Pêndulo Simples

Disciplina: SEL 5853 - Sistemas Lineares (2020)
Exercícios: **03** - Lista 1 e **02** - Lista 2

Paulo Victor Galvão

Abril 2020

Tópicos

3º Questão da lista 01

- Equação do Pêndulo;
- Espaço de Estados para o Pêndulo;
- Comportamento das Variáveis de Estados em Matlab;
- Linearização do Sistema;
- Comportamento das Variáveis de Estados do Sistema Linearizado;
- Comparação entre os Sistemas.

2º Questão da lista 02

- Construção do Retrato de Fase do Sistema;
- Retrato de Fase Para o Sistema com $b < 1$;
- Retrato de Fase Para o Sistema com $b > 1$.

Equação do Pêndulo

3º Questão da lista 01

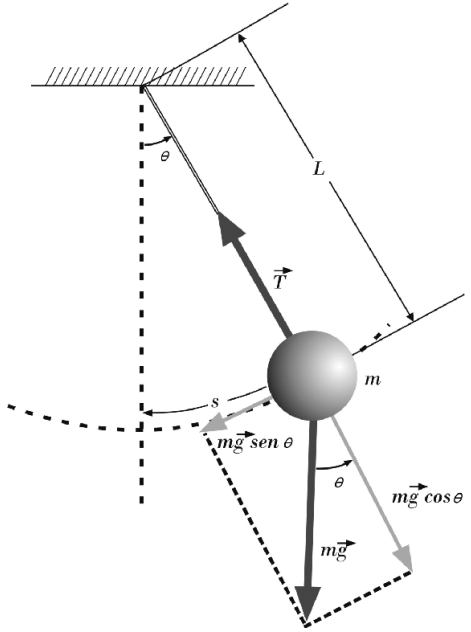
Resolução Utilizando Matlab

A dinâmica do pêndulo pode ser descrita pela seguinte equação diferencial:

$$mL^2\ddot{\theta} + b\dot{\theta} + mgLsen\theta = u \tag{1}$$

em que:

- u é o torque externo aplicado ao pêndulo;
- b é o coeficiente de atrito no apoio;
- L é o comprimento da haste;
- g é a aceleração gravitacional.



Espaço de Estados para o pêndulo

Definindo as variáveis de estados como θ e ω, temos:

$$x = \begin{bmatrix} \theta \\ \dot{\theta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \theta \\ \omega \end{bmatrix} \tag{2}$$

A representação em espaço de estados pode ser dada por:

$$\begin{bmatrix} \dot{\theta} \\ \dot{\omega} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \omega \\ \ddot{\omega} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \omega \\ -\frac{g}{L}\sin(\theta) - \frac{b}{mL^2}\omega + \frac{1}{mL^2}u \end{bmatrix} \tag{3}$$

Espaço de Estados para o pêndulo

Considerando os seguintes valores:

Definição	**Parâmetro**	**Valor**
Massa da esfera	m	0.1 kg
Coeficiente de atrito	b	0.015 kg.m/s
Comprimento da haste	m	0.2 m
Aceleração gravitacional	g	9.81 m/s^2

Após a substituição dos valores, a equação em espaço de estados obtida é:

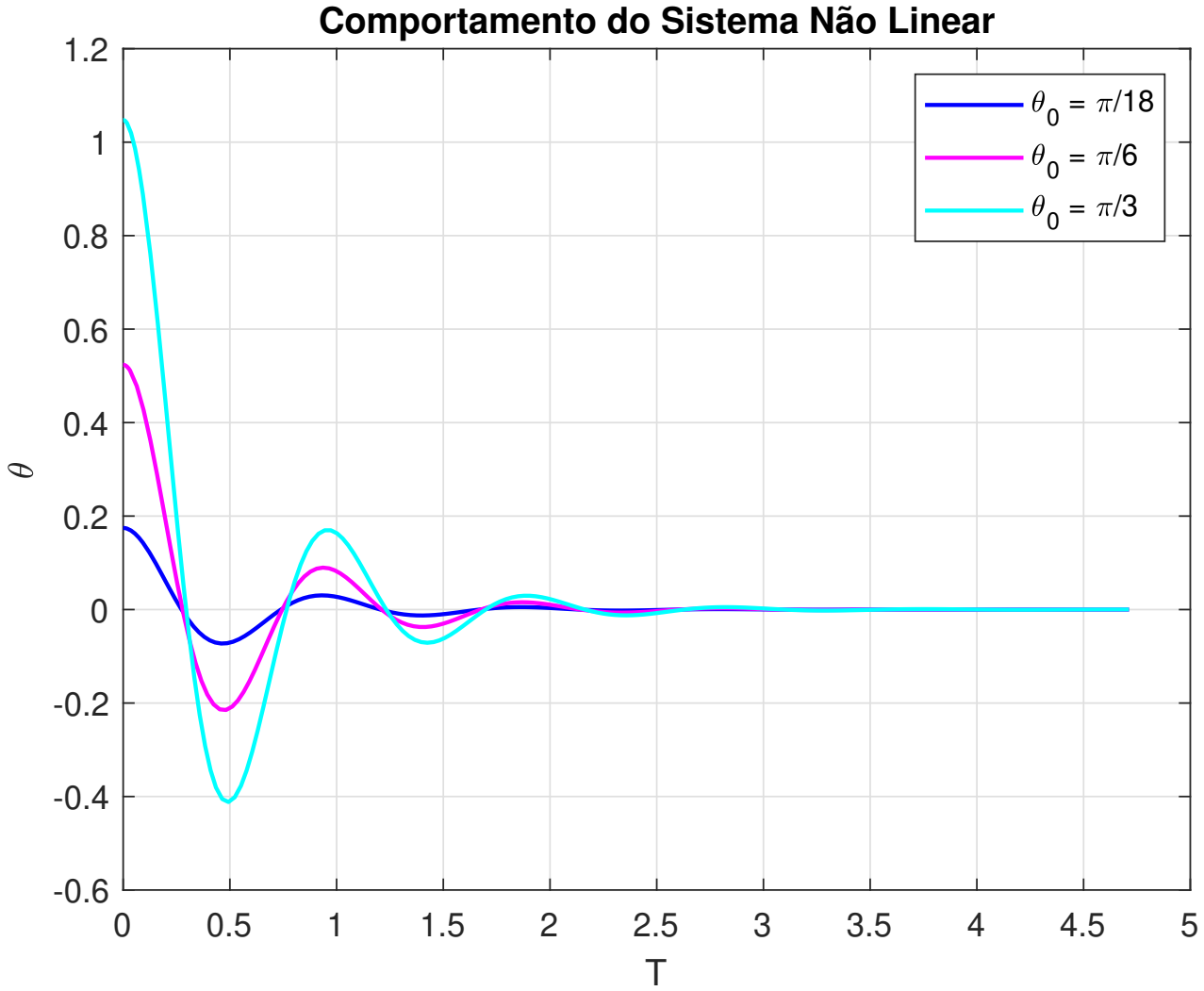
$$\dot{x} = \begin{bmatrix} \omega \\ -0.75\omega - 49.05\sin(\theta) + 250u \end{bmatrix} \tag{4}$$

Implementação em Matlab

```
%% Parâmetros do sistema
m = 0.1;                %Massa do sistema
b = 0.015;              %Coeficiente de atrito
L = 0.2;                %Comprimento da haste
g = 9.81;               %Aceleração gravitacional
T = 1.5*pi;             %Tempo de simulação
u = 0;                  %Entrada de controle

x0 = [pi/18 pi/6 pi/3; 0 0 0];
cor = ['b', 'm', 'c'];
```

```
%% Cálculo do sistema não-linear
for i = 1:3
sistema = @(t,x) [x(2); (-b/(m*L^2))*x(2) - g/L*sin(x(1)) + 1/(m*L^2)*u];

[t,x] = ode45(sistema, [0 T], [x0(:,i)]);
end
```

Comportamento das variáveis de estados



Linearização do sistema

O sistema linearizado em torno de $x_e = [0 \;\; 0]'$é encontrado calculando a matriz Jacobiana de F(x,u) em relação a x e a u.

$$\dot{\tilde{x}} = \frac{\partial F}{\partial x}\tilde{x} + \frac{\partial F}{\partial u}\tilde{u} \tag{5}$$

O sistema linearizado para o pêndulo é dado por:

$$\dot{\tilde{x}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{g}{L} & -\frac{b}{mL^2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{mL^2} \end{bmatrix} u \tag{6}$$

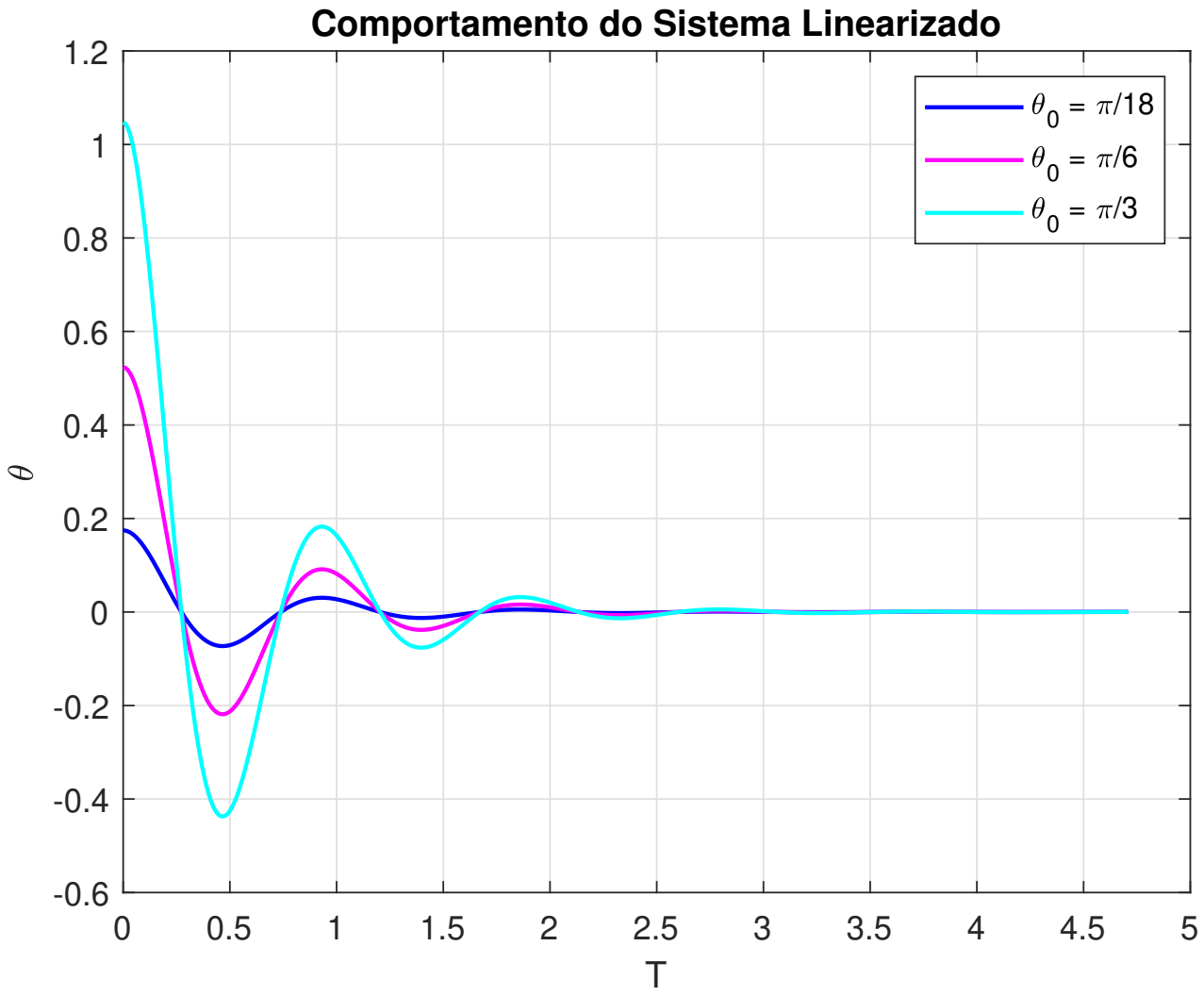
$$\tilde{y} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} u \tag{7}$$

Implementação em Matab para o Sistema Linearizado

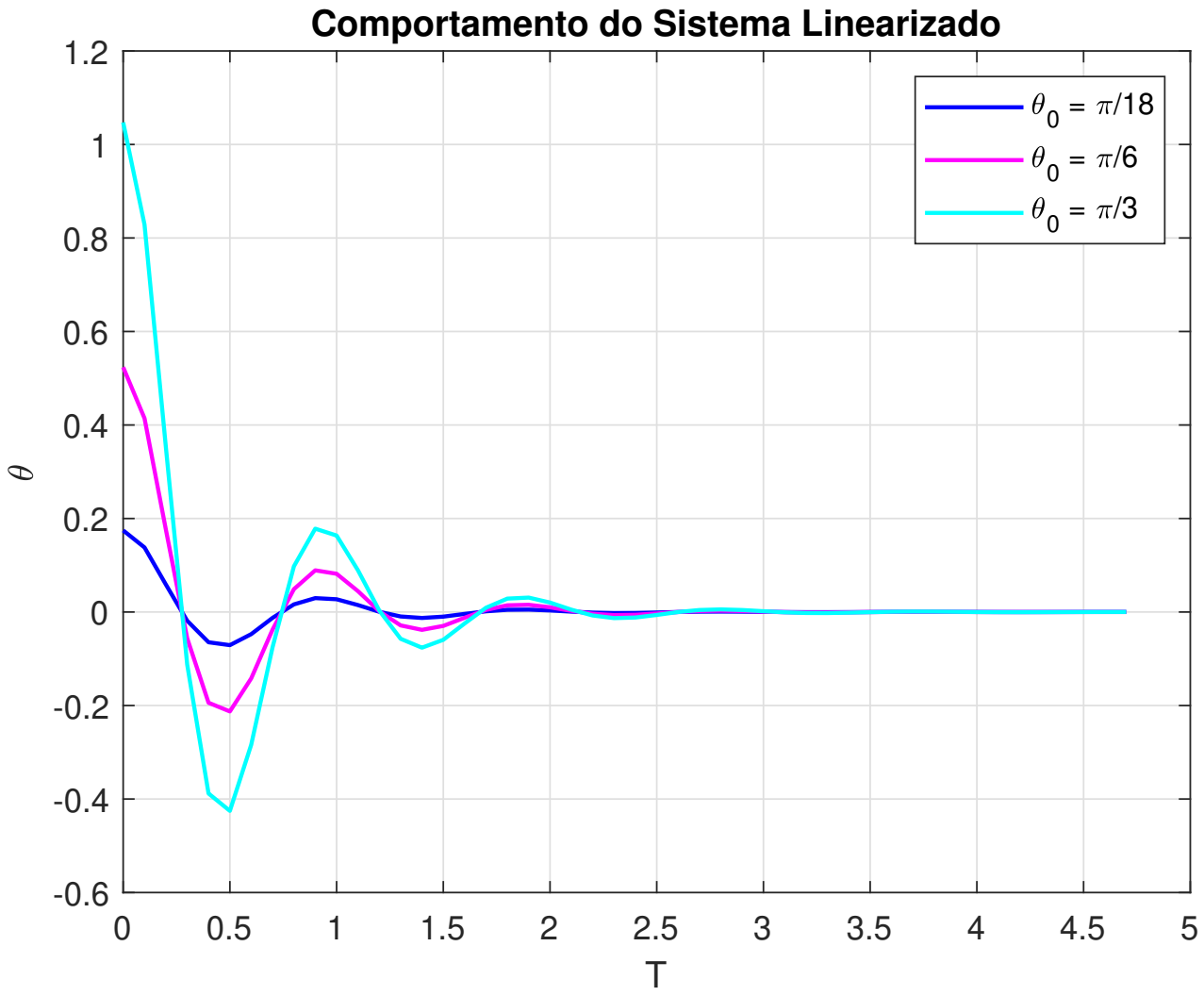
```
%% Parametros do sistema

m = 0.1;            %Massa do sistema
b = 0.015;          %Coeficiente de atrito
L = 0.2;            %Comprimento da haste
g = 9.81;           %Aceleração gravitacional
T = 1.5*pi;         %Tempo de simulação
cor = ['b', 'm', 'c'];

x0 = [pi/18 pi/6 pi/3; 0 0 0];

A = [0 1; -g/L -b/(m*L^2)];
B = [0; 1/(m*L^2)];
C = [1 0; 0 1];
D = [0; 0];

sys = ss(A,B,C,D);
```

```
%% Cálculo do sistema e gráficos
for i = 1:3
  t = 0:0.01:T;
  u = zeros(length(t), 1);
  y = lsim(sys, u, t, x0(:,i));
end
```

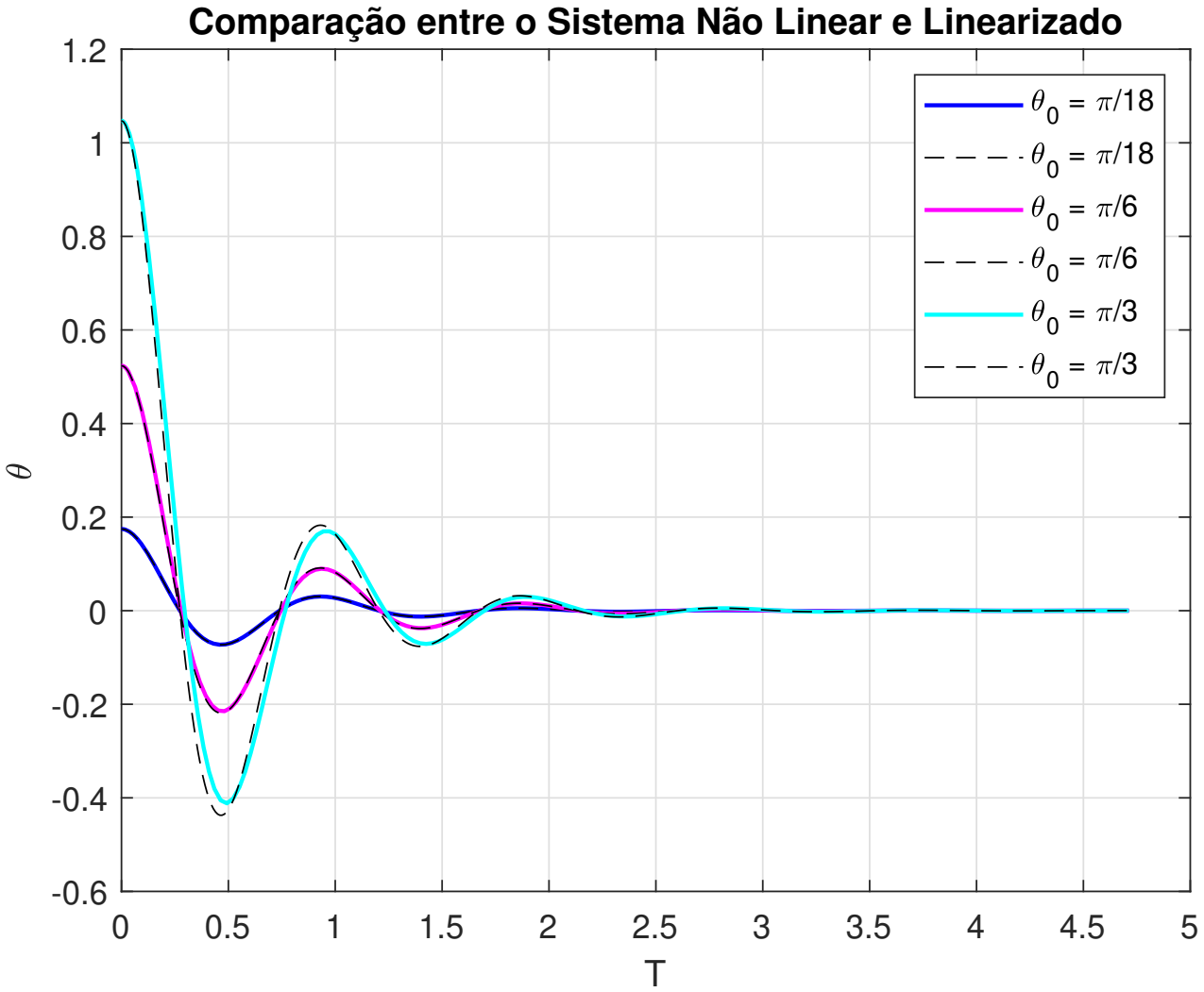
Comportamento das Variáveis de Estados para o Sistema Linearizado (t = 0.01s)



Comportamento das Variáveis de Estados para o Sistema Linearizado (t = 0.1s)



Comparação entre o sistema Não linear e sistema Linearizado



Comparação entre o sistema Não linear e sistema Linearizado

Conclusão

A partir do gráfico do slide anterior é possível perceber que para valores pequenos de ângulo θ_0, como $\frac{\pi}{18}$, o comportamento do sistema linearizado é praticamente igual ao do sistema não linear. Conforme o ângulo θ_0 aumenta, como em $\frac{\pi}{3}$ o comportamento do sistema linearizado se afasta do sistema não linear.

Construção do Retrato de fase do Sistema

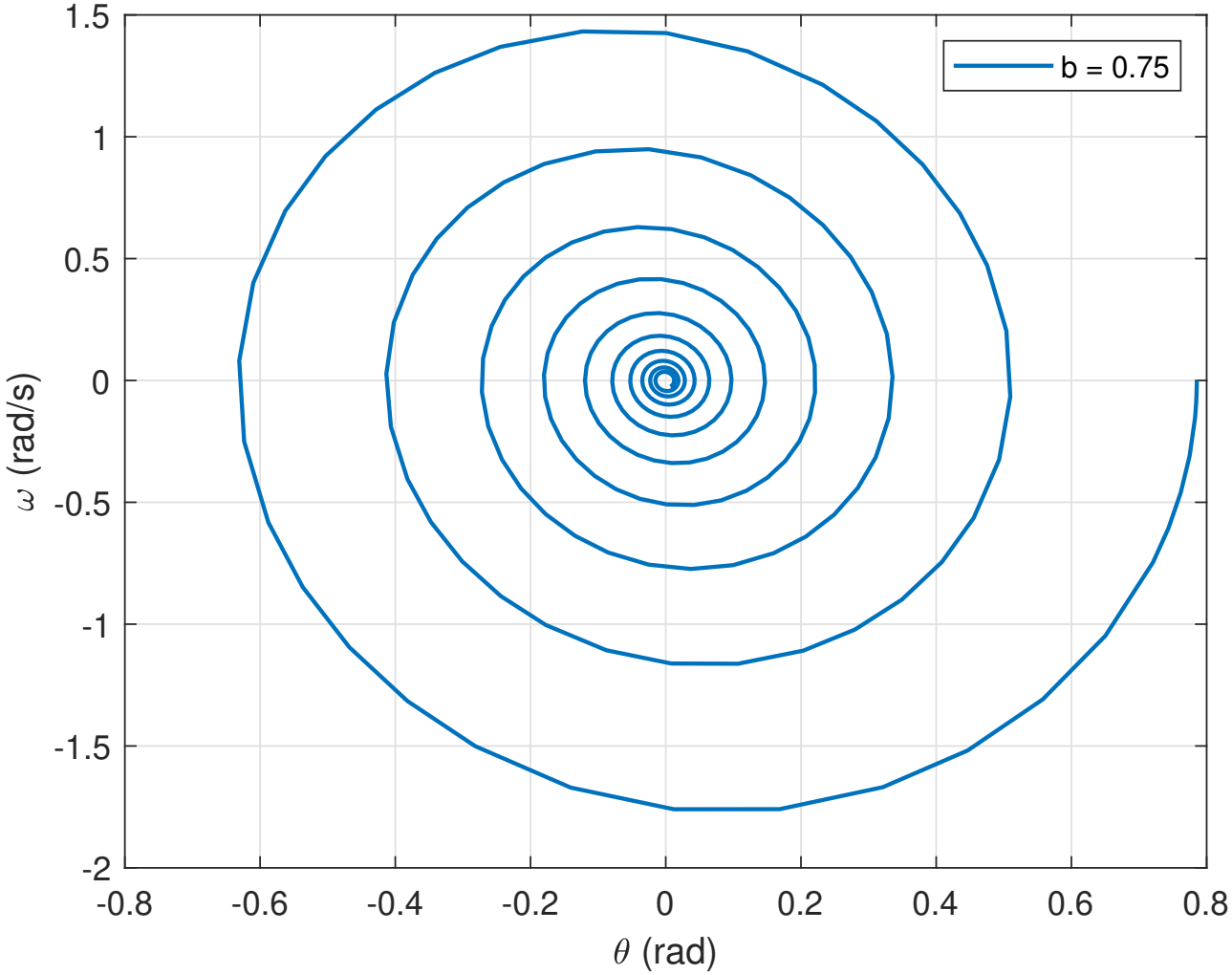
2º Questão da lista 02

Plotar o diagrama de fase para a) $b < 1$ e b) $b > 1$

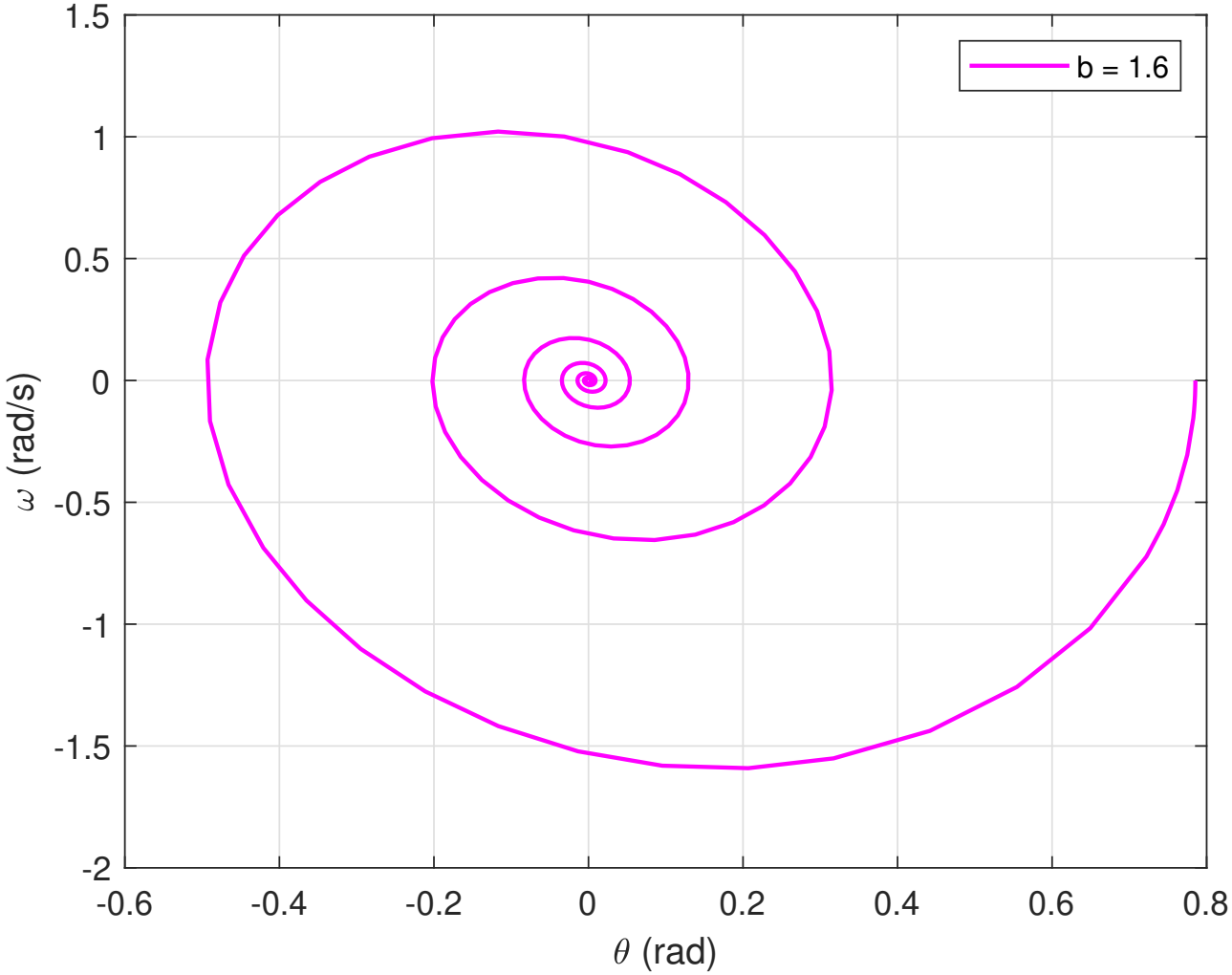
Para construção do retrato de fase do sistema foram utilizados os seguintes valores para os parâmetos:

Definição	**Parâmetro**	**Valor**
Massa da esfera	m	1 kg
Coeficiente de atrito	b	a) 0.75 kg.m/s b) 1.6 kg.m/s
Comprimento da haste	m	1.5 m
Aceleração gravitacional	g	9.81 m/s^2

Retrato de Fase para o sistema



Retrato de Fase para o sistema



Comparação entre o comportamento para $b < 1$ e $b > 1$

Conclusão

A partir do retrato de fase do sistema é possível perceber que para valores de $b < 1$, como $b = 0.75$ o sistema apresenta grande oscilação até se acomodar na origem. Já para valores de $b > 1$, como $b = 1.6$, temos que a oscilação é menor e o sistema se acomoda na origem de forma mais rápida, em função do alto amortecimento.

The End