Resposta em Freqüência para Sistemas Multivariáveis

Valores Singulares de Matrizes

Profa. Vilma A. Oliveira

USP São Carlos

Abril de 2009

Sumário

1. Introdução

A saída em regime de um sistema linear a uma entrada exponencial complexa é dada pelo produto da entrada pela função de transferência na freqüência correspondente. Seja

$$u(t) = u_0 e^{st}$$

$$\begin{aligned} y(t) &= \int_{-\infty}^{t} g(t-\tau) u_0 e^{s\tau} d\tau \\ &= \int_{-\infty}^{t} g(t-\tau) e^{s\tau} d\tau u_0 \end{aligned}$$

com $t_1 = t - \tau$

$$\begin{aligned} y(t) &= \int_0^{\infty} g(t_1) e^{s(t-t_1)} dt_1 u_0 \\ &= \int_0^{\infty} g(t_1) e^{-st_1} dt_1 u_0 e^{st} \end{aligned}.$$

Reconhecendo a última integral como a transformada de Laplace da resposta impulsional tem-se

$$y(t) = G(s) u_0 e^{st} .$$

Para $s = jw$ tem-se a chamada resposta em freqüência

$$\begin{aligned} y(t) &= G(jw) u_0 e^{jwt} \\ &= \left|G(jw) u_0\right| e^{j(wt+\varphi)} \end{aligned}$$

com $G(jw)$ a transformada de Fourier do sistema e $\varphi = \mathrm{atan}(\mathrm{imag} G(jw) / \mathrm{Real} G(jw))$.

Exercício 1: Para $u(t) = \alpha \cos(wt + \theta)$ verificar que a saída $y(t)$ em regime é dada por

$y(t) = \alpha \left|G(jw)\right| \cos(wt + \theta + \varphi)$ com φ já definido.

2. Ganho para Sistemas MIMO

$$\text{Ganho} = \frac{\|y\|}{\|u\|}$$

$$= \frac{\|G(jw)u_0 e^{jwt}\|}{\|u_0 e^{jwt}\|}$$

$$= \frac{\|G(jw)u_0\|}{\|u_0\|}$$

com $\|.\|$ a norma Euclidiana. Observe que multiplicando a entrada por um escalar não altera o ganho do sistema, assim

$$\min_{u_0} \frac{\|G(jw)u_0\|}{\|u_0\|} \leq \text{Ganho} \leq \max_{u_0} \frac{\|G(jw)u_0\|}{\|u_0\|}$$

ou

$$\min_{\|u_0\|=1} \|G(jw)u_0\| \leq \text{Ganho} \leq \max_{\|u_0\|=1} \|G(jw)u_0\|$$

Não existe uma definição útil de fase para sistemas MIMO. A resposta em freqüência de sistemas MIMO é limitada portanto pelo máximo e mínimo ganho do sistema.

3. Decomposição de matrizes

Seja

$$H = Y \begin{bmatrix} \Sigma & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} U^*$$

onde

$H \in C^{m\,x\,p}$, $\boldsymbol{Y} \in \boldsymbol{C}^{\boldsymbol{p} \times \boldsymbol{p}}$, $\boldsymbol{U} \in \boldsymbol{C}^{\boldsymbol{m} \times \boldsymbol{m}}$ são matrizes unitárias e $\Sigma = diag(\sigma_1, \cdots, \sigma_r)$ com $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \ldots \geq \sigma_r > 0$ e min (m, p) ≥ r. As colunas de U são formadas por autovetores ortonormais de $H^* H$ e as colunas de Y por autovetores ortonormais de HH^*.

<u>Notação</u>

$$\sigma(H) = \{\sigma_i : i = 1, \ldots r\}$$

$$\sigma_{\max}(H) = \sigma_1$$

$$\sigma_{\min}(H) = \sigma_r .$$

Norma induzida de matriz

$$\|H\|_p = \max_{\|u\| \neq 0} \frac{\|Hu\|_p}{\|u\|_p}$$

Se a norma-2 for utilizada para o vetor u, obtem-se a norma-2 unduzida de matriz $\|H\|_2 = \max_{\|u\|_2 = 1} \|Hu\|_2$.

Pode ser verificado que

$$\sigma_{\max}(H) = \max\left[\lambda_i\left(H^*H\right)\right]^{1/2}$$
$$\sigma_{\min}(H) = \min\left[\lambda_i\left(H^*H\right)\right]^{1/2}$$

e que $\sigma_{\max}(H) = \|H\|_2$

em que λ(.) denota autovalor.

Definição 1: Uma matriz $U \in F^{n\,x\,n}$ é dita uma matriz unitária se e só se $U^*U = UU^* = I_n$. Equivalentemente, as *n* colunas de *U* formam uma base ortonormal de F^n, *i. e.*

$$u_i^* u_j = \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases}$$

Se *F*=*R* a matriz *U* é chamada ortogonal.

Observação 1: Matrizes unitárias preservam o produto interno e daqui a norma de vetores:

$U \in F^{n\times n}$ é unitária então $\forall x,y \in F^n$ $(Ux,Uy) = \langle x,y\rangle$ e daqui $\|Ux\|_2 = \|x\|_2$

Observação 2: A matriz H não possui valores singulares zero $(\sigma_{\min}(H) > 0)$ se e só se *H* tiver posto coluna completo. Quando H for quadrada tem-se $\sigma_{\min}(H) > 0$ se e só se *H* for não singular.

4. Interpretação de H como operador

Sejam

$$\begin{aligned} H &: C^p \mapsto C^m \\ & u \mapsto Hu \end{aligned}$$

$U = [U_1 U_2]$ $\quad U_1 \in C^{m\,x\,r}$, $Y = [Y_1 Y_2]$ $\quad Y_1 \in C^{p\,x\,r}$

$$H[U_1 U_2] = [Y_1 \Sigma \vdots\, 0]$$

em que

$HU_1 = Y_1 \Sigma$ ou $\boldsymbol{H} = \boldsymbol{Y}_1 \Sigma \boldsymbol{U}_1^*$.

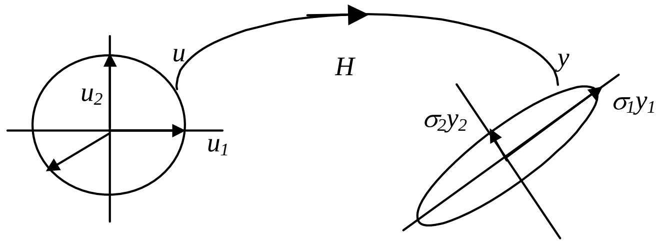
A forma diádica para H é $H = \sum_{i=1}^{r} \sigma_i y_i u_i^*$ com u_i e y_i colunas de *U* e *Y*, respectivamente. Os vetores u_i e y_i são chamados vetores singulares à direita e à esquerda de *H*, respectivamente. De fato, tem-se que $U_1 = [u_1 \cdots u_r]$ e $Y_1 = [y_1 \cdots y_r]$ e usando $\boldsymbol{H} = \boldsymbol{Y}_1 \Sigma \boldsymbol{U}_1^*$ pode-se escrever

$$\begin{aligned}
[y_1 \cdots y_r]\begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \sigma_r \end{bmatrix}\begin{bmatrix} u_1^* \\ \vdots \\ u_r^* \end{bmatrix} &= [y_1 \cdots y_r]\begin{bmatrix} \sigma_1 u_1^* \\ \vdots \\ \sigma_r u_r^* \end{bmatrix} \\
&= \left[\sigma_1 y_1 u_{11}^* + \cdots + \sigma_r y_r u_{r1}^* \quad \cdots \quad \sigma_1 y_1 u_{1m}^* + \cdots + \sigma_r y_r u_{rm}^*\right] \\
&= \left[\sigma_1 y_1 [u_{11}^* \cdots u_{1m}^*] + \quad \cdots \quad + \sigma_r y_r [u_{r1}^* \cdots u_{rm}^*]\right] \\
&= \sum_{i=1}^{r} \sigma_i y_i u_i^*.
\end{aligned}$$

Uma vez que *U* é unitária $u^*_i\, u_j = \delta_{ij}$, segue que u_j é mapeado em $\sigma_j y_j$ por *H*:

$$
\begin{aligned}
Hu_j &= (\sum_{i=1}^{r} \sigma_i y_i u_i^*) u_j \\
&= \sigma_j y_j
\end{aligned}
$$

então, H rotaciona $(u_j \to y_j)$ e escalona $(y_j \to \sigma_j y_j)$. Em R^2 pode-se visualizar graficamente o efeito de *H* em *u*



Exercício 2. Mostrar que o valor singular pode ser computado a partir do problema de autovalor, uma vez que σ_i^2 é um autovalor de H^*H, ou seja $H^*Hu_i = \sigma_i^2 u_i$. Sugestão. Utilizar a forma diádica de *H* e H^*.

O máximo valor singular $\sigma_{\max}(H)$ e o mínimo valor singular $\sigma_{\min}(H)$ desempenham um papel importante na análise e projeto de sistemas de controle multivariáveis e são dados pelas identidades:

$\sigma_{\max}(H) = \max_{\|u\|=1} \|Hu\|$, $\sigma_{\min}(H) = \min_{\|u\|=1} \|Hu\|$ se a norma-2 $\|u\|_2$ for utilizada.

Verificação:

$$
\begin{aligned}
\|Hu\|^2 &= u^* U \sum Y^* Y \sum U^* u \\
&= x^* \sum^2 x
\end{aligned}
$$

com $x = U^* u$. Desde que $\|x\| = \|U^* u\| = \|u\|$, $\max_{\|u\|_2=1} \|Hu\|_2 = \max_{\|x\|_2=1} \|\sum x\|_2$

Agora

$\|\sum x\|^2 = \sum_{i=1}^{r} \sigma_i^2 |x_i|^2$, sujeito a $\|x\|^2 = 1$, é maximizado com $x_1 = 1$ e $x_i = 0$ para todo $i \neq 1$ e é minimizado com $x_r = 1$ e $x_i = 0$ para todo $i \neq r$ e então $\sigma_{\max}(H) = \max_{\|u\|_2=1} \|Hu\|_2$ e

$\sigma_{\min}(H) = \min_{\|u\|_2=1} \|Hu\|_2$. Portanto, tem-se

$$
\sigma_{\max}(H) = \|H\|_2 = \max_{\|u\|_2=1} \|Hu\|_2 = \max_{u \neq 0} \frac{\|Hu\|_2}{\|u\|_2}
$$

ou seja $\sigma_{\max}(H)$ é a norma do operador *H* induzida pela norma Euclidiana também conhecida como norma-2.

O ganho do sistema para todas as entradas é menor do que o máximo valor singular

$$\frac{\|Hu\|}{\|u\|} \le \sigma_1 .$$

Uma maneira intuitiva de entender este resultado é notando que σ_1 é o máximo ganho sobre o conjunto ortogonal de direções da entrada definido pelos vetores singulares à direita. Assim, o ganho máximo pode ser obtido quando a entrada *u* é proporcional a u_1. O cálculo do ganho da matriz para a entrada αu_1 fornece

$$\frac{\|H(\alpha u_1)\|}{\|\alpha u_1\|} = \frac{\left\|\sum_{i=1}^{r} \sigma_i y_i u_i^* \alpha u_1\right\|}{\|\alpha u_1\|} = \frac{\|\alpha \sigma_1 y_1\|}{\|\alpha u_1\|} = \frac{|\alpha|\sigma_1\|y_1\|}{|\alpha|\|u_1\|} = \frac{|\alpha|\sigma_1}{|\alpha|} = \sigma_1$$

uma vez que $\|y_i\| = \|u_i\| = 1$.

5. Norma H-infinito para sistemas

$$\|G(s)\|_\infty = \sup_{w \in R} \quad \sigma_{\max} G(jw)$$

6. Ganhos Principais de um Sistema

$$y(t) = G(jw) u_0 e^{jwt}$$

A decomposição de valores singulares da matriz de função de transferência é dada por

$G(jw) = \sum_{i=1}^{r} \sigma_i y_i u_i^*$ para cada *w*. Os valores singulares em função da freqüência são chamados valores principais.

Exercício 1. Dado o sistema (A, B, C)

$A = \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$, obter a matriz de transferência $G(jw)$ e os seus ganhos principais. Utilizar os comandos sys=ss(A,B,C,D), sysf=tf(sys) e sigma(sys).