co}$$

Similarmente, a parte não controlável pode ser decomposta em parte observável e parte não observável.

Combinando estas duas partes chega-se à forma canônica de decomposição do sistema. Resta mostrar que

$$C(sI-A)B + D = \bar{C}_{co}(sI - \bar{A}_{co})^{-1}\bar{B}_{co} + D$$

Utilizando a forma proposta as seguintes correspondências podem ser tiradas:

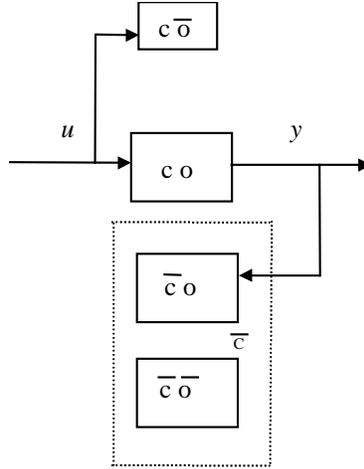
$$\bar{C}(sI - \bar{A})^{-1}\bar{B} \rightarrow \begin{bmatrix} \bar{C}_{co} & 0 & \bar{C}_{\bar{c}\bar{o}} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} sI - \bar{A}_{co} & 0 & -\bar{A}_{13} & 0 \\ \bar{A}_{21} & sI - \bar{A}_{\bar{c}\bar{o}} & -\bar{A}_{23} & -\bar{A}_{24} \\ 0 & 0 & sI - \bar{A}_{\bar{c}o} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & sI - \bar{A}_{\bar{c}\bar{o}} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \bar{B}_{co} \\ \bar{B}_{\bar{c}\bar{o}} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \bar{C}_{co} & 0 & \bar{C}_{\bar{c}\bar{o}} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} sI - \bar{A}_{co} & 0 & \times & 0 \\ \times & sI - \bar{A}_{\bar{c}\bar{o}} & \times & \times \\ 0 & 0 & sI - \bar{A}_{\bar{c}o} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & sI - \bar{A}_{\bar{c}\bar{o}} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \bar{B}_{co} \\ \bar{B}_{\bar{c}\bar{o}} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \bar{C}_{co} & (sI - \bar{A}_{co})^{-1} & 0 & \times & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{B}_{co} \\ \bar{B}_{\bar{c}\bar{o}} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$= \bar{C}_{co}(sI - \bar{A}_{co})^{-1}\bar{B}_{co} + D$$

Assim,  $(\bar{A}_{co}, \bar{B}_{co}, \bar{C}_{co})$  é observável e controlável. A figura abaixo ilustra as conexões entrada-saída do sistema.



**Observação 1:** De (53), tem-se que o espaço controlável é da forma  $\{[x_{c_o}^T, x_{\bar{c}_o}^T, 0, 0]^T\}$  e o espaço não observável é da forma  $\{[0, x_{\bar{c}_o}^T, 0, x_{\bar{c}_o}^T]^T\}$ .

**Observação 2:** Existe uma perda de informação sobre a dinâmica das variáveis de estado não observáveis, e não é possível atuar sobre variáveis não controláveis.

## 5.2 Forma de Jordan

Para um sistema  $(A, b)$  controlável, a forma de Jordan pode ser obtida a partir da transformação de similaridade dada por

$$\bar{x} = Px \text{ com } P^{-1} = [q_1 \quad q_2 \quad \cdots \quad q_n], \quad q_i, i = 1, \dots, n \text{ autovetores de } A.$$

A forma de Jordan permite verificar por inspeção a controlabilidade e observabilidade de um sistema  $(A, B, C, D)$ . Considere o sistema espaço de estado

$$(J, B, C): \quad \dot{x} = Jx + Bu \\ y = Cx$$

$J$  está na forma de Jordan. Considere

$$J := \text{diag}(J_1, J_2)$$

onde  $J_1$  consiste de 3 blocos de Jordan associados a um mesmo autovalor  $\lambda_1$  e  $J_2$  2 blocos associados a um autovalor  $\lambda_2$ :

$$J_1 := \text{diag}(J_{11}, J_{12}, J_{13})$$

$$J_2 := \text{diag}(J_{21}, J_{22})$$

Denote a linha de  $B$  correspondente à última linha de  $J_{ij}$  como  $b_{\ell_{ij}}$  e a coluna de  $C$  correspondente à primeira coluna de  $J_{ij}$  como  $c_{f_{ij}}$ .

**Teorema 5.2.** O sistema  $(J, B, C)$  é controlável se e só se as linhas de  $B$   $\{b_{\ell_{11}}, b_{\ell_{12}}, b_{\ell_{13}}\}$  forem linearmente independentes e os vetores  $\{b_{\ell_{21}}, b_{\ell_{22}}\}$  forem linearmente independentes. 2. O sistema  $(J, B, C)$  é observável se e só se as colunas de  $C$   $\{c_{f_{11}}, c_{f_{12}}, c_{f_{13}}\}$  forem linearmente independentes e as colunas  $\{c_{f_{21}}, c_{f_{22}}\}$  forem linearmente independentes.

Verificação. Utilizar o PBH teste:  $\text{posto}[sI - J \quad B] = n$ , fazendo  $s = \lambda_1$  e operações elementares de colunas e depois repetir o procedimento para  $s = \lambda_2$ .

Exemplo

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & \lambda_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda_2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda_2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda_2 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ \hline 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} u$$

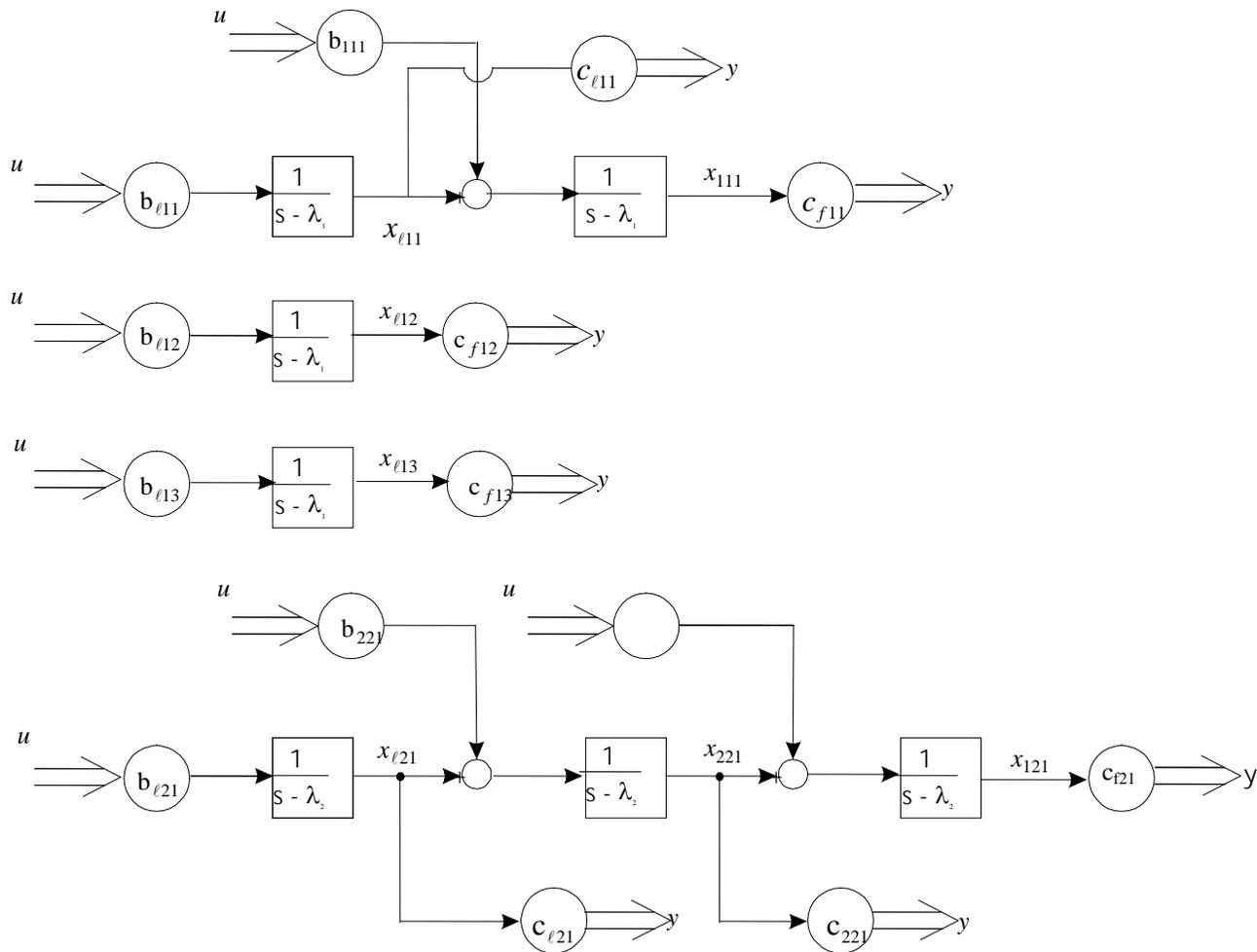
$$y = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 3 & 0 & 2 & 0 \end{bmatrix} x$$

---


$$x = [x_{f11} \quad x_{\ell11} \quad x_{f12} \quad x_{f13} \quad x_{f21} \quad x_{c221} \quad x_{\ell21}]'$$

Sistema controlável:  $[1 \ 0 \ 0]$ ;  $[0 \ 1 \ 0]$ ;  $[1 \ 1 \ 1]$  são linearmente independentes e  $[1 \ 1 \ 1]$  diferente de zero.

Sistema não observável:  $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ ;  $\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$ ;  $\begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$  linearmente independentes, mas,  $\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$  igual a zero.



*Observação:* Para um sistema com  $q$  blocos de Jordan associados ao mesmo autovalor e com  $m$  entradas e  $p$  saídas o sistema é controlável (observável) se e só se  $q \leq m$  ( $q \leq p$ ). Caso SISO  $q = 1$ .

### 5.3 Forma modal

A forma modal pode ser obtida a partir da transformação de similaridade  $\bar{x} = Px$  com  $P^{-1} = Q\bar{Q}$  em que  $\bar{x} = Px$  com  $\bar{Q}$ , por exemplo, para 2 polos complexos dada por:

$$\bar{Q} = \begin{bmatrix} I & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0.5 & -0.5j & 0 & 0 \\ 0 & 0.5 & 0.5j & 0 & 0 \\ \vdots & 0 & 0 & 0.5 & -0.5j \\ 0 & 0 & 0 & 0.5 & 0.5j \end{bmatrix}$$

## 6. Equação de Lyapunov

Os testes de estabilidade, controlabilidade e observabilidade podem ser feitos indiretamente via a equação de Lyapunov. Considere a equação de Lyapunov (lembrar da equação de Sylvester vista anteriormente

$AM + MB = C$  com  $A$   $n \times n$  e  $B$   $m \times m$

$$A^T P + PA + Q = 0 \quad (47)$$

com  $A$  e  $Q$  matrizes quadradas conhecidas). Sabe-se que esta equação possui solução única se  $\lambda_i(A) + \lambda_j(A^T) \neq 0, \forall i, j = 1, \dots, n$ . Para mostrar essa condição, escrever (47) da forma  $(A \oplus A) \text{vec}(P) = \text{vec}(Q)$  em que  $\text{vec}(X)$  é um vetor coluna formado pelas colunas de  $P$  empilhadas e  $\oplus$  é a soma de Kronecker definida por  $A \oplus B = (A \otimes I_m) + (I_n \otimes B) \in C^{nm \times nm}$  com  $\otimes$  o produto de Kronecker, por exemplo, se  $A$  é  $n \times n$  e  $B$   $m \times m$ , então, o produto de Kronecker  $A \otimes B$  é a matriz bloco  $nm \times nm$ :

$$A \otimes B = \begin{bmatrix} a_{11}B & \cdots & a_{1n}B \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1}B & \vdots & a_{nm}B \end{bmatrix}$$

Agora, verificar que os autovalores de  $A \oplus A$  são dados pela soma  $\lambda_i(A) + \lambda_j(A), \forall i, j = 1, \dots, n$ . A seguir estuda-se a relação entre a estabilidade e a solução  $P$ .

**Lema 6.1:** Suponha  $A$  estável. Então, as seguintes afirmações são verdadeiras.

- i)  $P = \int_0^\infty e^{A^T t} Q e^{At} dt$
- ii)  $P > 0$  se  $Q > 0$  e  $P \geq 0$  se  $Q \geq 0$
- iii) Suponha  $Q \geq 0$ .  $(A, Q)$  é observável ssse  $P > 0$

**Prova.** A afirmação i) segue substituindo  $P$  na equação de Lyapunov:

$$\begin{aligned} A^T P + PA &= \int_0^\infty A^T e^{A^T t} Q e^{At} dt + \int_0^\infty e^{A^T t} Q e^{At} A dt \\ &= \int_0^\infty \frac{d}{dt} e^{A^T t} Q e^{At} dt \\ &= e^{A^T t} Q e^{At} \Big|_0^\infty \\ &= 0 - Q = -Q \end{aligned}$$

Para verificar as afirmações ii) e iii) suponha  $\lambda$  um autovalor de  $A$  e  $v$  um autovetor correspondente tal que  $Av = \lambda v$ . Pré-multiplicando  $A^T P + PA + Q = 0$  por  $v^*$  e pós-multiplicando por  $v$  usando  $v^* A^T = v^* \lambda^*$  obtém-se:  $2\text{Re}(\lambda)(v^* P v) + v^* Q v = 0$ . Agora, desde que  $A$  é estável tem-se  $P > 0$  se  $Q > 0$  e  $P \geq 0$  se  $Q \geq 0$  e portanto ii) segue. O resultado iii) pode ser mostrado usando o teste de Kalman para observabilidade do par  $(A, Q)$  que diz que para todo  $\lambda$  e correspondente autovetor  $v$  tal que  $Av = \lambda v$  tem-se  $Qv \neq 0$ . Necessidade. Desde que  $A$  é estável e  $Q \geq 0$  tem-se  $Qv \neq 0$  se  $P > 0$ . Suficiência. Suponha  $P > 0$  então  $Qv \neq 0$  e  $(A, Q)$  é observável.  $\square$

**Corolário 6.1:** Suponha  $A$  estável. O par  $(A, C)$  é observável se e só se a solução da seguinte equação de Lyapunov for definida positiva:

$$A^* L_o + L_o A + C^* C = 0 \quad (49)$$

A solução  $L_o$  é chamada de Gramiano de observabilidade. Similarmente, o par  $(A, B)$  é controlável se e só se a solução da seguinte equação de Lyapunov for definida positiva:

$$A^* L_c + L_c A + B B^* = 0. \quad (50)$$

A solução  $L_c$  é chamada de Gramiano de controlabilidade.

**Lema 6.2.** Suponha  $P$  é a solução da equação de Lyapunov  $A^T P + P A + Q = 0$ .

$$i) \operatorname{Re} \lambda_i(A) \leq 0 \text{ se } P > 0 \text{ e } Q \geq 0$$

$$ii) A \text{ é estável se } P > 0 \text{ e } Q > 0$$

$$iii) A \text{ é estável se } P \geq 0, Q \geq 0 \text{ e } (A, Q) \text{ é detectável}$$

**Prova.** Suponha  $\lambda$  um autovalor de  $A$  e  $v$  um autovetor correspondente tal que  $Av = \lambda v$ . Pré-multiplicando  $A^T P + P A + Q = 0$  por  $v^*$  e pós-multiplicando por  $v$  usando  $v^* A^T = v^* \lambda^*$  obtém-se:

$$2\operatorname{Re}(\lambda)(v^* P v) + v^* Q v = 0. \quad (52)$$

Agora, se  $P > 0$  então  $v^* P v > 0$  e fica claro que  $\operatorname{Re}(\lambda) \leq 0$  se  $Q \geq 0$  e  $\operatorname{Re}(\lambda) < 0$  se  $Q > 0$ . Daqui  $i)$  e  $ii)$  seguem. O resultado  $iii)$  segue usando contradição. Suponha  $\operatorname{Re}(\lambda) \geq 0$ . Uma vez que  $Q \geq 0$ , isto implica que  $v^* Q v = 0$ , ou seja,  $Q v = 0$  usando (52). Isto implica que  $\lambda$  é um modo instável e não observável contradizendo a suposição  $(A, Q)$  detectável.

**Lema 6.3.** (Desoer, 1991) Suponha  $Q = Q^* > 0$  e que a equação de Lyapunov tem solução única  $P = P^* > 0$ , então o estado de equilíbrio zero de  $\dot{x} = Ax$  é exponencialmente estável, i.e.  $\lambda(A) \subset C_-$ .

**Prova:** Considere a forma quadrática:

$$V(x) = x^* P x$$

Desde que  $P = P^* > 0$ , pode-se obter  $P = U^* \Lambda U$  com  $U^* U = I$  e  $\Lambda$  a matriz diagonal contendo os autovalores de  $P$  e então pode-se escrever:

$$\lambda_{\min}(P) \|x\|^2 \leq V(x) \leq \lambda_{\max}(P) \|x\|^2, \quad \forall x \in C^n$$

utilizando

$$x^* P x = x^* U^* \Lambda U x = z^* \Lambda z; z := U x$$

$$\lambda_{\min}(P) I \leq \Lambda \leq \lambda_{\max}(P) I$$

$$z^T z = \|x\|^2.$$

Calculando a derivada de  $V(x)$  obtém-se

$$\dot{V}(x) = x^* [A^T P + P A] x = -x^* Q x,$$

e como  $Q = Q^* > 0$  tem-se

$$\lambda_{\min}(Q) \|x\|^2 \leq x^* Q x, \quad \forall x \in C^n.$$

Daqui, ao longo de qualquer trajetória  $\forall x_0 \in C^n, x_0 \neq 0, \forall t_0 \in R_+$  tem-se

$$\frac{\dot{V}}{V} \leq -\frac{\lambda_{\min}(Q)}{\lambda_{\min}(P)} := -2\alpha < 0, \quad \forall t \geq t_0$$

Por integração tem-se:

$$V(x) \leq V(x_0) \exp[-2\alpha(t - t_0)], \quad \forall t \geq t_0$$

Finalmente, usando a desigualdade de  $V(x)$  acima pode-se escrever:

$$\frac{\lambda_{\min}(P)\|x\|^2}{\lambda_{\max}(P)\|x_0\|^2} \leq \frac{V(x)}{V(x_0)} \leq \exp[-2\alpha(t - t_0)]$$

o que dá

$$\|x\|^2 \leq \frac{\lambda_{\max}(P)}{\lambda_{\min}(P)} \exp[-2\alpha(t - t_0)] \|x_0\|^2$$

Assim, com  $x(t) = \Phi(t, t_0)x_0$  e usando a norma induzida:

$$\|\Phi(t, t_0)\| := \sup_{\|x_0\| \neq 0} \frac{\|\Phi(t, t_0)x_0\|}{\|x_0\|}$$

tem-se:

$$\|\Phi(t, t_0)\|^2 \leq \frac{\lambda_{\max}(P)}{\lambda_{\min}(P)} \exp[-2\alpha(t - t_0)], \quad \forall t \geq t_0$$

e pelo Teorema 3.11 segue que o sistema é exponencialmente estável.