

# **ENGENHARIA DE CONTROLE**

Fundamentos e Aulas de Laboratório



# Sumário

<b>1</b>	<b>Modelos Matemáticos de Sistemas Dinâmicos</b>	<b>1</b>
1.1	Descrição Entrada-Saída . . . . .	1
1.1.1	Equações de sistemas dinâmicos contínuos . . . . .	1
1.1.2	Equações de sistemas dinâmicos discretos . . . . .	4
1.1.3	Convolução entre a entrada e saída . . . . .	4
1.1.4	Funções de transferência . . . . .	8
1.1.5	Polos e zeros . . . . .	10
1.1.6	Resposta impulsional e modos . . . . .	12
1.1.7	Teoremas do valor inicial e final . . . . .	12
1.1.8	Função transferência a partir da equação a diferença . . . . .	14
1.1.9	Versão discreta dos teoremas do valor final e inicial . . . . .	16
1.2	Descrição Espaço de Estado . . . . .	17
1.2.1	Linearização local . . . . .	18
1.2.2	Modelos lineares locais . . . . .	25
1.2.3	Resposta impulsional e função de transferência . . . . .	29
1.2.4	Sistemas equivalentes . . . . .	33
1.3	Sistemas Lineares com Atraso . . . . .	33
1.3.1	Equações lineares com coeficientes e retardos constantes . . . . .	34
1.3.2	Localização das raízes de quasi-polinômios . . . . .	35
<b>2</b>	<b>Sistemas Amostrados e Discretização</b>	<b>39</b>
2.1	Amostragem em Sistemas de Controle . . . . .	39
2.2	Função de Transferência com Discretização . . . . .	42
2.3	A Transformada $\mathcal{Z}$ . . . . .	43
2.4	Correspondência entre Plano-s e Plano-z . . . . .	44
2.5	Métodos de Discretização . . . . .	45
2.5.1	Discretização por aproximação numérica . . . . .	46
2.5.2	Mapeamento de polos e zeros . . . . .	50
2.5.3	Método da resposta invariante ao degrau . . . . .	51
2.6	Aulas de Laboratório . . . . .	55
2.6.1	Questões a serem respondidas . . . . .	57
	<b>Apêndices</b>	<b>57</b>

<b>A</b>	<b>Tabela da Transformada <math>Z</math> e Propriedades</b>	<b>61</b>
A.1	Propriedades da Transformada $Z$ . . . . .	61
A.2	Tabelas de Transformadas . . . . .	62
<b>B</b>	<b>Ganho para Sistemas MIMO</b>	<b>63</b>
B.1	Interpretação da Matriz $H$ como Operador . . . . .	64
B.2	Ganhos de um Sistema Multivariável . . . . .	66

# Capítulo 1

## Modelos Matemáticos de Sistemas Dinâmicos

Um sistema físico pode ter diferentes modelos dependendo das condições da sua operação e aplicação. Na nomenclatura de controle, os modelos de sistemas físicos são denotados sistemas e os sistemas físicos plantas ou processos. Por sua vez, os modelos podem ter diferentes representações ou descrições matemáticas. É usual tratar sistemas como dispositivos que processam as entradas aplicadas para produzir saídas.

Neste capítulo são introduzidas as representações entrada/saída e espaço de estado, bem como as suas propriedades principais. A solução de equações diferenciais e a diferença é dada em termos dos modos do sistema e como determinam a resposta a entradas típicas. A solução de equações do tipo diferencial-diferença é também estudada destacando a existência de infinitas soluções devido a existência de um termo exponencial na variável complexa  $s$  na equação característica. Também, o conceito de linearização local é apresentado discutindo a aproximação de Taylor, e as de Teixeira e Žak (Teixeira and Žak, 1999) e Taniguchi (Taniguchi et al., 2001). Exemplos ilustram a obtenção de modelos de sistemas dinâmicos. As principais referências usadas neste capítulo foram Chen (1999), Geromel and Palhares (2004) e Castrucci et al. (2011).

### 1.1 Descrição Entrada-Saída

A descrição entrada-saída fornece uma relação matemática entre a entrada e a saída do sistema. As propriedades do sistema são obtidas através da aplicação de entradas de teste. As entradas são denotadas por um vetor  $u = [u_1 \cdots u_m]^T$  e as saídas por um vetor  $y = [y_1 \cdots y_q]^T$ . A representação simplificada do sistema na forma de diagrama de blocos é mostrada na Figura 1.1.

#### 1.1.1 Equações de sistemas dinâmicos contínuos

As equações diferenciais de um sistema são obtidas a partir das leis que descrevem o seu comportamento no tempo. Por exemplo, a lei de Newton e a lei de tensão e corrente de

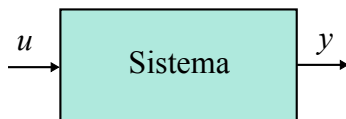


Figura 1.1: Sistema a malha aberta.

Kirchhoff são a base da construção das equações de movimento para sistemas mecânicos e para sistemas elétricos, respectivamente.

Se a relação entre  $u$  e  $y$  for descrita por uma equação algébrica o sistema é dito ser estático, se por equação diferencial o sistema é dito ser dinâmico. Se  $u$  e  $y$  são relacionados por uma equação diferencial não linear tem-se um sistema dinâmico não linear. Se a equação diferencial for linear e tiver coeficientes constantes tem-se um sistema linear e invariante no tempo. Uma equação diferencial linear de coeficientes constantes de ordem  $n$  é da forma:

$$\frac{d^n y(t)}{dt^n} + a_1 \frac{d^{n-1} y(t)}{dt^{n-1}} + a_2 \frac{d^{n-2} y(t)}{dt^{n-2}} + \dots + a_{n-1} \frac{dy(t)}{dt} + a_n y(t) = b_m \frac{d^m u(t)}{dt^m} + \dots + b_1 \frac{du(t)}{dt} + b_0 u(t) \quad (1.1)$$

em que  $y(t)$  é a saída e  $u(t)$  é a entrada e  $a_i, i = 1, \dots, n$ ,  $b_i, i = 0, \dots, m$  constantes com  $m \leq n$ .

**Exemplo 1.1** Considere o circuito RC mostrado na Figura 1.2 com entrada  $v_e$  e saída a corrente  $i$  na malha. Suponha que a corrente é medida por um sensor de efeito hall com ganho  $\alpha$ . Obter a equação diferencial relacionando a tensão de entrada de tensão e a saída de tensão dada pelo sensor.

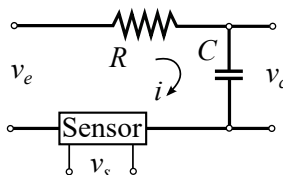


Figura 1.2: Circuito RC.

A equação da malha de tensão é:

$$Ri + \frac{1}{C} \int_0^t i dt = v_e(t).$$

Neste caso, a saída é proporcional à corrente, ou seja,  $y = v_s = \alpha i$  e a entrada  $u = v_e$ , e a equação diferencial é:

$$\frac{dy}{dt} + a_1 y(t) = b_1 \frac{du(t)}{dt}.$$

com  $a_1 = \frac{1}{RC}$ ,  $b_1 = \frac{\alpha}{R}$  e  $b_0 = 0$

**Exemplo 1.2** Considere o motor de corrente contínua (CC) descrito pelo diagrama eletromecânico equivalente mostrado na Figura 1.3 com parâmetros definidos na Tabela 1.1. Obter as equações de movimento do rotor, circuito elétrico da armadura e obter a equação diferencial do motor CC para a velocidade e tensão aplicada na armadura.

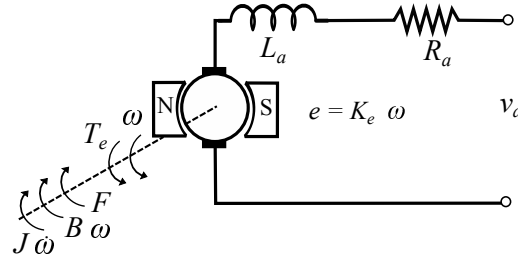


Figura 1.3: Diagrama eletromecânico do motor CC.

Tabela 1.1: Parâmetros do motor

Parâmetros Elétricos	Parâmetros Mecânicos
$R_a$ resistência armadura [ $\Omega$ ]	$J$ momento inércia [ $N m s^2/rad$ ]
$L_a$ indutância armadura [ $H$ ]	$B$ coeficiente atrito viscoso [ $N m s/rad$ ]
$K_e$ constante da força contra eletromotriz [ $V s/rad$ ]	$F$ coeficiente atrito estático [ $N m$ ]
$K_t$ constante torque [ $N m/A$ ]	

Utilizando a lei de Newton para sistemas rotacionais obtém-se a equação do torque:

$$T_e(t) = K_t i_a(t) = J \frac{d}{dt} \omega(t) + B \omega(t) + F.$$

Por sua vez, utilizando a lei de tensão de Kirchhoff obtém-se a equação da tensão:

$$v_a(t) = R_a i_a(t) + L_a \frac{d}{dt} i_a(t) + K_e \omega(t).$$

Usando o operador diferencial  $\frac{d}{dt}$  pode-se obter  $i_a(t)$  da equação do torque com  $F = 0$  na forma:

$$i_a = \frac{1}{K_t} \left[ J \frac{d}{dt} + B \right] \omega,$$

a qual substituída na equação da tensão fornece a equação diferencial de ordem 2 relacionando a saída  $y = \omega$  e a entrada  $u = v_a$  aplicada na armadura dada por:

$$\frac{d^2 y(t)}{dt^2} + a_1 \frac{dy(t)}{dt} + a_2 y(t) = b_0 u(t)$$

$$\text{com } a_1 = \frac{R_a J + L_a B}{L_a J}, \quad a_2 = \frac{R_a B + K_t K_e}{L_a J}, \quad b_0 = \frac{K_t}{L_a J}.$$


---

Diversos exemplos da construção do modelo de equações diferenciais de sistemas podem ser encontrados em Franklin et al. (1994) e Ogata (1997).

### 1.1.2 Equações de sistemas dinâmicos discretos

Sistemas dinâmicos discretos podem ser descritos por equações a diferença. A forma mais geral de escrever uma equação a diferença linear de coeficientes constantes de ordem  $n$  é

$$y(k+n) + a_1 y(k+n-1) + \cdots + a_{n-2} y(k+2) + a_{n-1} y(k+1) + a_n y(k) = b_m u(k+m) + \cdots + b_1 u(k+1) + b_0 u(k) \quad (1.2)$$

em que  $k$  é o instante de tempo,  $y(k)$  é a saída e  $u(k)$  a entrada e  $a_i, i = 1, \dots, n$ ,  $b_i, i = 0, \dots, m$  são constantes com  $m < n$ .

**Exemplo 1.3** *Considere o ciclo de uma população de plantas daninhas mostrado na Figura 1.4. Descrever a dinâmica de plantas daninhas anuais através de fatores dependentes e independentes da densidade de plantas e do número de sementes por área (densidade de sementes) nos sucessivos ciclos a partir do número de sementes do ciclo inicial (Sakai, 2001).*

*Assim, a densidade de sementes existentes no ciclo  $k+1$  é determinada pela densidade de sementes do ciclo anterior  $k$ :*

$$\begin{aligned} y(k+1) &= gosy(k) + (1-g)vy(k) \\ &= (gos + (1-g)v)y(k) \end{aligned}$$

*em que  $y$  é o número de sementes por área,  $g$ ,  $o$ ,  $s$  e  $v$  são as taxas de sucesso de germinação, floração, produtividade (número de sementes produzidas por planta) e de sementes viáveis no solo no ciclo seguinte, respectivamente. O segundo termo representa as gerações sobrepostas e portanto, se não ficaram sementes no solo durante um ciclo implica  $v = 0$ . O modelo descrito para a densidade de sementes pode ser reconhecido como uma equação a diferença do tipo (1.2) com  $n = 1$  e  $u = 0$ . A densidade de plântulas de daninhas denotada  $q$  pode ser expressa por  $q(k) = gy(k)$ . Em geral, os parâmetros  $o$  e  $s$  do modelo da densidade de sementes são dependentes de  $q$  levando a um modelo não linear em  $y$ .*

---

### 1.1.3 Convolução entre a entrada e saída

Se o sistema estiver em repouso ou relaxado quando a entrada  $u$  for aplicada, a saída  $y$  de um sistema linear pode também ser descrita pela convolução. A seguir, o sistema é representado por um operador denotado  $H$ .



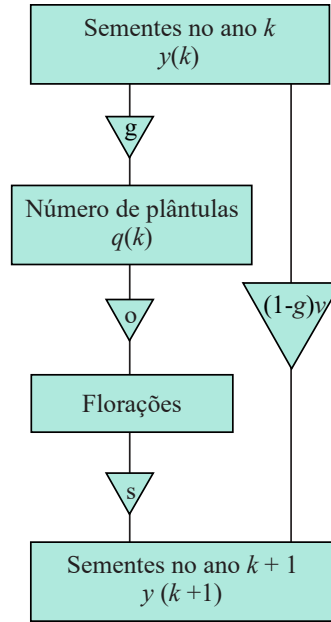


Figura 1.4: Ciclo de vida de plantas daninhas anuais.

**Definição 1.1** Um sistema é dito ser relaxado em  $t_0$  se e só se a saída  $y[t_0, \infty)$  é excitada unicamente por  $u[t_0, \infty)$ .

Pode-se escrever:

$$y[t_0, \infty) = Hu[t_0, \infty) \quad (1.3)$$

ou simplesmente  $y = Hu$ .

**Definição 1.2** Um sistema é dito ser causal Sistema causal ou não antecipatório se a saída do sistema no instante  $t$  não depender da entrada aplicada depois do tempo  $t$ ; depende apenas da entrada aplicada no tempo  $t$  e antes do tempo  $t$ .

Para um sistema causal e relaxado pode-se escrever:

$$y(t) = Hu_{(-\infty, t)} \text{ para } t_0 \text{ em } (-\infty, \infty) \quad (1.4)$$

**Definição 1.3** Um operador é linear se para entradas  $u_1$  e  $u_2$  obter-se:

$$H(\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2) = \alpha_1 H u_1 + \alpha_2 H u_2 \quad (1.5)$$

Para sistemas lineares e relaxados o operador  $H$  pode ser descrito em termos de uma integral ou somatório, usando a função delta ou impulso de Dirac definida a seguir. Seja a função:

$$\delta_{\Delta}(t - t_i) = \begin{cases} 0, & t < t_i \\ \frac{1}{\Delta}, & t_i \leq t < t_i + \Delta \\ 0, & t \geq t_i + \Delta \end{cases} \quad (1.6)$$

em que  $\delta_\Delta(t - t_i)$  é a chamada função pulso. Se faz-se  $\Delta \rightarrow 0$  tem-se a chamada função impulso de Dirac ou função delta  $\delta(t - t_i) := \lim_{\Delta \rightarrow 0} \delta_\Delta(t - t_i)$ . Seja

$$y = Hu. \quad (1.7)$$

Aproximando  $u$  por uma série de funções pulsos (ver ilustração na Figura 1.5):

$$u(t) \approx \sum_i \delta_\Delta(t - t_i) u(t_i) \Delta \quad (1.8)$$

e substituindo  $u$  em (1.7), para  $H$  linear, tem-se

$$Hu \approx \sum_i [H\delta_\Delta(t - t_i)] u(t_i) \Delta \quad (1.9)$$

fazendo  $\Delta \rightarrow 0$  e  $\sum \rightarrow \int$  tem-se:

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} H\delta(t - \tau) u(\tau) d\tau. \quad (1.10)$$

Definindo  $H\delta(t - \tau) := g(\cdot, \tau)$ , em que a segunda variável  $\tau$  é o tempo em que a função  $\delta$  é aplicada e a primeira o tempo em que a saída é observada, tem-se

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} g(t, \tau) u(\tau) d\tau \quad (1.11)$$

em que  $g(t, \tau)$  é a chamada resposta impulsional do sistema. A integral (1.11) é a chamada integral de superposição. Portanto, se  $g(t, \tau)$  for conhecida, a saída  $y(t)$  pode ser obtida para todo  $t$ .

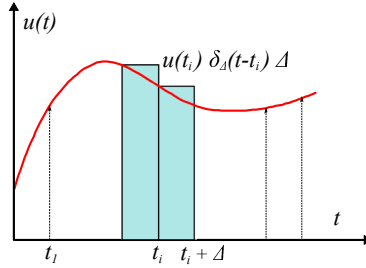


Figura 1.5: Representação da entrada por uma soma de funções pulso.

**Observação 1.1** *Um sistema linear relaxado pode ser interpretado como um operador linear que mapeia o espaço de funções contínuas por parte em  $(-\infty, \infty)$  em outro espaço de funções contínuas por parte.*

Para chegar à conhecida integral de convolução do sistema este deve ser fixo, ou estacionário o que significa que as suas características não mudam com o tempo. Um sistema fixo ou estacionário é dito ser invariante no tempo. A definição de invariância no tempo é dada a seguir.

**Definição 1.4** Um sistema linear e relaxado é invariante no tempo se e só se

$$HQ_\alpha u = Q_\alpha H u = Q_\alpha y \quad (1.12)$$

para  $\forall u$  e  $\forall \alpha$  com  $Q_\alpha$  o operador de deslocamento definido por  $Q_\alpha u(t) = u(t + \alpha)$ ,  $\forall t$ .

A resposta impulsional  $g(t, \tau)$  de um sistema relaxado e invariante no tempo depende apenas da diferença  $t - \tau$ . De fato, pela definição de invariância no tempo tem-se:

$$Q_\alpha g(\cdot, \tau) = Q_\alpha H \delta(t - \tau) = H Q_\alpha \delta(t - \tau) \quad (1.13)$$

e, usando a definição de  $g(t, \tau)$ , pode-se escrever:

$$H \delta(t - (\tau + \alpha)) = g(\cdot, \tau + \alpha). \quad (1.14)$$

Agora, pela definição de  $Q_\alpha$ , da equação  $Q_\alpha g(\cdot, \tau) = g(\cdot, \tau + \alpha)$  tem-se que para o sistema ser invariante no tempo deve-se ter  $g(t, \tau) = g(t + \alpha, \tau + \alpha)$ ,  $\forall \tau, t, e \alpha$ . Escolhendo  $\alpha = -\tau$ , tem-se  $g(t, \tau) = g(t - \tau, 0) = g(t - \tau)$ ,  $\forall t, \tau$  (lembrar que  $g(t)$  é a resposta impulsional à uma entrada impulso aplicada em  $\tau = 0$ ). Pode-se concluir então que a resposta impulsional de um sistema linear relaxado e invariante no tempo depende apenas da diferença entre  $t$  e  $\tau$ . Portanto, pode-se obter a resposta  $y(t)$  em termos da chamada integral de convolução:

$$\begin{aligned} y(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} g(t - \tau) u(\tau) d\tau \\ &= g(t) * u(t) \end{aligned} \quad (1.15)$$

em que a saída depende da entrada no intervalo  $[0 \infty]$ . Se o sistema for causal, a saída depende da entrada no intervalo  $[0 t]$ . Um sistema dinâmico causal é portanto um sistema cuja saída no tempo  $t$  denotada  $y(t)$  depende da entrada denotada  $u(t)$  no intervalo  $[0 t]$ . Se a saída de um sistema em  $t = t_1$  depender somente da entrada aplicada em  $t = t_1$  o sistema é chamado sistema instantâneo ou sistema sem memória ou sistema estático. Então, para um sistema estático, a saída no tempo  $t$  só depende da entrada no tempo  $t$  e a integral de convolução torna-se:

$$y(t) = K u(t) \quad (1.16)$$

em que  $g(t) = K \delta(t)$ , com  $\delta(t)$  a função impulso definida anteriormente, a qual descreve um sinal intenso mas de duração muito curta que com as seguintes propriedades:

$$\delta(t) = 0, \quad t \neq 0, \quad (1.17)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) dt = 1. \quad (1.18)$$

Para o caso discreto a resposta ao impulso pode ser obtida de forma análoga ao caso contínuo. Sejam  $\{u(kT_s)\}$  sequência de entrada,  $\{y(kT_s)\}$  sequência de saída com  $k \in N$  e  $T_s$  o período da amostragem. Sem perda de generalidade  $u(kT_s) := u(k)$  e  $y(kT_s) := y(k)$ ,  $k = 0, 1, 2, \dots$ . Tratando-se de sistemas lineares pode-se descrever a saída como uma sequência ponderada da entrada:

$$y(k) = \sum_{m=0}^{\infty} g(k, m) u(m) \quad (1.19)$$

com  $g(kT_s, m)$  a forma equivalente discreta da resposta ao impulso:

$$y(k) = \sum_{m=0}^{\infty} g(k, m)u(m) \quad (1.20)$$

com  $u(k) = \delta(k)$  dada por

$$\delta(k) = \begin{cases} 1, & k = 0 \\ 0, & k \neq 0 \end{cases} \quad (1.21)$$

ou seja,  $y(k) = g(k)$ ,  $k \geq 0$ .

Para um sistema causal, tem-se  $g(k, m) = 0$ ,  $k < m$  e portanto:

$$y(k) = \sum_{m=0}^k g(k, m)u(m) \quad (1.22)$$

E, para um sistema invariante no tempo tem-se:

$$g(k, m) = g(k - m), k \geq m \quad (1.23)$$

fornecendo o somatório de convolução:

$$y(k) = \sum_{m=0}^k g(k - m)u(m), k = 0, 1, \dots \quad (1.24)$$

#### 1.1.4 Funções de transferência

Para a entrada  $u(t)$  do tipo exponencial a saída  $y(t)$  vai ser também do tipo exponencial. Para ver isso, usar  $u(t) = e^{st}$  em (1.15) e obter  $y(t) = G(s)e^{st}$ ,  $G(s)$  é a chamada função de transferência do sistema e é definida como a transformada de Laplace da resposta impulsional  $g(t)$ :

$$G(s) = \int_{0^-}^{\infty} g(t)e^{-st} dt. \quad (1.25)$$

Em (1.25) usou-se a transformada de Laplace unilateral, uma vez que foi considerado que o sistema é causal, isto é,  $g(t) = 0$ ,  $t < 0$ . A existência da transformada depende da convergência da integral em (1.25) (ver Geromel and Palhares (2004)). Por exemplo, se  $f(t) = e^{\sigma t}$  com  $\sigma$  real, então, (1.25) existe se  $\text{Re } s > \sigma$ . Neste caso, o plano complexo  $\text{Re } s > \sigma$  é chamado de região de convergência.

A função de transferência é definida para sistemas lineares invariantes no tempo e pode ser interpretada como a relação entrada-saída:

$$G(s) = \frac{y(s)}{u(s)}. \quad (1.26)$$

A relação entrada-saída também pode ser obtida via a equação diferencial do sistema. Considere novamente a equação diferencial de coeficientes constantes (1.1). Dada a entrada  $u(t)$ ,  $t \geq 0$ , a saída  $y(t)$ ,  $t \geq 0$  pode ser determinada se as condições iniciais:

$$\underline{u}(0) = [u(0^-), \dot{u}(0^-), \dots, u^{m-1}(0^-)] \quad (1.27)$$

bem como

$$\underline{y}(0) = [y(0^-), \dot{y}(0^-), \dots, y^{n-1}(0^-)] \quad (1.28)$$

forem conhecidas. A transformada de Laplace da derivada é dada por:

$$\mathcal{L}\left[\frac{dy}{dt}\right] = sy(s) - y(0^-). \quad (1.29)$$

A transformada da derivada segunda pode ser obtida de (1.29):

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\left[\frac{d^2y}{dt^2}\right] &= s\mathcal{L}\left[\frac{dy}{dt}\right] - \dot{y}(0^-) \\ &= s^2y(s) - sy(0^-) - \dot{y}(0^-). \end{aligned} \quad (1.30)$$

Assim, usando a propriedade de diferenciação no tempo da transformada de Laplace  $n$  vezes tem-se:

$$\mathcal{L}\left[\frac{d^ny}{dt^n}\right] = s^ny(s) - s^{n-1}y(0^-) - \dots - sy^{n-2}(0^-) - y^{n-1}(0^-). \quad (1.31)$$

A solução então pode ser escrita da forma:

$$y(s) = \frac{P(s, \underline{y}(0)) - Q(s, \underline{u}(0))}{D(s)} + \frac{N(s)}{D(s)}u(s) \quad (1.32)$$

em que

$$D(s) = s^n + a_1s^{n-1} + \dots + a_n \quad (1.33)$$

$$N(s) = b_ms^m + b_{m-1}s^{m-1} + \dots + b_0, \quad (1.34)$$

$$\begin{aligned} P(s, \underline{y}(0)) &= s^{n-1}y(0^-) + s^{n-2}\dot{y}(0^-) + s^{n-3}\ddot{y}(0^-) + \dots + y^{n-1}(0^-) \\ &+ a_1(s^{n-2}y(0^-) + \dots + y^{n-2}(0^-)) + \dots + a_{n-1}y(0^-) \end{aligned} \quad (1.35)$$

$$\begin{aligned} Q(s, \underline{u}(0)) &= b_m(s^{m-1}u(0^-) + s^{m-2}\dot{u}(0^-) + s^{m-3}\ddot{u}(0^-) + \dots + u^{m-1}(0^-)) \\ &+ b_{m-1}(s^{m-2}u(0^-) + \dots + u^{m-2}(0^-)) + \dots + b_1u(0^-). \end{aligned} \quad (1.36)$$

E a função de transferência  $G(s)$  é obtida por:

$$G(s) = \frac{N(s)}{D(s)}. \quad (1.37)$$

Obtendo a inversa de (1.32) obtém-se:

$$y(t) = y_0(t) + y_u(t). \quad (1.38)$$

O primeiro termo de (1.38) depois da igualdade corresponde à resposta a condições iniciais denotada  $y_0(t)$  e o segundo à resposta a entrada denotada  $y_u(t)$ . O polinômio dado por  $D(s)$  é conhecido por polinômio característico.

**Exemplo 1.4** Um sistema é especificado pela equação diferencial:

$$\frac{d^3 y}{dt^3} + 4 \frac{d^2 y}{dt^2} + 11 \frac{dy}{dt} + 14y = 4 \frac{d^2 u}{dt^2} + 2 \frac{du}{dt} + u$$

com condições iniciais  $\ddot{y}(0^-) = 1$ ,  $\dot{u}(0^-)$ ,  $\dot{y}(0^-) = 3$ ,  $y(0^-) = 2$ .

Aplicando Laplace, obtém-se  $y(s)$  na forma de (1.32) com:

$$\begin{aligned} N(s) &= b_2 s^2 + b_1 s + b_0 \\ D(s) &= s^3 + a_1 s^2 + a_2 s + a_3 \\ P(s, \underline{y}(0^-)) &= s^2 y(0^-) + s \dot{y}(0^-) + \ddot{y}(0^-) + a_1 (s y(0^-) + \dot{y}(0^-)) + a_2 y(0^-) \\ Q(s, \underline{u}(0^-)) &= b_2 (s u(0^-) + \dot{u}(0^-)) + b_1 u(0^-) \end{aligned}$$

em que  $a_1 = 4$ ,  $a_2 = 11$ ,  $a_3 = 14$  e  $b_2 = 4$ ,  $b_1 = 2$ ,  $b_0 = 1$ .

A função de transferência pode também ser derivada da integral de convolução (1.15), aplicando a transformada de Laplace em ambos os lados para  $t_0 = 0$ , como segue:

$$y(s) = \int_0^\infty \left[ \int_0^t g(t-\tau) u(\tau) d\tau \right] e^{-st} dt \quad (1.39)$$

Uma vez que o sistema é causal tem-se  $g(t-\tau) = 0$  para  $\tau > t$ , então

$$y(s) = \int_0^\infty \left[ \int_0^\infty g(t-\tau) u(\tau) d\tau \right] e^{-st} dt. \quad (1.40)$$

Mudando a ordem de integração tem-se:

$$y(s) = \int_0^\infty \left[ \int_0^\infty g(t-\tau) e^{-st} dt \right] u(\tau) d\tau \quad (1.41)$$

e usando a propriedade de deslocamento da transformada de Laplace:  $\mathcal{L}[g(t-\tau)] = e^{-s\tau} G(s)$  tem-se:

$$y(s) = G(s) \int_0^\infty e^{-s\tau} u(\tau) d\tau \quad (1.42)$$

e o resultado segue.

### 1.1.5 Polos e zeros

Os valores de  $s = z_i$  tais que  $G(z_i) = 0$  são chamados zeros e os valores de  $s = p_i$  tais que  $G(p_i) = \infty$  são chamados polos. Os polos determinam o comportamento natural do sistema ou modo não forçado ou simplesmente modo e os zeros bloqueiam a transmissão de frequência  $s$  coincidindo com a locação dos zeros. Se  $z_i = p_j$  ocorre cancelamento e portanto, a ordem do sistema é dada pelo grau do denominador com  $N(s)$  e  $D(s)$  coprimos. Usando o conceito de causalidade, conclui-se que nenhum sistema físico possui  $n < m$ , ou seja um número maior de zeros do que polos, pois, indicaria que a resposta no tempo  $t$  dependeria da entrada ocorrendo em tempo futuro maior que  $t$ .

**Exercício 1.1** Usando os comandos Matlab abaixo plotar o gráfico de  $G(s)$  e o mapa de polos e zeros. Verificar que no zero tem-se um vale com  $G(-4) = 0$  e no polo um pico.

```
clear all; close all; clc;

[x,y] = meshgrid(-6:0.125:6);
z = 10*abs(x+i*y+4)./abs(x+i*y+2);
figure(1)
meshc(x,y,z);
axis([-9 4 -9 4 -1 20]);

s=tf('s');
G=10*(s+4)/(s+2);
figure(2)

pzmap(G)
```

Usando os comandos Matlab dados a seguir, obter os polos, zeros e ordem dos sistemas  $G_1(s)$  e  $G_2(s)$ .

```
s=tf('s');
G1=(2*s+10)/(s^3+8*s^2+19*s+12)
G2=(s^3+12*s^2+29*s+18)/(s*(s^3+41*s^2+528*s+2160))
zpk(G1); zpk(G2)
pole(G1);pole(G2);order(G1);order(G2)
```

**Exercício 1.2** Considere as equações diferenciais do motor CC obtidas no Exemplo 1.2. Pede-se:

1. A partir das equações de torque e tensão com  $F = 0$  determinar as seguintes funções de transferência:

$$G_1(s) = \frac{\omega(s)}{v_a(s)} \quad G_2(s) = \frac{\theta(s)}{v_a(s)} \quad G_3(s) = \frac{i_a(s)}{v_a(s)} \quad G_4(s) = \frac{T_e(s)}{v_a(s)}$$

$$G_5(s) = \frac{\omega(s)}{i_a(s)} \quad G_6(s) = \frac{\theta(s)}{i_a(s)}$$

2. Usando blocos de integradores obter o diagrama de blocos do motor para entrada  $v_a(s)$  e saída  $\theta(s)$ .
3. Incluir um torque de perturbação e refazer o diagrama de blocos do item 2.
4. A partir dos diagramas de blocos obtidos nos itens 2 e 3 obter as funções de transferência  $G_2(s)$  e  $G_4(s)$ .

### 1.1.6 Resposta impulsional e modos

A resposta impulsional de um sistema dinâmico denotada  $g(t)$  é definida como a transformada inversa da função de transferência  $G(s)$  é composta pela soma de termos chamados modos os quais são determinados pelos polos  $p_i$ . Os modos são do tipo  $e^{p_i t}$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ ,  $e^{p_i t}$ ,  $te^{p_i t}$ ,  $t^2 e^{p_i t}$ ,  $\dots$ ,  $t^{m-1} e^{p_i t}$ ,  $e^{\operatorname{Re}(p_i)t} \cos(\operatorname{Im}(p_i)t)$  e  $e^{\operatorname{Re}(p_i)t} \operatorname{sen}(\operatorname{Im}(p_i)t)$  para o caso de polos reais simples, polos de multiplicidade  $m$  e polos complexos, respectivamente.

**Exemplo 1.5** Considere a função de transferência:

$$G(s) = \frac{s+1}{(s+2)(s^2+2s+5)}.$$

Pede-se os polos  $p_1$ ,  $p_2$ ,  $p_2^*$  e os coeficientes  $c_1, c_2, c_2^*$  usando a transformada inversa de Laplace.

A resposta impulsional  $g(t)$  é da forma:

$$g(t) = (c_1 e^{p_1 t} + c_2 e^{p_2 t} + c_2^* e^{p_2^* t}) 1(t)$$

com  $1(t)$  a função degrau unitário. Por inspeção da função de transferência tem-se que os polos são  $-2, -1 \pm 2j$ . Assim,

$$g(t) = c_1 e^{-2t} + \operatorname{Re}(c_2) e^{-t} [e^{j2t} + e^{-j2t}] + j \operatorname{Im}(c_2) e^{-t} [e^{j2t} - e^{-j2t}].$$

Utilizando a fórmula de Euler tem-se:

$$g(t) = c_1 e^{-2t} + 2 \operatorname{Re}(c_2) e^{-t} \cos 2t + 2 \operatorname{Im}(c_2) e^{-t} \operatorname{sen} 2t$$

em que  $c_1 = -1/5$ ,  $c_2 = 1/2 + j1/5$ . No Matlab utilizam-se os comandos:

```
syms t s
num=(s+1); den=(s+2)*(s^2+2*s+5);
ilaplace(num/den);
```

o que fornece:

$$g(t) = -\frac{1}{5} e^{-2t} + e^{-t} \cos 2t + \frac{2}{5} e^{-t} \operatorname{sen} 2t.$$

**Exercício 1.3** Para o Exemplo 1.4 obter a solução  $y(t)$  para condições iniciais nulas e entrada do tipo degrau.

### 1.1.7 Teoremas do valor inicial e final

Para obter o valor inicial e final da resposta do sistema a partir da função de transferência, os seguintes resultados são úteis.



**Teorema 1.1 (Valor final)** *Se as transformadas de  $y(t)$  e da sua derivada forem definidas, então,*

$$\lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = \lim_{s \rightarrow 0} sy(s). \quad (1.43)$$

**Prova:** A transformada de Laplace da derivada é:

$$\begin{aligned} \mathcal{L} \left\{ \frac{dy(t)}{dt} \right\} &= sy(s) - y(0^-) \\ &= \int_{0^-}^{\infty} \frac{dy}{dt} e^{-st} dt \end{aligned} \quad (1.44)$$

então,

$$\begin{aligned} \lim_{s \rightarrow 0} [sy(s) - y(0^-)] &= \lim_{s \rightarrow 0} \left[ \int_{0^-}^{\infty} \frac{dy}{dt} e^{-st} dt \right] \\ &= y(t) \Big|_{0^-}^{\infty} \\ &= \lim_{t \rightarrow \infty} y(t) - y(0^-) \end{aligned} \quad (1.45)$$

e tem-se  $\lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = \lim_{s \rightarrow 0} sy(s)$ .  $\square$

**Teorema 1.2 (Valor inicial)** *Se as transformadas de  $y(t)$  e da sua derivada forem definidas, então,*

$$y(0^+) = \lim_{s \rightarrow \infty} sy(s). \quad (1.46)$$

**Prova:** Para verificar estes teoremas, considere a transformada de Laplace da derivada, dada por:

$$\begin{aligned} \mathcal{L} \left\{ \frac{dy(t)}{dt} \right\} &= sy(s) - y(0^-) \\ &= \int_{0^-}^{\infty} \frac{dy}{dt} e^{-st} dt \end{aligned} \quad (1.47)$$

então,

$$\begin{aligned} sy(s) - y(0^-) &= \int_{0^-}^{0^+} \frac{dy}{dt} e^{-st} dt + \int_{0^+}^{\infty} \frac{dy}{dt} e^{-st} dt \\ &= y(t) \Big|_{0^-}^{0^+} + \int_{0^+}^{\infty} \frac{dy}{dt} e^{-st} dt \\ &= y(0^+) - y(0^-) + \int_{0^+}^{\infty} \frac{dy}{dt} e^{-st} dt \end{aligned} \quad (1.48)$$

e tem-se:

$$\begin{aligned} \lim_{s \rightarrow \infty} sy(s) &= y(0^+) + \lim_{s \rightarrow \infty} \int_{0^+}^{\infty} \frac{dy}{dt} e^{-st} dt \\ &= y(0^+) + \int_{0^+}^{\infty} \frac{dy}{dt} \left( \lim_{s \rightarrow \infty} e^{-st} \right) dt \\ &= y(0^+). \end{aligned} \quad (1.49)$$

$\square$

Note que a existência dos limites é garantida se os polos de  $sy(s)$  estão localizados no semiplano esquerdo do plano- $s$  e se o sistema é estritamente próprio, ou seja,  $n > m$ , para o caso do valor final e valor inicial, respectivamente.

**Exemplo 1.6** Determinar os valores final e inicial de  $y(t)$  para uma entrada degrau unitário do sistema descrito pela função de transferência:

$$G(s) = \frac{10s + 50}{(s + 2)(s + 4)(s^2 + 4s + 5)}$$

Uma vez que os polos de  $sy(s)$  são  $\{-2, -4, -2 \pm i\}$ , pode-se aplicar (1.43) e obter  $\lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = 1,25$ . Por outro lado, uma vez que  $m = 1$  e  $n = 4$ , pode-se aplicar (1.46) e obter  $y(0^+) = 0$ . Para conferir, pode-se encontrar a solução  $y$  à uma entrada degrau unitário e obter via comandos Matlab:

```
syms s;
y=(10*s+50)/(s*(s+2)*(s+4)*(s^2+4*s+5));
y=ilaplace(y)
y= exp(-4*t)/4-(15*exp(-2*t))/2+6*exp(-2*t)*(cos(t)-sin(t)/3)+5/4
```

Aplicando o limite, os mesmos resultados dos Teoremas 1.1 e 1.2 são obtidos.

### 1.1.8 Função transferência a partir da equação a diferença

A função de transferência de equação a diferença é obtida a partir da chamada transformada  $\mathcal{Z}$ . A transformada  $\mathcal{Z}$  é uma aplicação matemática que faz corresponder a cada sequência de números, uma função da variável complexa  $z$ . A transformada  $\mathcal{Z}$  dde uma sequência discreta  $u(k)$  denotada por  $u(z)$  é definida como:

$$\begin{aligned} u(z) &= \mathcal{Z}[u(k)] \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} u(k)z^{-k}. \end{aligned} \quad (1.50)$$

A função de transferência discreta da equação a diferença é obtida usando a propriedade de deslocamento da transformada  $\mathcal{Z}$ :  $\mathcal{Z}\{y(k+1)\} = zy(z) - zy(0)$ . Para obter  $\mathcal{Z}\{y(k+2)\}$  aplicar 2 vezes a propriedade acima:  $\mathcal{Z}\{y(k+2)\} = z^2\mathcal{Z}\{y(k+2)\} - zy(1) = z^2y(z) - zy(1) - z^2y(0)$ . Assim, obtém-se  $\mathcal{Z}\{y(k+n)\} = z^ny(z) - \sum_{j=0}^{n-1} z^{n-j}y(j)$ . A descrição de um processo é dada na forma de uma equação diferença com o deslocamento para trás do tipo:

$$\begin{aligned} y(k) + a_1y(k-1) + a_2y(k-2) + \dots + a_ny(k-n) \\ = b_mu(k-1) + b_{m-1}u(k-2) + \dots + b_0u(k-m). \end{aligned} \quad (1.51)$$

Defina o operador deslocamento unitário  $z^{-1}$  por  $z^{-1}y(k) = y(k-1)$ . É o operador análogo ao operador diferencial no domínio do tempo contínuo. Através das propriedades do operador deslocamento, pode-se então rescrever (1.51) como:

$$y(z) + a_1z^{-1}y(z) + a_2z^{-2}y(z) + \dots + a_nz^{-n}y(z) = b_mu(z) + b_{m-1}z^{-1}u(z) + \dots + b_0z^{-m}u(z)$$

com o operador deslocamento unitário aplicado  $n$  vezes tem-se  $y(k-n) = z^{-n}y(k)$  com as condições iniciais iguais a zero, ou seja,  $y(-1) = y(-2) = \dots = y(-n) = 0$  e  $u(-1) = u(-2) = \dots = u(-m) = 0$ . Então, a sua função de transferência é dada por:

$$G(z) = \frac{b_m + b_{m-1}z^{-1} + \dots + b_0z^{-m}}{a_1z^{-1} + a_2z^{-2} + \dots + a_nz^{-n}}. \quad (1.52)$$

Analogamente ao caso contínuo, a resposta impulsional de um sistema dinâmico denotada  $g(k)$  é definida como a transformada inversa da função de transferência  $G(z)$  é composta de uma combinação de termos chamados modos os quais são determinados pelos polos  $p_i$ . Os modos são associados aos polos  $p_i^k, i = 1, 2, \dots, n$ , e são do tipo:  $p_i^k, kp_i^k, k^2p_i^k, \dots, k^{m-1}p_i^k, r^k \cos(\beta k), r^k \sen(\beta k)$ ,  $p_i = re^{j\beta}$ , para o caso de polos reais simples, polos de multiplicidade  $m$  e polos complexos, respectivamente. A solução é da forma:

$$g(k) = (c_1 + c_2k + c_3k^2 + \dots + c_mk^{m-1})p_i^k + c_{m+1}p_{m+1}^k + \dots + c_np_n^k. \quad (1.53)$$

**Exemplo 1.7** Determinar os valores final e inicial de  $y(k)$  para uma entrada degrau unitário do sistema descrito pela função de transferência:

$$G(z) = \frac{10z + 5}{(z + 0,5)(z^2 + 2z + 5)}.$$

O valor inicial pode ser calculado a partir do limite:

$$y(0) = \lim_{z \rightarrow \infty} G(z) \frac{1}{1 - z^{-1}}$$

e o valor final

$$\lim_{k \rightarrow \infty} y(k) = \lim_{z \rightarrow \infty} G(z).$$

Para confirmar, calcular a inversa da transformada  $z$ . Os polos são  $p_1 = -0,5$  e  $p_2 = -1 + j2$  e  $p_2^* = -1 - j2$ .

Escrever:

$$\frac{y(z)}{z} = \frac{c_0}{z-1} + \frac{c_1}{z+0,5} + \frac{c_2}{(z+1-j)} + \frac{c_2^*}{(z+1+j)}$$

usando  $u(z) = \frac{z}{(z-1)}$ . e então determinar os coeficientes da mesma forma que no caso contínuo usando o teorema dos resíduos:

$$c_i = [(z - p_i) \frac{y(z)}{z}]_{z=p_i},$$

em que a inversa correspondente a cada modo então pode ser obtida da tabela de transformadas como:

$$\mathcal{Z}^{-1} \left[ \frac{c_i z}{z - p_i} \right] = c_i (p_i)^k, \quad i = 1, \dots, n.$$

O que fornece:

$$y(k) = c_0 + c_1(-0,5^k) + c_2|p_2|^k e^{j\beta k} + c_2^*|p_2|^k e^{-j\beta k}.$$

Usando o comando de Matlab obtêm-se as constantes  $C = [c_1 \ c_2 \ c_2^*]$ :

[C P K]=residue(N,D)

com  $N$  e  $D$  o numerador e denominador de  $y(z)/z$ . Assim, obtém-se:

$$y(k) = c_0 + c_1(-0,5^k) + 2Re(c_2)|p_2|^k \cos(\beta k) + 2Im(c_2)|p_2|^k \text{sen}(\beta k). \quad (1.54)$$

Caso  $G(z)$  não possui um zero na origem, a transformada inversa pode ser obtida do Exemplo 1.7 da seguinte forma:

$$\mathcal{Z}^{-1} \left[ z^{-1} \frac{c_i z}{z - p_i} \right] = c_i (p_i)^{k-1}, \quad i = 1, \dots, n. \quad (1.55)$$

### 1.1.9 Versão discreta dos teoremas do valor final e inicial

As versões discretas dos teoremas do valor final e inicial são obtidas de modo análogo ao contínuo.

**Teorema 1.3** *Suponha que  $y(k) = 0$  para  $k < 0$  e que a resposta tende para uma constante tem-se:*

$$\lim_{k \rightarrow \infty} y(k) = \lim_{z \rightarrow 1} (1 - z^{-1})y(z). \quad (1.56)$$

**Prova:** Usa-se a transformada  $\mathcal{Z}$  de  $y(k)$  e a propriedade de deslocamento. Isto é  $\mathcal{Z}[y(k-1)] = z^{-1}y(z)$ . Assim,

$$\begin{aligned} (1 - z^{-1})y(z) &= y(z) - z^{-1}y(z) \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} (y(k) - y(k-1))z^{-k} \end{aligned} \quad (1.57)$$

Expandindo o somatório chega-se ao resultado.  $\square$

**Teorema 1.4** *Suponha  $y(k) = 0$  para  $k < 0$ . Então,*

$$y(0) = \lim_{z \rightarrow \infty} y(z). \quad (1.58)$$

**Prova:** Para obter o valor inicial usa-se a definição de transformada  $\mathcal{Z}$ :

$$y(z) = \sum_0^{\infty} y(k)z^{-k}. \quad (1.59)$$

Tomando o limite de todos os termos do somatório de  $y(z)$  para  $k \rightarrow \infty$  o resultado segue.  $\square$

No Capítulo 2 técnicas de discretização de sistemas e de amostragem de sinais e sistemas incluindo a correspondência entre os planos complexos  $s$  e  $z$  são apresentadas. No Apêndice A são apresentadas as principais propriedades da transformada  $\mathcal{Z}$  assim como uma tabela das transformadas de funções básicas. Um texto completo e didático em transformadas de Laplace pode ser encontrado em Geromel and Palhares (2004) e em transformadas  $s$  e  $z$  em Castrucci et al. (2011).

## 1.2 Descrição Espaço de Estado

Equações diferenciais organizadas como um conjunto de equações diferenciais de 1ª ordem simultâneas, definindo um vetor de estado, cuja solução é dada por uma trajetória no espaço vetorial formando uma equação vetorial denominada espaço de estado. A descrição espaço de estado é composta pelas equações de estado e de saída como segue:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= F(x, u) \\ y &= H(x, u) \end{aligned} \quad (1.60)$$

com  $u \in \mathfrak{R}^m$  a entrada,  $y \in \mathfrak{R}^q$  a saída e  $x \in \mathfrak{R}^n$  o chamado estado e  $F(., .)$  e  $H(., .)$  são vetores de dimensões apropriadas.

**Definição 1.5** *O estado de um sistema em  $t_0, x(t_0)$ , é a quantidade de informação em  $t_0$  que, juntamente com  $u \in [t_0, \infty)$  determina unicamente o comportamento do sistema para todo  $t \geq t_0$  e descreve a distribuição de energia interna do sistema.*

Pode-se associar cada componente do vetor de estado denotado variável de estado a armazenadores de energia. Por exemplo, posição (energia potencial), velocidade (energia cinética), tensão no capacitor (energia elétrica) e corrente no indutor (energia magnética).

**Exemplo 1.8** *Considere o circuito RLC mostrado na Figura 1.6 abaixo com  $R_1 = R_2 = R_3 = 1\Omega$ ,  $L = 1H$  e  $C = 1F$ . A representação espaço de estado pode ser obtida escolhendo como variáveis de estado a tensão no capacitor e a corrente no indutor. Por*

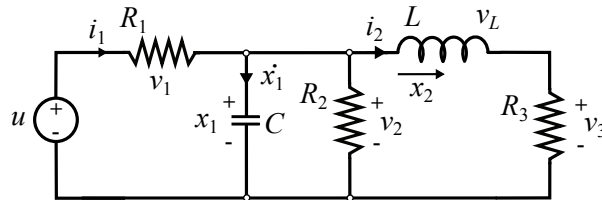


Figura 1.6: Circuito RLC.

*inspeção, usando a lei de correntes de Kirchoff pode-se obter:*

$$\begin{aligned} i_1 &= u - x_1, v_1 = u - x_1, v_2 = x_1 \\ i_2 &= x_2, v_3 = x_2, v_L = x_1 - v_3 \end{aligned}$$

*Portanto, a representação é a seguinte:*

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= i_1 - i_2 - x_1 \\ &= u - 2x_1 - x_2 \\ \dot{x}_2 &= x_1 - x_2. \end{aligned}$$

*Assim, com a solução das equações de estado e saída, todas as tensões e correntes do circuito RLC podem ser calculadas. A representação espaço de estado, com a saída*

definida como a tensão  $v_3$ , é então:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= \begin{bmatrix} -2 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} u \\ y &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} x\end{aligned}$$

**Exemplo 1.9** Considere um pêndulo simples ilustrado na Figura 1.7. Obter a equação de movimento rotacional em torno do centro de massa pela segunda lei de Newton:

$$I\alpha = T$$

em que  $T$  é a soma dos torques atuantes na massa dado em  $N.m$ ,  $I$  é o momento de inércia em torno centro de massa dado em  $Kg.m^2$ ,  $\alpha$  é a aceleração angular do corpo dada por  $rad/s^2$ .

As forças que atuam na massa  $m$  são a tração no fio e o peso  $mg$  em que  $mg = mg\cos(\theta) + mg\sin(\theta)$ . A primeira componente do peso é anulada pela força de tração no fio. Assim, os torques sobre o pêndulo são o torque aplicado denotado  $T_u$  e o torque devido a força peso  $mg$  dado por  $mg\ell \sin(\theta)$ . Aplicando a lei de Newton tem-se:

$$I\ddot{\theta} = T_u - mg\ell\sin(\theta)$$

e então

$$\ddot{\theta} = \frac{T_u}{m\ell^2} - \frac{g}{\ell}\sin(\theta)$$

com  $I = m\ell^2$  no suporte. O modelo espaço de estado pode ser construído definindo como estado a posição  $\theta$  e a velocidade  $\dot{\theta}$ ,  $u = T_u$  e  $y = \theta$ . Assim, obtém-se:

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= \dot{\theta} = x_2 \\ \dot{x}_2 &= \ddot{\theta} = \frac{T_u}{m\ell^2} - \frac{g}{\ell}\sin x_1 - \frac{b}{m\ell^2}x_2\end{aligned}$$

em que foi introduzido o torque devido ao atrito viscoso  $b$  para considerar amortecimento no movimento. O diagrama de simulação para uma entrada degrau é mostrado na Figura 1.8. Na forma vetorial tem-se:

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} x_2 \\ -\frac{g}{\ell}\sin(x_1) - \frac{b}{m\ell^2}x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{m\ell^2} \end{bmatrix} u$$

### 1.2.1 Linearização local

Considere um sistema da forma

$$\dot{x} = F(x; u) \tag{1.61}$$

onde  $x$  é o vetor de estado,  $u$  o vetor de controle e  $F(.,.)$  composto de funções suaves.

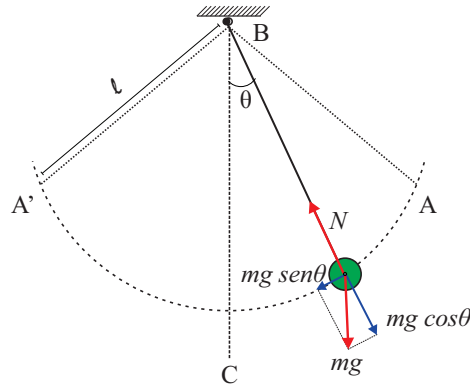


Figura 1.7: Esquemático das forças no pêndulo.

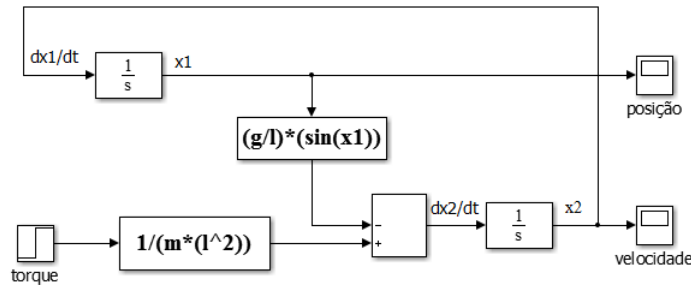


Figura 1.8: Diagrama simulink das equações do pêndulo.

**Definição 1.6** Um estado  $x_e$  é um estado de equilíbrio ou ponto de equilíbrio do sistema se uma vez igual  $x(t)$  igual a  $x_e$ ,  $x(t)$  permanece em  $x_e$  para todo tempo futuro.

Podemos estudar o comportamento de sistemas na vizinhança do ponto de equilíbrio), fazendo uma linearização neste ponto. Suponha que  $x_e, u_e$  seja um ponto de equilíbrio de (1.61). Para uma pequena perturbação  $z$  e  $v$  tem-se

$$x = x_e + z, u = u_e + v. \tag{1.62}$$

Substituindo agora (1.62) em (1.61) obtém-se:

$$\dot{z} = F(x_e + z, u_e + v). \tag{1.63}$$

Assim, translada-se o ponto de equilíbrio  $(x_e, u_e)$  de (1.61) no ponto  $(z_e, v_e)$  de (1.63).

**Aproximação de Taylor**

Supondo  $F$  na classe de funções diferenciáveis  $C^2$ , pode-se expandir (1.63) em uma série de Taylor em torno do ponto  $(x_e, u_e)$ , e então:

$$\dot{z} = F(x_e, u_e) + [grad_x F]^T|_{x_e, u_e} z + [grad_u F]^T|_{x_e, u_e} v + (termos ordem superior) \tag{1.64}$$

em que  $[\text{grad}_x F]^T = \frac{\partial F}{\partial x}$  e  $[\text{grad}_u F]^T = \frac{\partial F}{\partial u}$  são as matrizes Jacobianas de  $F(x, u)$  em relação a  $x$  e  $u$ , respectivamente. Dessa forma:

$$\dot{z} \approx [\text{grad}_x F]^T|_{x_e, u_e} z + [\text{grad}_u F]^T|_{x_e, u_e} v = Az + Bv \quad (1.65)$$

com  $A$  e  $B$  calculadas em  $(x_e, u_e)$  como segue:

$$A = \begin{bmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial x_1} & \frac{\partial F_1}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial F_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial F_2}{\partial x_1} & \frac{\partial F_2}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial F_2}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial F_n}{\partial x_1} & \frac{\partial F_n}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial F_n}{\partial x_n} \end{bmatrix}_{x=x_e, u=u_e} \quad B = \begin{bmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial u_1} & \frac{\partial F_1}{\partial u_2} & \cdots & \frac{\partial F_1}{\partial u_m} \\ \frac{\partial F_2}{\partial u_1} & \frac{\partial F_2}{\partial u_2} & \cdots & \frac{\partial F_2}{\partial u_m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial F_n}{\partial u_1} & \frac{\partial F_n}{\partial u_2} & \cdots & \frac{\partial F_n}{\partial u_m} \end{bmatrix}_{x=x_e, u=u_e}$$

A equação da saída linearizada pode ser obtida de forma análoga, ou seja,  $y \approx [\text{grad}_x H]^T|_{x_e, u_e} z + [\text{grad}_u H]^T|_{x_e, u_e} v$ . Para um sistema linear com  $x_e = 0$  e  $u_e = 0$  tem-se portanto:

$$\dot{x}_i = a_{i1}x_1 + \cdots + a_{in}x_n + b_{i1}u_1 + \cdots + b_{im}u_m \quad (1.66)$$

$$y_j = c_{j1}x_1 + \cdots + c_{jn}x_n + d_{j1}u_1 + \cdots + d_{jm}u_m \quad (1.67)$$

o que fornece para  $i = 1, \dots, n$  e  $j = 1, \dots, p$ :

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1m} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{n1} & \cdots & b_{nm} \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} c_{11} & \cdots & c_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ c_{p1} & \cdots & c_{pn} \end{bmatrix}, D = \begin{bmatrix} d_{11} & \cdots & d_{1m} \\ \vdots & & \vdots \\ d_{p1} & \cdots & d_{pm} \end{bmatrix}$$

O diagrama de blocos da representação espaço de estado é mostrado na Figura 1.9.

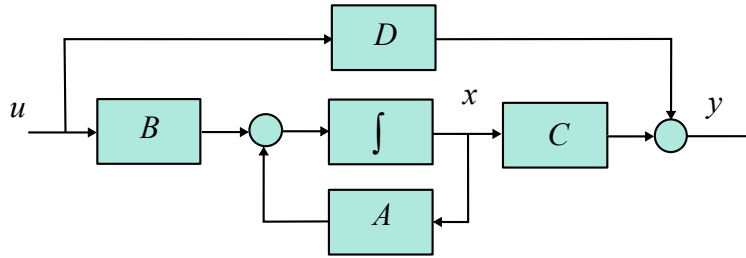


Figura 1.9: Diagrama de blocos.

**Exercício 1.4** A equação para o nível do sistema de escoamento ilustrado na Figura 1.10 é da seguinte forma

$$\dot{h} = \frac{1}{A_T}(Q_i - Q_o)$$



em que  $Q_o$  é a vazão de saída e  $Q_i = K\sqrt{h}$  é a vazão de entrada com  $K = n_f A_f \sqrt{2g}$  para  $n_f$  o número de furos e  $A_f$  a área do trapézio. Para  $K = 0.13 \cdot 10^{-2} [\text{m}^3 \text{s}^{-1/2}]$  e  $A_f = 6.75 \cdot 10^{-3} [\text{m}^2]$  pede-se a equação do sistema linearizado para o nível em torno de  $h_e = 0.08\text{m}$ .

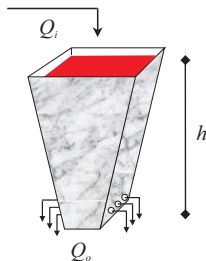


Figura 1.10: Sistema de escoamento.

### Fórmula de linearização de Teixeira e Žak

Considere um caso especial de (1.61):

$$\dot{x} = F(x) + G(u). \quad (1.68)$$

Teixeira and Žak (1999) introduziram uma fórmula de aproximação local de sistemas não-lineares, que produz uma boa aproximação do sistema na vizinhança do pontos de operação escolhidos, mesmo que estes não sejam pontos de equilíbrio. Considere  $\bar{x}$  um ponto de operação, não necessariamente um ponto de equilíbrio. O objetivo é obter matrizes  $A$  e  $B$  de dimensões apropriadas, tais que na vizinhança de  $\bar{x}$  o sistema (1.68) possa ser descrito por

$$F(x) + G(x)u \approx Ax + Bu, \text{ para todo } u \quad (1.69)$$

e

$$F(\bar{x}) + G(\bar{x})u = A\bar{x} + Bu, \text{ para todo } u \quad (1.70)$$

para  $F(\cdot)$ ,  $G(\cdot)$ ,  $x$  e  $u$  como anteriormente definidos. Dado que  $u$  é arbitrário, tem-se  $G(\bar{x}) = B$ . Desta forma, o procedimento se reduz a encontrar a matriz  $A$  de forma que na vizinhança de  $\bar{x}$  tem-se

$$F(x) \approx Ax \quad (1.71)$$

e

$$F(\bar{x}) = A\bar{x}. \quad (1.72)$$

Seja  $a_i^T$  a  $i$ -ésima linha da matriz  $A$ . Então (1.71) pode ser representado por

$$F_i(x) \approx a_i^T x \quad (1.73)$$

em que o  $i$ -ésimo componente de  $F$  é  $F_i : \mathfrak{R}^n \rightarrow \mathfrak{R}$ . Expandindo (1.73) em torno de  $\bar{x}$  e desprezando os termos de ordem superior a dois tem-se

$$F_i(\bar{x}) + \nabla^T F_i(\bar{x})(x - \bar{x}) \approx a_i^T (x - \bar{x}). \quad (1.74)$$

em que  $[grad_x F_i]^T = \frac{\partial F_i}{\partial x}$  é o gradiente de  $F_i(x)$ . O objetivo é encontrar  $a_i$  que seja o mais próximo possível de  $\nabla^T F_i(\bar{x})$  e satisfaz  $a_i^T \bar{x} = \nabla^T F_i(\bar{x})$ . Seja

$$E = \frac{1}{2} \|\nabla^T F_i(\bar{x}) - a_i^T\| \quad (1.75)$$

Pode-se chegar ao seguinte problema de otimização convexo:

$$\begin{aligned} & \text{minimizar } a_i^T E \\ & \text{sujeito a } a_i^T \bar{x} = F_i(\bar{x}). \end{aligned} \quad (1.76)$$

Uma condição necessária de primeira ordem para o mínimo de  $E$  é também suficiente (Chong and Zak, 1996). As condições de primeira ordem para o problema de otimização (1.76) são

$$\nabla_{a_i} E + \lambda \nabla_{a_i} (a_i^T \bar{x} - F_i(\bar{x})) = 0, \quad (1.77)$$

$$a_i^T \bar{x} = F_i(\bar{x}). \quad (1.78)$$

A solução do problema de otimização acima é dada por

$$a_i = \nabla F_i(\bar{x}) + \frac{F_i(\bar{x}) - \bar{x}^T \nabla F_i(\bar{x})}{\|\bar{x}\|^2} \bar{x}; \bar{x} \neq 0 \quad (1.79)$$

em que  $a_i$  são as colunas da matriz  $A$ ,  $\nabla F_i(\bar{x})$  é o gradiente de  $F_i(\cdot)$  calculado em relação a  $x$ ,  $\bar{x}$  é o ponto de linearização escolhido e  $\|\bar{x}\|$  é a norma-2 do vetor  $\bar{x}$ . Esta fórmula é referenciada como fórmula de linearização de Teixeira and Žak (1999) e produz aproximações lineares em vez de afins, geralmente obtidas da fórmula de linearização de Taylor. Para verificar esta afirmação, considere a fórmula de linearização de Taylor apresentada acima:

$$A = \nabla F(\bar{x}) := \left. \frac{\partial F(x)}{\partial x} \right|_{x=\bar{x}} \quad (1.80)$$

cuja aproximação de  $F(x)$  é dada por

$$F(x) \approx F(\bar{x}) + \nabla F(\bar{x})(x - \bar{x}). \quad (1.81)$$

Desta forma, quando  $F(\bar{x}) \neq 0$  esta aproximação produz modelos afins em vez de lineares, como mencionado. Utilizando a fórmula de linearização de Teixeira e Žak, pode-se obter várias representações lineares do sistema em pontos de linearização escolhidos.

**Exemplo 1.10** *Considere o problema de controle de um pêndulo invertido em um carro em movimento, conforme ilustra a Figura 1.11. Obter os modelos lineares do pendulo em dois pontos do espaço de estado usando fórmula de linearização de Teixeira e Žak.*

*O movimento do pêndulo pode ser descrito pelas equações (Zhang et al., 2014):*

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= \frac{g \sin(x_1) - a m l x_2^2 \sin(2x_1)/2 - a \cos(x_1) u}{4\ell/3 - a m l \cos^2(x_1)} \end{aligned}$$

em que  $x_1$  denota o ângulo do pêndulo com a vertical,  $x_2$  é a velocidade angular,  $g = 9,8 [m/s^2]$  é a constante gravitacional,  $m$  é a massa do pêndulo,  $M$  é a massa do carro,

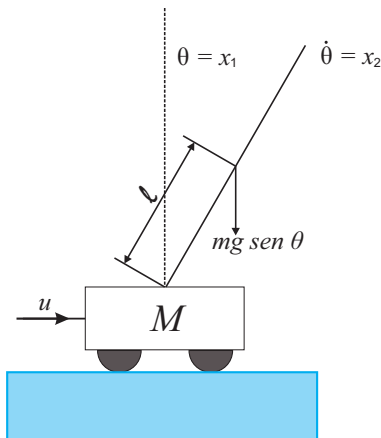


Figura 1.11: Esquemático do carro com um pêndulo invertido.

$a = 1/(m + M)$ ,  $2l$  é o comprimento do pêndulo e  $u$  é a força aplicada ao carro. Os seguintes parâmetros foram escolhidos:  $m = 2[\text{kg}]$ ,  $M = 8[\text{kg}]$  e  $l = 0,5[\text{m}]$ .

O objetivo do controle é estabilizar o pêndulo na faixa aproximada  $x_1 \in (-\pi/2, \pi/2)$ . O sistema do pêndulo possui pontos de equilíbrio em  $x_1 = \pm k\pi$ ,  $k = 0, 1, 2, \dots$ , e  $x_2 = 0$ . Portanto, escolheu-se os pontos  $(0, 0)$  e  $(\approx \pm\pi/2, 0)$  para a linearização. Através da técnica de linearização de Taylor (1.64) obtém-se o sistema linear na origem.

Seja  $\dot{x} = F(x, u)$ .

$$\begin{aligned}
 A(x_e, u_e) &= \frac{\partial F}{\partial x}(x_0, u_0) \\
 &= \begin{bmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial x_1}(x, u) & \frac{\partial F_1}{\partial x_2}(x, u) \\ \frac{\partial F_2}{\partial x_1}(x, u) & \frac{\partial F_2}{\partial x_2}(x, u) \end{bmatrix}_{(x_e, u_e)},
 \end{aligned}$$

com

$$\frac{\partial F_1}{\partial x_1}(x, u) = 0,$$

$$\frac{\partial F_1}{\partial x_2}(x, u) = 1,$$

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial F_2}{\partial x_1}(x, u) &= \frac{(4l/3 - aml \cos^2(x_1))(g \cos(x_1) - amlx_2^2 \cos(x_1) + a \sin(x_1)u)}{(4l/3 - aml \cos^2(x_1))^2} \\
 &\quad + \frac{(2 \sin(x_1) \cos(x_1))(g \sin(x_1) - amlx_2^2 \sin(2x_1)/2 - a \cos(x_1)u)}{(4l/3 - aml \cos^2(x_1))^2},
 \end{aligned}$$

$$\frac{\partial F_2}{\partial x_2}(x, u) = -amlx_2 \sin(2x_1),$$

e

$$B(x_e, u_e) = \frac{\partial F}{\partial u}(x_e, u_e) = \left[ \begin{array}{c} 0 \\ \frac{-a \cos(x_1)}{4\ell/3 - aml \cos^2(x_1)} \end{array} \right]_{(x_e, u_e)}.$$

Na origem tem-se:

$$A(0, 0, 0) = \left[ \begin{array}{cc} 0 & 1 \\ \frac{g}{4\ell/3 - aml} & 0 \end{array} \right],$$

$$B(0, 0, 0) = \left[ \begin{array}{c} 0 \\ \frac{-a}{4\ell/3 - aml} \end{array} \right].$$

Observe que o mesmo procedimento efetuado no ponto  $(\approx \pm\pi/2, 0)$  resulta em um sistema afim, ao invés de linear, devido a presença dos termos  $F(x_e, u_e)$  e  $-(Ax_e + Bu_e)$ . Para contornar este problema será utilizado a fórmula de Teixeira e Zák.

Aplicando a fórmula dada na Seção 1.2.1 para  $x_1 = 88^\circ\pi/180^\circ$  e  $x_2 = 0$ , tem-se

$$a_1^T = [0 \quad 1],$$

$$a_2^T = \left[ \begin{array}{cc} 2g & 0 \\ \pi(4\ell/3 - aml\phi) & \end{array} \right],$$

onde  $\phi = \cos(88^\circ\pi/180^\circ)$  e  $a_i$ ,  $i = 1, 2$ , é a  $i$ -ésima linha de  $A$ . Portanto,

$$A(88^\circ\pi/180^\circ, 0, 0) = \left[ \begin{array}{cc} 0 & 1 \\ \frac{2g}{\pi(4\ell/3 - aml\phi)} & 0 \end{array} \right].$$

A matriz  $B$  é obtida a partir da equação para  $B(x_{\bar{x}}, u_\ell)$ :

$$B(88^\circ\pi/180^\circ, 0, 0) = \left[ \begin{array}{c} 0 \\ \frac{-a\phi}{4\ell/3 - aml\phi^2} \end{array} \right].$$

Substituindo os valores dos parâmetros tem-se

$$A_1 = A(0, 0, 0) = \left[ \begin{array}{cc} 0 & 1 \\ 16,18 & 0 \end{array} \right], \quad B_1 = B(0, 0, 0) = \left[ \begin{array}{c} 0 \\ -0,081 \end{array} \right],$$

$$A_2 = A(88^\circ\pi/180^\circ, 0, 0) = \left[ \begin{array}{cc} 0 & 1 \\ 4,24 & 0 \end{array} \right], \quad B_2 = B(88^\circ\pi/180^\circ, 0, 0) = \left[ \begin{array}{c} 0 \\ -0,0026 \end{array} \right].$$

---

**Exercício 1.5** Considere as equações do pêndulo simples mostradas no Exemplo 1.9. Usando  $\ell = 0,5$  [m],  $m = 10$  [kg],  $g = 9,81$  [m/s<sup>2</sup>],  $b = 0,04$  [N s/m], simular a posição do pêndulo não linear e linear para  $T_u = 2$  [Nm], mostrar as respostas em um mesmo gráfico.

### 1.2.2 Modelos lineares locais

É possível representar exatamente certas classes de sistemas não lineares usando uma combinação convexa de modelos lineares locais. A representação exata do sistema não linear foi proposta por Taniguchi et al. (2001) a qual depende dos máximos e mínimos das não linearidades na região de operação e pode ser global ou não. Considera-se a seguinte classe de sistema não linear:

$$\dot{x}_i = \sum_{j=1}^n F_{ij}(x)x_j(t) + \sum_{k=1}^m G_{ik}(x)u_k(t), i = 1, \dots, n \quad (1.82)$$

em que  $x_j(t)$  e  $u_k(t)$  são as variáveis de estado e entrada, respectivamente. Para obter a representação exata do sistema definem-se:

$$\mathcal{D} = \{x \in \mathbb{R}^n : |x_p| \leq d_p\}, p \in \mathcal{I} \subset \{1, \dots, n\} \quad (1.83)$$

e

$$a_{ij1} = \max_{x(t)} F_{ij}(x(t)), a_{ij2} = \min_{x(t)} F_{ij}(x(t)), i, j = 1, \dots, n \quad (1.84)$$

$$b_{ik1} = \max_{x(t)} G_{ik}(x(t)), b_{ik2} = \min_{x(t)} G_{ik}(x(t)), k = 1, \dots, m \quad (1.85)$$

O número de modelos lineares é dado por  $r = 2^s$ , onde  $s$  é o número de não linearidades. Defina:

$$h_{ij1}(x(t)) = \frac{F_{ij}(x(t)) - a_{ij2}}{a_{ij1} - a_{ij2}}, h_{ij2}(x(t)) = 1 - h_{ij1}(x(t)) \quad (1.86)$$

$$v_{ik1}(x(t)) = \frac{G_{ik}(x(t)) - b_{ik2}}{b_{ik1} - b_{ik2}}, v_{ik2}(x(t)) = 1 - v_{ik1}(x(t)). \quad (1.87)$$

Sem perda de generalidade, suponha não linearidades em  $F_{12}, F_{23}, G_{32}, G_{13}$  e então o número de modelos lineares é  $r = 16$  e as funções de ponderação (chamadas de funções de pertinência) são dadas por:

$$\begin{aligned} h_1(x(t)) &= h_{111} * h_{231} * v_{321} * v_{131}, & h_2(x(t)) &= h_{111} * h_{231} * v_{321} * v_{132} \\ h_3(x(t)) &= h_{111} * h_{231} * v_{322} * v_{131}, & h_4(x(t)) &= h_{111} * h_{231} * v_{322} * v_{132} \\ h_5(x(t)) &= h_{111} * h_{232} * v_{321} * v_{131}, & h_6(x(t)) &= h_{111} * h_{232} * v_{321} * v_{132} \\ h_7(x(t)) &= h_{111} * h_{232} * v_{322} * v_{131}, & h_8(x(t)) &= h_{111} * h_{232} * v_{322} * v_{132} \\ h_9(x(t)) &= h_{112} * h_{231} * v_{321} * v_{131}, & h_{10}(x(t)) &= h_{112} * h_{231} * v_{321} * v_{132} \\ h_{11}(x(t)) &= h_{112} * h_{231} * v_{322} * v_{131}, & h_{12}(x(t)) &= h_{112} * h_{231} * v_{322} * v_{132} \\ h_{13}(x(t)) &= h_{112} * h_{232} * v_{321} * v_{131}, & h_{14}(x(t)) &= h_{112} * h_{232} * v_{321} * v_{132} \\ h_{15}(x(t)) &= h_{112} * h_{232} * v_{322} * v_{131}, & h_{16}(x(t)) &= h_{112} * h_{232} * v_{322} * v_{132} \end{aligned} \quad (1.88)$$

Portanto, o sistema não linear pode ser exatamente representado por:

$$\dot{x}(t) = \sum_{i=1}^r h_i(x(t))(A_i x(t) + B_i u) \quad (1.89)$$

no conjunto  $\mathcal{D}$  e  $\sum_{i=1}^r h_i = 1$ . A obtenção dos modelos locais  $A_i, B_i, i = 1, \dots, r$  é ilustrada no seguinte exemplo.

**Exemplo 1.11** *Considere o sistema não linear:*

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2(t) \\ \dot{x}_2 &= x_1(t)\cos(x_2(t)) - x_3(t) \\ \dot{x}_3 &= x_1(t)x_3(t) + (1 + 0,5\text{sen}(x_3(t)))u(t).\end{aligned}$$

*O sistema pode ser escrito como:*

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ \cos(x_2(t)) & 0 & -1 \\ 0 & 0 & x_1(t) \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ (1 + 0,5\text{sen}(x_3(t)))u(t) \end{bmatrix}.$$

*As não linearidades são:*

$$\begin{aligned}F_{21}(x(t)) &= \cos(x_2(t)) \\ F_{33}(x(t)) &= x_1(t) \\ G_{31}(x(t)) &= 1 + 0,5\text{sen}(x_3(t)).\end{aligned}$$

*Pede-se obter os modelos linearizados do sistema para representar exatamente o sistema não linear.*

*Defina:*

$$\begin{aligned}a_{211} &= \max_{x(t)} \cos(x_2(t)), \quad a_{212} = \min_{x(t)} \{\cos(x_2(t))\} \\ a_{331} &= \max_{x(t)} x_1(t), \quad a_{332} = \min_{x(t)} x_1(t) \\ b_{311} &= \max_{x(t)} \{1 + 0,5\text{sen}(x_3(t))\} \\ b_{312} &= \min_{x(t)} \{1 + 0,5\text{sen}(x_3(t))\}.\end{aligned}$$

*Escolhendo o intervalo para  $x_1$  como  $\{-5 \leq x_1 \leq 5\}$ , tem-se:*

$$\begin{aligned}a_{211} &= 1, \quad a_{212} = -1 \\ a_{331} &= 5, \quad a_{332} = -5 \\ b_{311} &= 1,5, \quad b_{312} = 0,5\end{aligned}$$

*e*

$$\begin{aligned}h_{211} &= \frac{F_{21} - a_{212}}{a_{211} - a_{212}} = \frac{\cos(x_2(t)) + 1}{2}, \quad h_{212} = 1 - h_{211} \\ h_{331} &= \frac{F_{33} - a_{331}}{a_{331} - a_{332}} = \frac{x_1(t) + 5}{10}, \quad h_{332} = 1 - h_{331} \\ v_{311} &= \frac{G_{31} - b_{312}}{b_{311} - b_{312}} = \frac{\text{sen}(x_3(t)) + 1}{2}, \quad v_{312} = 1 - v_{311}.\end{aligned}$$

Então, as funções de pertinência são dadas por:

$$\begin{aligned} h_1 &= h_{211}h_{331}v_{311}, h_2 = h_{212}h_{331}v_{311} \\ h_3 &= h_{211}h_{332}v_{311}, h_4 = h_{212}h_{332}v_{311} \\ h_5 &= h_{211}h_{331}v_{312}, h_6 = h_{212}h_{331}v_{312} \\ h_7 &= h_{211}h_{332}v_{312}, h_8 = h_{212}h_{332}v_{312}. \end{aligned}$$

Portanto, o sistema não linear pode ser exatamente representado por:

$$\dot{x}(t) = \sum_1^8 h_i(x(t))(A_i x(t) + B_i u)$$

no conjunto  $D = \{x \in \mathbb{R}^3 : -5 \leq x_1 \leq 5\}$  com:

$$A_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}, A_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$$

$$A_3 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -5 \end{bmatrix}, A_4 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -5 \end{bmatrix}$$

$$A_5 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}, A_6 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$$

$$A_7 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -5 \end{bmatrix}, A_8 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$$

$$B_1 = B_2 = B_3 = B_4 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1,5 \end{bmatrix}, B_5 = B_6 = B_7 = B_8 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0,5 \end{bmatrix}.$$

O código a seguir apresenta os comandos principais para gerar a Figura 1.12 a qual mostra a resposta do sistema descrito pela soma ponderada de modelos lineares e a resposta do sistema não linear para comparação.

```
% Solução sistema não linear u=0
f=@(t,x)[0 1 0; cos(x(2)) 0 -1; 0 0 x(1)]*x + [0; 0; 1+0.5*sin(x(3))]*u
% Defina condição inicial
x0=[1;1;1]; t=0:0.01:10;
% Resolva a equação espaço de estado
[t,y]=ode45(f,t,x0)
plot(t, y(:,1),'b',...
      t, y(:,2), 'y', t, y(:,3), 'r', 'LineWidth',1)
      legend('x_1(t)', 'x_2(t)', 'x_3(t)')
A=cell(1,8); % Soma ponderada dos modelos locais
```

```

A{1,1}=[0 1 0; a211 0 -1; 0 0 a331];
A{1,2}=[0 1 0; a212 0 -1; 0 0 a331];
A{1,3}=[0 1 0; a211 0 -1; 0 0 a332];
A{1,4}=[0 1 0; a212 0 -1; 0 0 a332];
A{1,5}=A{1,1}; A{1,6}=A{1,2};
A{1,7}=A{1,3}; A{1,8}=A{1,4};
% Para verificar as matrizes dos modelos locais
celldisp(A); B=cell(1,8);
B{1,1}=[0;0;b311]; B{1,5}=[0;0;b312];
B{1,2}=B{1,1}; B{1,3}=B{1,1}; B{1,4}=B{1,1};
B{1,6}=B{1,5}; B{1,7}=B{1,5}; B{1,8}=B{1,5};
celldisp(B) % Para verificar as matrizes dos modelos locais
t1=0:0.5:10;
[t1,y]=ode45('ff',t1,x0);
function ff=fun_modelo (~,x)
    AH=h1*A{1,1} + h2*A{1,2} + h3*A{1,3} + h4*A{1,4}+...
        h5*A{1,5} + h6*A{1,6} + h7*A{1,7} + h8*A{1,8};
    BH=h1*B{1,1} + h2*B{1,2} + h3*B{1,3} + h4*B{1,4}+...
        h5*B{1,5} + h6*B{1,6} + h7*B{1,7} + h8*B{1,8};
    % Equação matricial
    ff=AH*x + BH*u;

```

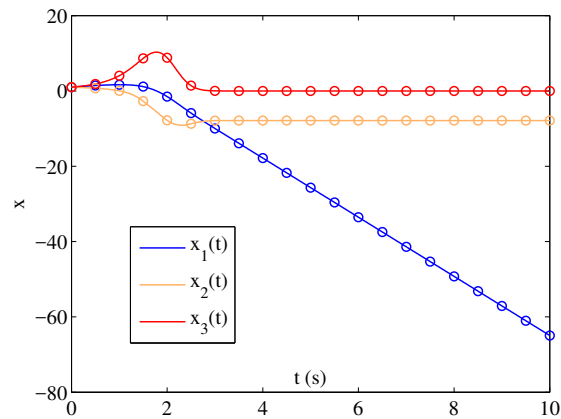


Figura 1.12: Comparação das respostas:  $\circ$  soma ponderada dos modelos locais e  $-$  não linear



### 1.2.3 Resposta impulsional e função de transferência

Aplicando a transformada de Laplace no sistema na forma espaço de estado obtém-se:

$$sx(s) - x_0 = Ax(s) + Bu(s) \quad (1.90)$$

fornecendo

$$x(s) = (sI - A)^{-1}x_0 + (sI - A)^{-1}Bu(s) \quad (1.91)$$

e

$$y(s) = C(sI - A)^{-1}x_0 + [C(sI - A)^{-1}B + D]u(s). \quad (1.92)$$

com  $x_0 := x(0)$ . Um sistema com uma entrada ( $m = 1$ ) e uma saída ( $q = 1$ ) é chamado sistema com uma entrada e uma saída (SISO, das iniciais em inglês) se não for o caso é chamado sistema com múltipla entrada múltipla saída (MIMO, das iniciais em inglês). A correspondente matriz de transferência entre  $y$  e  $u$  é definida por:

$$y(s) = G(s)u(s) \quad (1.93)$$

onde

$$G(s) = C(sI - A)^{-1}B + D \quad (1.94)$$

Supõe-se que  $G(s)$  tem posto completo e  $\text{Posto}(G(s) = \min(p, m))$ .

O modelo espaço de estado  $(A, B, C, D)$  tal que  $G(s) = C(sI - A)^{-1}B + D$  é denominado uma realização espaço de estado de  $G(s)$ . Para obter  $x(t)$  podemos usar  $\mathcal{L}\{e^{At}\} = (sI - A)^{-1}$  o que pode ser verificado a partir da aproximação em série de Taylor :

$$e^{At} = e^{At}|_{t=0} + \frac{\partial}{\partial t}e^{At}|_{t=0} t + \dots + \frac{\partial^n}{\partial t^n}e^{At}|_{t=0} t^n. \quad (1.95)$$

Esta série foi obtida usando:

$$e^{At} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} t^k A^k. \quad (1.96)$$

A partir da transformada de Laplace

$$\mathcal{L}[e^{At}] = \int_0^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} t^k A^k dt \quad (1.97)$$

e usando  $\mathcal{L}\left[\frac{t^k}{k!}\right] = s^{-(k+1)}$  pode-se verificar que  $\mathcal{L}[e^{At}] = s^{-1} \sum (s^{-1}A)^k$ . Uma vez que

$$f(s) = (1 - s)^{-1} = 1 + s + s^2 + \dots = \sum_{k=0}^{\infty} s^k, \quad (1.98)$$

pode-se obter

$$\sum (s^{-1}A)^k = (I - s^{-1}A)^{-1}. \quad (1.99)$$

Desta forma pode-se escrever:

$$s^{-1}(I - s^{-1}A)^{-1} = s^{-1} \frac{(sI - A)^{-1}}{s^{-1}} = (sI - A)^{-1} \quad (1.100)$$

e portanto

$$\mathcal{L}[e^{At}] = (sI - A)^{-1}. \quad (1.101)$$

Considerando a aproximação de  $e^{At}$  em torno de  $t = t_0$  obtêm-se:

$$x(t) = e^{A(t-t_0)}x_0 + \int_0^t e^{A(t-\tau)}Bu(\tau) \quad (1.102)$$

notando que o segundo termo de  $x(t)$  é a convolução de  $\exp(At)$  com  $Bu(t)$ . A solução  $y(t)$  é dada por:

$$y(t) = Ce^{A(t-t_0)}x_0 + \int_0^t [Ce^{A(t-\tau)}B + D\delta(t-\tau)]u(\tau)d\tau. \quad (1.103)$$

Suponha  $u(t) = 0$ . Tem-se então a resposta à entrada nula:

$$x(t) = e^{A(t-t_0)}x_0. \quad (1.104)$$

Denotando

$$\Phi(t, t_0) = e^{A(t-t_0)} \quad (1.105)$$

pode-se escrever a solução devido à condição inicial:

$$s(t) = \Phi(t, t_0)x_0. \quad (1.106)$$

A matriz (1.105) é a chamada matriz de transição de estado a qual descreve a propagação do estado de  $t_0$  ao tempo  $t$ . Pode ser interpretada como um operador.

Suponha agora  $x_0 = 0$ , tem-se então a resposta ao estado zero:

$$x(t) = \int_0^t e^{A(t-\tau)}Bu(\tau) \quad (1.107)$$

$$y(t) = \int_0^t [Ce^{A(t-\tau)}B + D\delta(t-\tau)]u(\tau)d\tau. \quad (1.108)$$

Assim,  $s(t) = \Phi(t, t_0)x_0$  é chamada resposta à entrada nula e  $G(t) = Ce^{A(t-\tau)}B + D\delta(t)$  é a chamada resposta impulsional.

**Notação 1.1** A solução do sistema  $(A, B)$  é dada por  $s(t) = s(t; t_0, x_0, 0) + s(t; t_0, 0, u)$  em que o primeiro termo é a resposta à entrada nula e o segundo a resposta ao estado zero.

A obtenção da relação entrada/saída é feita considerando  $x_0 = 0$ :

$$\begin{aligned} G(s) &= [C(sI - A)^{-1}B + D] \\ &= \frac{C \{adj(sI - A)\} B}{\det(sI - A)} + D \\ &= \frac{C \{adj(sI - A)\} B + D \det(sI - A)}{\det(sI - A)} \end{aligned} \quad (1.109)$$

Os valores de  $s = z_i$  tais que  $G(z_i) = 0$  são chamados zeros e os valores de  $s = p_i$  tais que  $G(p_i) = \infty$  são chamados polos. Supõe-se que  $G(s)$  tem posto completo e

que Posto  $G(s) = \min(p, m) := r$ . O polinômio dado por  $\det(sI - A)$  é o chamado polinômio característico de  $A$  e é denotado por  $\Delta(s)$ .

Os modos podem ser introduzidos também em termos da solução da espaço de estado a partir da decomposição de  $e^{At}$  como segue:

$$\begin{aligned} e^{At} &= \sum_{i=1}^m \sum_{k=0}^{n_i-1} A_{ik} t^k e^{\lambda_i t} \\ &= \sum_{i=1}^m [A_{i0} e^{\lambda_i t} + A_{i1} t e^{\lambda_i t} + \cdots + A_{i(n_i-1)} t^{n_i-1} e^{\lambda_i t}] \end{aligned} \quad (1.110)$$

com  $\lambda_1, \dots, \lambda_m$  os autovalores com multiplicidade  $n_i$  distintos de  $A$  e

$$A_{ik} = \frac{1}{k!} \frac{1}{(n_i - 1 - k)!} \lim_{s \rightarrow \lambda_i} [(s - \lambda_i)^{n_i} (sI - A)^{-1}]^{n_i - 1 - k} \quad (1.111)$$

em que  $[\cdot]^\ell$  denota a  $\ell$ -ésima derivada com respeito a  $s$ . O termo  $A_{ik} t^k e^{\lambda_i t}$  é chamado modo do sistema.

Considere agora o caso em que  $n_i = 1, i = 1, \dots, n$ . Neste caso  $e^{At}$  toma a forma:

$$e^{At} = \sum_{i=1}^n A_i e^{\lambda_i t} \quad (1.112)$$

com  $A_i = \lim_{s \rightarrow \lambda_i} [(s - \lambda_i)(sI - A)^{-1}]$ . Para esse caso, existe um procedimento alternativo para computar  $e^{At}$  usando  $A_i = \lambda_i v_i$  com  $v_i \in \mathcal{R}^n$  e  $u_i^T \in \mathcal{R}^n$  autovetores a direita e a esquerda de  $A$ , ou seja,  $v_i$  e  $u_i$  são obtidos a partir de  $(\lambda_i I - A)v_i = 0$  e  $u_i(\lambda_i I - A) = 0$ , respectivamente. De fato, com  $Q := [v_1, \dots, v_n]$  e  $Q^{-1} := [u_1, \dots, u_n]^T$  e usando  $A = Q \text{diag}[\lambda_1, \dots, \lambda_n] Q^{-1}$  pode-se escrever

$$\begin{aligned} (sI - A)^{-1} &= (sI - Q \text{diag}[\lambda_1, \dots, \lambda_n] Q^{-1})^{-1} \\ &= Q(sI - \text{diag}[\lambda_1, \dots, \lambda_n])^{-1} Q^{-1} \\ &= Q \text{diag}[(s - \lambda_1)^{-1}, \dots, (s - \lambda_n)^{-1}] Q^{-1} \\ &= \sum_{i=1}^n v_i u_i (s - \lambda_i)^{-1}. \end{aligned} \quad (1.113)$$

Aplicando a inversa de Laplace obtém-se:

$$e^{At} = \sum_i^n v_i u_i e^{\lambda_i t}. \quad (1.114)$$

Em particular, se  $x_0 = \alpha v_j$ , então,

$$\begin{aligned} s(t) &= e^{At} x_0 \\ &= v_i u_1 x_0 e^{\lambda_1 t} + \cdots + v_n u_n x_0 e^{\lambda_n t} \\ &= \alpha v_j e^{\lambda_j t} \end{aligned} \quad (1.115)$$

uma vez que  $u_i^T v_j = \delta_{ij}$ .

Para o caso discreto, a representação espaço de estado é da forma:

$$\begin{aligned}x(k+1) &= Ax(k) + Bu(k) \\y(k) &= Cx(k) + Du(k).\end{aligned}\tag{1.116}$$

Similarmente ao caso contínuo pode-se obter a solução da equação de estado no domínio da frequência via transformada  $\mathcal{Z}$ . Então,

$$\begin{aligned}\mathcal{Z}[x(k+1)] &= \sum_{k=0}^{\infty} x(k+1)z^{-k} \\&= z \sum_{r=1}^{\infty} x(r)z^{-r} \\&= z \left[ \sum_{r=0}^{\infty} x(r)z^{-r} - x(0) \right] = z[x(z) - x(0)]\end{aligned}\tag{1.117}$$

Aplicando portanto a transformada  $\mathcal{Z}$  na equação espaço de estado acima tem-se:

$$zx(z) - zx(0) = Ax(z) + Bu(z)\tag{1.118}$$

A solução da equação de estado é da forma:

$$x(z) = (zI - A)^{-1}zx(0) + (zI - A)^{-1}Bu(z)\tag{1.119}$$

e daqui,

$$y(z) = C(zI - A)^{-1}zx(0) + D(z)u(z)\tag{1.120}$$

O primeiro termo de  $y(z)$  é a saída devido a entrada nula e o segundo termo a saída devido ao estado zero. A solução do sistema discreto espaço de estado pode ser obtida a partir da função de transferência discreta. A função de transferência discreta pode ser obtida como:

$$G(z) = C(zI - A)^{-1}B + D.\tag{1.121}$$

Pode-se tirar a transformada inversa de  $x(z)$  e  $y(z)$  para obter, similarmente ao caso contínuo, as soluções:

$$x(k) = A^k x(0) + \sum_{t=0}^{k-1} A^{k-i-1} Bu(i)\tag{1.122}$$

$$y(k) = CA^k x(0) + \sum_{i=0}^{k-1} CA^{k-i-1} Bu(i) + Du(k)\tag{1.123}$$

e a resposta impulsional

$$G(k) = \begin{cases} D, & k = 0 \\ CA^{k-1}B, & k > 0. \end{cases}\tag{1.124}$$

### 1.2.4 Sistemas equivalentes

É fácil verificar que um dado sistema de equações diferenciais pode ter muitas descrições espaço de estado. A realização espaço de estado de uma função de transferência não é única. Através de uma mudança de variáveis

$$x = T\bar{x} \quad (1.125)$$

com  $T$  não singular pode-se obter outra realização. Desde que existe uma infinidade de matrizes  $T$  existe uma infinidade de realizações.

**Definição 1.7** *Seja  $T$  uma matriz  $n \times n$  não singular com coeficientes no corpo dos números complexos  $C$ , e defina  $x = T\bar{x}$ . Então*

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \bar{A}x + \bar{B}u \\ y &= \bar{C}x + \bar{D}u \end{aligned} \quad (1.126)$$

é equivalente ao sistema  $(A, B, C, D)$  com  $\bar{A} = T^{-1}AT$ ,  $\bar{B} = T^{-1}B$ ,  $\bar{C} = CT$ ,  $\bar{D} = D$  e  $T$  é a transformação de equivalência.

A relação  $\bar{A} = T^{-1}AT$  é conhecida como transformação de similaridade,  $\bar{A}$  e  $A$  são chamadas matrizes similares representando o mesmo operador.

**Definição 1.8** *Dois sistemas são estado-zero equivalentes se e só se têm a mesma matriz resposta impulsional. São entrada-nula equivalentes se e só se para qualquer condição inicial  $x(t_0)$  existir um estado inicial e vice-versa tal que os dois sistemas tenham a mesma resposta a entrada-nula.*

**Teorema 1.5** *Dois sistemas equivalentes a saída é estado-zero e entrada-nula equivalentes.*

**Prova:** A primeira parte do teorema pode ser mostrada da seguinte forma. A matriz resposta impulsional do sistema  $(A, B, C, D)$  é da forma  $G(t) = Ce^{At}B + D\delta(t)$  e para o sistema  $(\bar{A}, \bar{B}, \bar{C}, \bar{D})$  é  $G(t) = \bar{C}e^{\bar{A}t}\bar{B} + \bar{D}\delta(t)$ . Se os dois sistemas são equivalentes, tem-se  $\bar{A} = T^{-1}AT$ ,  $\bar{B} = T^{-1}B$ ,  $\bar{C} = CT$ ,  $\bar{D} = D$ . Consequentemente,  $e^{\bar{A}t} = T^{-1}e^{At}T$  e  $\bar{C}e^{\bar{A}t}\bar{B} + \bar{D}\delta(t) = Ce^{At}B + D\delta(t)$ . Assim, os dois sistemas são estado-zero equivalentes. A segunda parte é mostrada como segue. A resposta entrada-nula do sistema  $(A, B, C, D)$  é  $y(t) = Ce^{A(t-t_0)}x_0$  e a resposta do  $(\bar{A}, \bar{B}, \bar{C}, \bar{D})$  é  $y(t) = \bar{C}e^{\bar{A}(t-t_0)}\bar{x}_0$ . Então, se escolhermos  $\bar{x}_0 = T^{-1}x_0$  os dois sistemas apresentam a mesma resposta ao estado-zero.  $\square$

## 1.3 Sistemas Lineares com Atraso

Os sistemas lineares com atraso podem ser descritos por equações do tipo diferencial-diferença, uma equação em variáveis com argumentos que diferem por um número fixo de valores.

$$\begin{aligned} F(y(t), y(t - \omega_1), \dots, y(t - \omega_m), \dots, \dot{y}(t), \dots, \dot{y}(t - \omega_1), \dots, \\ \dot{y}(t - \omega_m), \dots, y^{(n)}(t), y^{(n)}(t - \omega_1), \dots, y^{(n)}(t - \omega_m)) = 0 \end{aligned} \quad (1.127)$$

em que  $F$  é uma função dada de  $1+(m+1)(n+1)$  variáveis, e os números reais  $\omega_1, \dots, \omega_m$  são chamados retardos. As derivadas e diferenças aparecem em várias ordens. A ordem da diferencial é a ordem mais alta da derivada e a ordem da diferença o número de atrasos distintos menos 1.

**Exemplo 1.12** *Obter as ordens das equações diferencial-diferença*

1.  $\ddot{y}(t) - \dot{y}(t-1) + y(t) = 0$
2.  $\dot{y}(t) - \dot{y}(t-1) + y(t - \sqrt{2}) = 0$
3.  $\dot{y}(t) - 2y(t) + \dot{y}(t-1) - 2y(t-1) = 0.$

*A primeira possui ordem 2 nas derivadas e ordem 1 nas diferenças, a segunda ordem 1 nas derivadas e ordem 2 nas diferenças e a terceira ordem 1 nas derivadas e ordem 1 nas diferenças.*

### 1.3.1 Equações lineares com coeficientes e retardos constantes

Uma equação diferencial-diferença linear de ordem diferencial  $n$  e ordem diferença  $m$  pode ser escrita na forma (Cossi, 2011):

$$\sum_{k=0}^n \sum_{j=0}^m a_{kj} y^{(k)}(t - \omega_j) = u(t). \quad (1.128)$$

A equação

$$\sum_{k=0}^n \sum_{j=0}^m a_{kj} y^{(k)}(t - \omega_j) = 0 \quad (1.129)$$

é chamada equação diferencial linear homogênea com coeficientes e retardos constantes. Considera-se que  $0 = \omega_0 < \omega_1 < \omega_2 < \dots < \omega_{m-1} < \omega_m$ . Na literatura encontra-se a seguinte classificação de sistemas com atraso (El'sgol'ts and Norkin, 1973).

1. Se o coeficiente  $a_{n0} \neq 0$  e os outros  $a_{nj} = 0, j = 1, \dots, m$ , isto é:

$$a_{n0} y^n(t) + \sum_{k=0}^{n-1} \sum_{j=0}^m a_{kj} y^{(k)}(t - \omega_j) = 0$$

então (1.128) é uma equação diferencial-diferença do tipo retardo. Neste caso, não tem atraso associado à derivada de maior ordem.

2. Se  $a_{n0} = 0$  e, se para apenas um  $j > 0$ ,  $a_{nj} \neq 0$ , isto é:

$$a_{nj_0} y^n(t - \omega_{j_0}) + \sum_{j=0}^{n-1} \sum_{j=1}^m a_{kj} y^{(k)}(t - \omega_j) = 0$$

para somente um  $j_0 \in \{1, \dots, m\}$ , então (1.128) é uma equação diferencial-diferença do tipo avançado.

3. Se  $a_{n0} \neq 0$ , e, se para apenas um  $j > 0$ ,  $a_{nj} \neq 0$ , isto é:

$$a_{n0}y^n(t) + a_{nj_0}y^n(t - \omega_{j_0}) + \sum_{k=0}^{n-1} \sum_{j=0}^m a_{kj}y^{(k)}(t - \omega_j) = 0$$

para apenas um  $j_0 \in \{1, \dots, m\}$ , então (1.128) é uma diferencial-diferença do tipo neutral. Neste caso, tem atraso associado à derivada de maior ordem.

Uma solução particular (1.128) é da forma:

$$y(t) = e^{st} \quad (1.130)$$

em que  $s$  é a variável complexa. Substituindo (1.130) em (1.128) e cancelando  $e^{st}$ , obtém-se a equação característica:

$$\sum_{k=0}^n \sum_{j=0}^m a_{kj}e^{-w_j s} s^k = 0. \quad (1.131)$$

O lado esquerdo de (1.131) denotado  $\delta^*(s)$ , isto é:

$$\delta^*(s) = \sum_{k=0}^n \sum_{j=0}^m a_{kj}e^{-w_j s} s^k \quad (1.132)$$

é chamado função característica. Multiplicando (1.132) por  $e^{\omega_m s}$ , obtém-se:

$$\delta(s) = e^{\omega_m s} \delta^*(s) = \sum_{k=0}^n \sum_{j=0}^m a_{kj}e^{(\omega_m - \omega_j)s} s^k \quad (1.133)$$

o qual é chamado quasi-polinômio característico. O quasi-polinômio (1.133) possui um conjunto infinito de raízes, cada raiz  $s_k$  corresponde à solução  $y(t) = e^{s_k t}$ . Os zeros de  $\delta^*(s)$  e  $\delta^*(s) * e^{\omega_m s}$  são os mesmos. Combinações lineares de soluções  $\sum_{k=0}^M c_k e^{s_k t}$  com coeficientes constantes e mesmo a soma das séries infinitas:

$$\sum_{k=0}^{\infty} c_k e^{s_k t} \quad (1.134)$$

de soluções, se a série (1.134) converge e admite  $n$  sucessivas diferenciações, são soluções de (1.128).

Se todos os coeficientes  $a_{kj}$  são reais, então as raízes complexas  $s = p \pm iq$  de (1.133) correspondem à solução complexa  $y(t) = e^{(p \pm iq)t}$  ou às soluções reais  $e^{pt} \cos(qt)$  e  $e^{pt} \sin(qt)$ , as quais são as partes reais e imaginárias correspondentes da solução  $e^{(p \pm iq)t}$ .

### 1.3.2 Localização das raízes de quasi-polinômios

O quasi-polinômio é uma função analítica. Se a função  $\delta(s)$  não degenera em um polinomial, então  $\delta(s)$  possui um conjunto de zeros infinitos, o único ponto limite é o infinito.

Se (1.128) é uma equação com o argumento retardo, então todas as raízes  $s_k$  do quasi-polinômio  $\delta(s)$  situam-se no semiplano esquerdo, ou seja,  $\text{Re}(s_k) \leq 0$ . No caso (1.128) é do tipo avançado, então todas as raízes  $s_k$  do quasi-polinômio  $\delta(s)$  situam-se no semiplano direito, ou seja,  $\text{Re}(s_k) \geq -\sigma$ , com  $\sigma$  um escalar positivo. No caso (1.128) é do tipo neutral, então todas as raízes  $s_k$  do quasi-polinômio  $\delta(s)$  situam-se no semiplano direito  $\text{Re}(s_k) \leq \sigma$ . Uma peculiaridade da localização das raízes do quasi-polinômio  $\delta(s)$  correspondendo a (1.128) do tipo neutral é que sempre existem seqüências de raízes assintóticas para as quais  $k \rightarrow \infty$ ,  $\text{Re}(s_k) \rightarrow \alpha < \infty$ .

**Exemplo 1.13** *Obter as raízes assintóticas do quasi-polinômio correspondente de  $\dot{y}(t) + ay(t-1) = 0$ . A função característica da equação diferencial-diferença acima é  $s + ae^{-s} = 0$ , e o quasi-polinômio característico é  $\delta(s) = se^s + a$ .*

As raízes de  $\delta(s)$  são

$$s_k = -\ln \left| \frac{2\pi k}{a} \right| \pm \left( \frac{1}{2} \text{sgn}(a) + 2k \right) \pi i + O\left(\frac{\ln(k)}{k}\right)$$

com  $O(\cdot)$  a ordem de grandeza do erro e  $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ .

---

**Exemplo 1.14** *Obter as raízes assintóticas do quasi-polinômio para a seguinte equação do tipo neutral*

$$\dot{y}(t) + ay(t-1) + by(t-1) = 0, a \neq 0.$$

A equação característica desta equação tem a forma  $s + (as + b)e^{-s} = 0$ . Obtém-se então as seguintes raízes para  $\delta(s) = se^s + (as + b)$

$$\begin{aligned} s_k &= +\ln(-a) \pm 2k\pi i + O\left(\frac{1}{k}\right), a < 0 \\ s_k &= +\ln(a) \pm (2k+1)\pi i + O\left(\frac{1}{k}\right), a > 0. \end{aligned}$$


---

Considere uma classe especial de (1.133) com apenas um retardo que aparece em problemas de engenharia de controle:

$$\delta^*(s) = D(s) + e^{-Ls}N(s) \tag{1.135}$$

com  $D(s) = s^n + \sum_{k=0}^{n-1} a_k s^k$ ,  $L > 0$ ,  $N(s) = b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \dots + b_0$ , e multiplicando  $\delta^*(s)$  por  $e^{Ls}$  obtém-se

$$\delta(s) = e^{Ls}D(s) + N(s). \tag{1.136}$$

Neste quasi-polinômio tem-se  $a_{n0} = 1$ . Se  $m < n$  tem-se um quasi-polinômio (1.136) de uma equação do tipo retardo. Se  $m = n$  tem-se quasi-polinômio (1.136) de uma equação do tipo neutral.



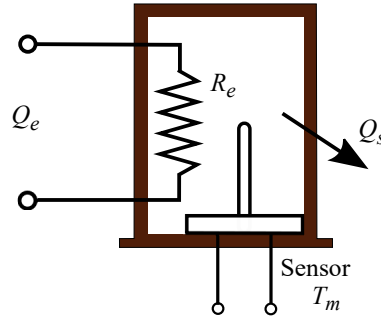


Figura 1.13: Modelo estufa.

**Exemplo 1.15** Considere uma estufa elétrica com capacitância  $C[J/^\circ C]$ , resistência elétrica  $R_e [\Omega]$  e resistência térmica do isolador  $R[^\circ C/W]$  representada na Figura 1.13. Sejam  $Q_e[J/s]$  o fluxo de calor fornecido pela estufa e  $T[^\circ C]$  a temperatura de saída da estufa.

Sabendo que há troca de calor com o exterior, por conservação de calor, tem-se  $Q_e = Q_F + Q_s$  com  $Q_F[J/s]$  o fluxo de calor gerado e  $Q_s[J/s]$  o fluxo que sai da estufa. A temperatura do interior é a diferença  $T = T_F - T_a$ , com  $T_F$  e  $T_a$  as temperaturas gerada pela estufa e do exterior, respectivamente. O fluxo de calor e temperatura são análogos à corrente e tensão em um circuito elétrico sendo dadas por (Garcia, 2005):

$$Q_s = \frac{1}{R}T$$

$$\dot{T} = \frac{1}{C}(Q_e - Q_s).$$

Assim, para o caso da estufa tem-se:

$$Q_e = C \frac{dT}{dt} + Q_s$$

$$= C \frac{dT}{dt} + \frac{T}{R}.$$

A função de transferência é então dada por:

$$G(s) = \frac{T(s)}{Q_e(s)} = \frac{K}{CRs + 1}$$

com  $K$  um ganho. Como existe um atraso de transporte entre a medida da temperatura pelo sensor, denotada  $T_m$ , e o fluxo na saída tem-se  $T_m = T(t - L)$  com  $L$  o atraso em segundos. Assim,

$$\frac{T_m(s)}{Q_e(s)} = \frac{K}{CRs + 1} e^{-Ls}.$$

O quasi-polinômio é:

$$e^{sL}(RCs + 1) + K = 0.$$



## Capítulo 2

# Sistemas Amostrados e Discretização

A realização de controladores digitais pode ser implementada a partir de microcomputadores, microcontroladores ou mesmo por microprocessadores. Em geral os microcomputadores são empregados na fase de desenvolvimento e análise e, uma vez finalizado o projeto, transfere-se a lógica de controle para um *hardware* composto por microprocessadores ou microcontroladores.

Neste capítulo são tratados os sistemas amostrados caracterizando-se a discretização de sistemas e técnicas de amostragem de sinais e sistemas. A discretização de sistemas permite proceder à análise e projeto de controladores de sistemas utilizando técnicas digitais, dando origem aos controladores digitais. As principais referências deste capítulo são Isermann (1989), Ogata (1997) e Franklin et al. (1994).

As aulas de laboratório têm a finalidade de investigar as técnicas de aquisição digital de sinais analógicos e também verificar o teorema de amostragem.

### 2.1 Amostragem em Sistemas de Controle

A utilização de microcomputadores para implementação de malhas de controle teve início já por volta de 1960. Porém, computadores dessa época não eram apropriados para aplicação industrial, pois tinham uma arquitetura voltada para gerenciamento de dados, de certa forma lentos e não se dispunha de aplicativos adequados para a realização de uma estrutura de controle. Já na década de 70 surgiram os chamados microprocessadores com uma arquitetura digital voltada para um interfaceamento entre o processo a ser controlado (analógico) e o microprocessador. Desde então, o microprocessador passou a ser um elo integrante da malha de controle. Na Figura 2.1 é representado um sistema de controle digital com um microcomputador como um elemento da malha de controle.

Para a implementação de controle digital torna-se necessário a compatibilização dos vários sinais do tipo analógicos e digitais. Na sua forma digital, opera-se com números ou entidades numéricas, os quais podem ser manipulados como se queira através de aplicativos específicos. Na sua forma analógica os sinais representam grandezas físicas e contínuas no tempo e que só podem - se necessário - ser processadas por dispositivos ou

circuitos analógicos. A compatibilização destas formas de sinais é realizada pelo bloco A/D para a conversão Analógico-Digital e pelo bloco D/A para a conversão Digital-Analógica. Determinados processos ou ações de controle são inerentemente do tipo digital, não necessitando propriamente de uma conversão. Nesse caso, os processos são ditos naturalmente amostrados.

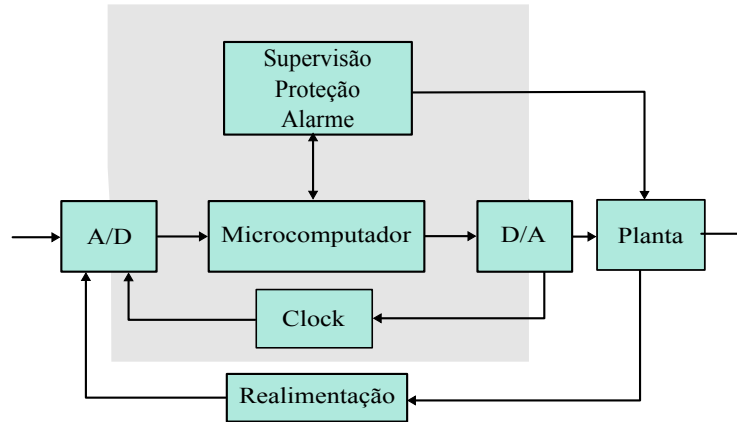


Figura 2.1: Diagrama geral de um sistema de controle digital.

A integração de um microprocessador na malha de controle possibilita a execução de outras tarefas além do controle propriamente dito, como supervisão do processo, emissão de relatórios, proteção, alarmes, coordenação etc., permitindo a realização de sistemas com um alto grau de automatização. Outra característica muito importante é o grau de flexibilidade dos sinais digitais. Isto é, um determinado sinal pode ser redimensionado para fornecer um melhor rendimento ou desempenho, simplesmente através da reprogramação do algoritmo de controle ou de supervisão.

Uma primeira implicação da incorporação do microprocessador na malha de controle é que nos sinais digitais as operações matemáticas que devem ser realizadas necessitam de um certo tempo para serem processadas pelo microprocessador. Durante esse período o microprocessador fica “desligado” do ambiente externo analógico. Desse modo a conexão efetiva entre o microprocessador e o processo é realizada apenas em instantes determinados e periódicos, surgindo então o conceito de amostragem ou discretização. Entre dois instantes de amostragem é realizada conversão A/D do sinal a ser processado, o microprocessador processa o algoritmo de controle e fornece o comando de controle para a conversão D/A. Todo esse processo deve ser sincronizado e repetido a cada período de amostragem.

Para processar uma grandeza analógica através de um microcomputador, é necessário introduzir um processo de amostragem da grandeza a ser processada e posteriormente uma conversão desta amostra em uma quantidade digital. Após o processamento desta quantidade digital por um determinado algoritmo de controle, a quantidade processada que ainda se encontra na forma digital deve ser aplicada ao processo analógico, através de um processo inverso que a converte em uma grandeza analógica. Esse procedimento de conversão pode ser representado como indicado na Figura 2.2.

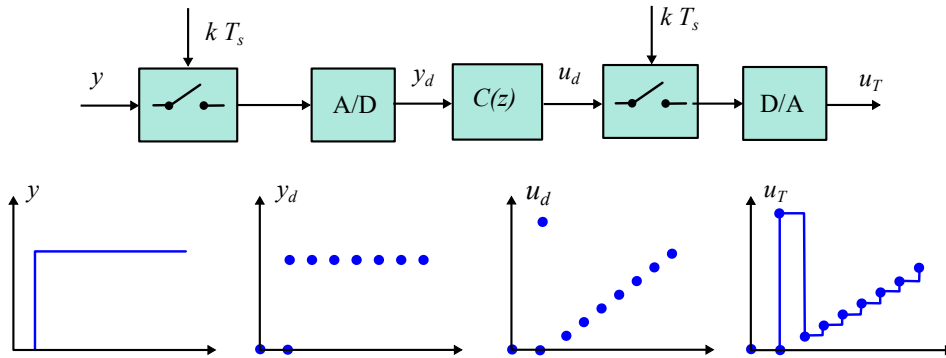


Figura 2.2: Amostragem e caracterização de sinais em processos discretos.

O procedimento de amostragem é periódico, com período denominado  $T_s$ , para que se possa estabelecer a descrição do processo pela transformada  $\mathcal{Z}$  e por equação a diferença. A saída processada digitalmente será fornecida ao processo analógico também de forma periódica com o mesmo período  $T_s$ .

Na Figura 2.2 são indicadas também a representação do sinal via processos de conversão em que os pontos indicam a forma discreta do sinal. Assim, o sinal contínuo se transforma em números que são processados iterativamente a cada passo do controlador.

Uma vez que o sinal original, contínuo no tempo, é definido para qualquer instante de tempo, este carrega consigo um certo nível de informação a respeito do comportamento instantâneo deste sinal. A partir do procedimento de amostragem e conversão A/D, pode-se dizer que apenas poucas porções deste sinal estão disponíveis, ou seja, na forma discreta apenas poucos pontos do sinal original estão disponíveis. Para executar uma estratégia de controle adequada, é necessário que suficiente quantidade de informação esteja disponível nesta forma discreta. Isto determina que a amostragem do sinal a ser analisado ou controlado deve seguir algumas regras, de forma que este possa ser devidamente reconhecido e interpretado dentro da malha de controle.

O procedimento de amostragem, descrito, pode ser representado por um processo de modulação entre o sinal contínuo e uma portadora periódica como um trem de pulsos de amplitude 1 e frequência  $\omega_s$ . Matematicamente, a modulação é representada pelo produto entre o sinal e a portadora denotada  $p(t)$ . O sinal contínuo denotado  $u(t)$  é definido em qualquer instante de tempo. A portadora considera um trem de pulsos unitários de período  $T_s$  dado por:

$$p(t) = \sum_{k=0}^{\infty} [u(t - kT_s) - u(t - kT_s - hT_s)] \quad (2.1)$$

em que  $u(t)$  é a função degrau unitário. Admitindo  $h \ll T_s$ , o sinal  $p(t)$  pode ser aproximado por uma sequência de impulsos dada por:

$$p(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \delta(t - kT_s). \quad (2.2)$$

No caso ideal então, obtém-se o sinal amostrado como sendo dado pela convolução do sinal com o trem de pulsos:

$$u_T(t) = u(t) * p(t) = u(t) \sum_{k=0}^{\infty} \delta(t - kT_s). \quad (2.3)$$

Como resultado do processo de modulação, verifica-se em (2.3) que do sinal original, resta apenas uma sequência de impulsos de amplitude equivalente àquela do sinal original. Também como resultado da modulação, sabe-se que o sinal modulado irá apresentar as características do sinal contínuo acrescido das mesmas características centradas em frequências harmônicas em  $\pm\omega_s$ . Para que não ocorra sobreposição das frequências originais com as harmônicas, a frequência de modulação, aqui no caso, a frequência de amostragem, deve ser elevada o suficiente. O limite da frequência de amostragem, para que não haja sobreposição de espectros é dado pelo teorema da amostragem (Isermann, 1989).

**Teorema 2.1** *Um sinal  $x(t)$  com espectro limitado em banda para  $|\omega| \geq \omega_s$  ou seja  $X(\omega) = 0$  para  $|\omega| \geq \omega_s$  pode ser reconstruído a partir dos seus valores amostrados  $X(k\omega_s)$  se a frequência de amostragem  $\omega_s$  for tal que  $\omega_s/2 \geq \omega_s$  ou  $\omega_s \geq 2\omega_s$ .*

O teorema da amostragem estabelece então que a frequência de amostragem deve ser pelo menos o dobro da frequência (máxima) do espectro do sinal a ser amostrado.

## 2.2 Função de Transferência com Discretização

Sejam a sequência de entrada  $\{u(kT_s)\}$  e a sequência de saída  $\{y(kT_s)\}$ , com  $k \in \mathbb{Z}^+$  e  $T_s$  o período da amostragem. Para simplificar a notação usamos a seguir  $u(kT_s) := u(k)$  e  $y(kT_s) := y(k)$ . Tratando-se de sistemas lineares pode-se descrever a saída como uma sequência ponderada da entrada:

$$y(k) = \sum_{m=0}^{\infty} g(k, m)u(m) \quad (2.4)$$

com

$$u(m) = \begin{cases} 1, & i = m \\ 0, & i \neq m \end{cases} \quad (2.5)$$

Supondo causalidade tem-se  $g(k, m) = 0$  para  $k < m$  e portanto:

$$y(k) = \sum_{m=0}^k g(k, m)u(m). \quad (2.6)$$

Agora, supondo invariância no tempo tem-se  $g(k, m) = g(k - m)$  para  $k \leq m$  e portanto

$$y(k) = \sum_{m=0}^k g(k - m)u(m), \quad k = 0, 1, \dots \quad (2.7)$$

Considere a sequência discreta descrita em (2.3). Utilizando a transformada de Laplace obtém-se:

$$\begin{aligned} u_T(s) &= \mathcal{L}(u(t) * p(t)) \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} u(kT_s) e^{-kT_s s}, \end{aligned} \quad (2.8)$$

uma vez que

$$\mathcal{L}[\delta(t - kT_s)] = \int_{k=0}^{\infty} \delta(t - kT_s) e^{st} dt = e^{-kT_s s}. \quad (2.9)$$

Diferentemente do caso contínuo, a transformada de Laplace dos sinais discretizados resulta em uma sequência representada no somatório em (2.8). Da mesma forma, considerando o somatório de convolução em (2.7), o uso da transformada de Laplace com auxílio de (2.8) produz a representação discretizada da função de transferência dada por:

$$G^*(s) := \frac{y(s)}{u(s)} = \sum_{k=0}^{\infty} g(kT_s) e^{-kT_s s}. \quad (2.10)$$

A função de transferência relacionando entrada e saída discretas é então dada em termos de uma sequência infinita descrita no somatório em (2.10) e não na formulação algébrica de razão de polinômios como no caso contínuo. A análise de sistemas discretos, portanto, com o uso da transformada de Laplace não oferece simplificação do tratamento matemático comum aos sistemas contínuos. A solução para isto é o uso da transformada  $\mathcal{Z}$  definida a seguir.

## 2.3 A Transformada $\mathcal{Z}$

A transformada  $\mathcal{Z}$  é uma aplicação matemática que faz corresponder a cada sequência de números, uma função da variável complexa  $z$ . A variável complexa  $z$  é definida como:

$$z = e^{T_s s}. \quad (2.11)$$

Usando (2.11) em (2.8), obtém-se a seguinte representação do sinal discreto na variável  $z$ :

$$\begin{aligned} u(z) &= \mathcal{Z}\{u_T(t)\} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} u(kT_s) z^{-k} \\ &= u(0) + u(T_s) z^{-1} + u(2T_s) z^{-2} \dots \end{aligned} \quad (2.12)$$

A transformada  $u(z)$  é então uma série infinita de potências da variável  $z$  denominada transformada  $\mathcal{Z}$  do sinal discretizado em (2.8). Da mesma forma, usando (2.11) obtém-se a transformada  $\mathcal{Z}$  da função discretizada em (2.10).

Em muitos casos é possível obter uma função explícita em  $z$  que representa esta série, utilizando propriedades de séries de potências, ou progressões aritméticas ou geométricas. A função assim obtida é referenciada como função em  $z$ . A transformada  $\mathcal{Z}$

da sequência discreta  $u(k)$  denotada por  $u(z)$  é então definida como:

$$\begin{aligned} u(z) &= \mathcal{Z}[u(k)] \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} u(k)z^{-k}. \end{aligned} \quad (2.13)$$

**Exemplo 2.1** *Seja a função degrau unitário  $u(t) = 1(t)$ . Na forma discreta tem-se:*

$$u_T(t) = u(kT_s) = 1(kT_s).$$

*Aplicando a definição de transformada  $\mathcal{Z}$  dada em (2.13) obtém-se:*

$$u(z) = 1 + z^{-1} + z^{-2} + \dots$$

*Observa-se que a função  $u(z)$  acima representa uma série geométrica do tipo*

$$f(r) = a + ar^{-1} + ar^{-2} + \dots$$

*e para esta série, sabe-se que,*

$$f(r) = \frac{a}{1-r}.$$

*No caso acima diz-se que a série  $f(r)$  converge para a função dada por  $\frac{a}{1-r}$ . Assim, fazendo  $a = 1$  e  $r = z^{-1}$  tem-se a transformada  $\mathcal{Z}$  da função degrau:*

$$u(z) = \frac{1}{1-z^{-1}} = \frac{z}{z-1}.$$

Ao final do livro encontra-se no Apêndice A.2 uma tabela contendo as funções usuais de sistemas de controle e suas respectivas transformadas de Laplace e transformada  $\mathcal{Z}$ .

## 2.4 Correspondência entre Plano-s e Plano-z

A partir de (2.11) tem-se o mapeamento do plano-s no plano-z por meio da definição da transformada  $\mathcal{Z}$ . O mecanismo inverso pode então ser descrito por:

$$s = \frac{1}{T_s} \ln(z). \quad (2.14)$$

Desmembrando-se (2.11) através da introdução da variável  $s = \sigma \pm j\omega$  chega-se a:

$$\begin{aligned} z &= e^{T_s s} \\ &= e^{T_s(\sigma + j\omega)} \\ &= e^{\sigma T_s} \left[ \cos(\omega T_s) + j \operatorname{sen}(\omega T_s) \right]. \end{aligned} \quad (2.15)$$



“Plano-s”	“Plano-z”
Eixo Imaginário Positivo: $\sigma_i = 0 \quad 0 \leq j\omega_i \leq j\pi/T_s$	Semicircunferência superior de raio 1
Eixo Imaginário negativo: $\sigma_i = 0 \quad -j\pi/T_s \leq j\omega_i \leq 0$	Semicircunferência inferior de raio 1
Faixa do semiplano esquerdo: $\sigma_i \leq 0 \quad -j\pi/T_s \leq j\omega_i \leq j\pi/T_s$	Interior do círculo unitário

A expressão entre colchetes em (2.15) representa um círculo unitário cujo raio é multiplicado pelo fator  $e^{T_s s}$ . Através de (2.15) verifica-se o mapeamento do plano-s no plano-z pela equivalência dos seguintes trechos:

Por meio da mesma expressão (2.15) verifica-se cada trecho do semiplano esquerdo largura  $2\pi$  do plano-s mapeia um novo círculo unitário no plano-z. Observa-se também que qualquer valor ponto do plano-s no semiplano direito é mapeado na região externa ao círculo unitário. Esta correlação entre o plano-s e o plano-z é vista na Figura 2.3.

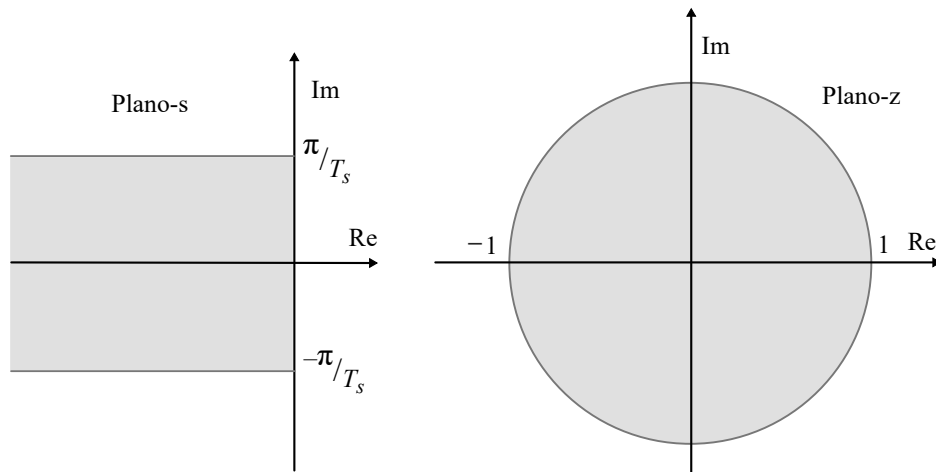


Figura 2.3: Mapeamento do plano-s ao plano-z.

## 2.5 Métodos de Discretização

Os principais métodos de discretização são os métodos de aproximação por integração numérica, equivalência de mapeamento de polos e zeros do planos-s para o plano-z e equivalência com segurador (*sample hold* em inglês), também conhecido como método da resposta invariante ao degrau (Castrucci et al., 2011).

### 2.5.1 Discretização por aproximação numérica

Os procedimentos de discretização por aproximação numérica da integral são classificados em três diferentes métodos, os quais devem produzir o mesmo resultado quando se adota elevadas taxas de amostragem ou de discretização, ou seja, quando  $T_s \rightarrow 0$ . Na Figura 2.4 são indicadas 3 formas de se obter a integral da função  $e(t)$ , a qual corresponde à área sob a curva por meios da aproximação por um somatório de áreas elementares de base ou largura  $T_s$ . As aproximações nas Figs. 2.4-a e 2.4-b representadas por áreas elementares são designadas por aproximação retangular para a frente e para trás, respectivamente. A forma indicada na Figura 2.4-c é denominada aproximação trapezoidal, ou Tustin ou bilinear.

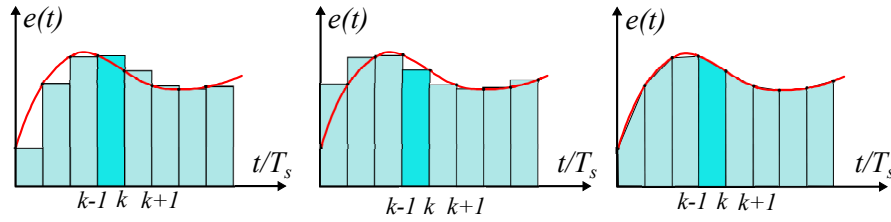


Figura 2.4: Aproximações de integração numérica. (a) Retangular para a frente. (b) Retangular para trás. (c) Trapezoidal.

Considerando constante o período de amostragem  $T_s := t_k - t_{k-1}$  pode-se aproximar a integral pela área sob uma curva contínua como um somatório de retângulos elementares como indicado na Figura 2.4-a. Para compreender estes procedimentos, considera-se a aproximação diferencial ou de integração numérica em termos da variável “z”.

#### Aproximação discreta da integração pela diferença anterior

O cálculo da integral é aproximado pela área de retângulos com altura dada pelo valor de  $e(t)$  no instante  $(k-1)T_s$  e largura dada pelo período de amostragem.

$$u_I(t) = \int_0^t e(\tau) d\tau. \quad (2.16)$$

Aplicando a aproximação retangular anterior em (2.16) tem-se

$$u_I(k) = \sum_{j=0}^{k-1} T_s e(j). \quad (2.17)$$

A partir de (2.17) pode-se chegar então à seguinte equação recursiva:

$$u_I(k) = u_I(k-1) + T_s e(k-1). \quad (2.18)$$

A aproximação (2.18) é também referenciada como aproximação retangular para a frente. Usando o operador atraso unitário  $z^{-1}$ , aplicando a transformada  $\mathcal{Z}$  em (2.18), obtém-se:

$$u_I(z) = z^{-1}u_I(z) + T_s z^{-1}e(z). \quad (2.19)$$

e chega-se à seguinte função de transferência:

$$\begin{aligned} \frac{u_I(z)}{e(z)} &= \frac{T_s z^{-1}}{1 - z^{-1}} \\ &= \frac{T_s}{z - 1}. \end{aligned} \quad (2.20)$$

Finalmente, lembrando que a transformada de Laplace da integração é dada por  $\frac{1}{s}$ , para a obtenção da aproximação da forma discreta pode-se usar, para o caso da fórmula retangular anterior:

$$s = \frac{z - 1}{T_s}. \quad (2.21)$$

Através de (2.21) tem-se que o mapeamento do plano-s ao plano-z ocorre como uma simples ponderação dos pontos por  $T_s$  e deslocamento do ponto 1 do plano-z, ou seja, um semiplano deslocado no plano-z, como ilustrado na Figura 2.5 e expresso pela relação (2.22):

$$z = s T_s + 1. \quad (2.22)$$

Embora englobe o círculo unitário, este procedimento pode produzir polos/zeros instáveis (fora do círculo unitário). Novamente aqui, um mapeamento condizente só será possível para elevadas taxas de amostragem. Esta proposta de discretização restringe, portanto, a possível área de mapeamento dos polos/zeros do sistema contínuo no plano-z. Polos ou zeros que estariam no círculo unitário, mas, fora da região mapeada seriam, portanto, mal representados e a discretização provocaria uma distorção do caso contínuo.

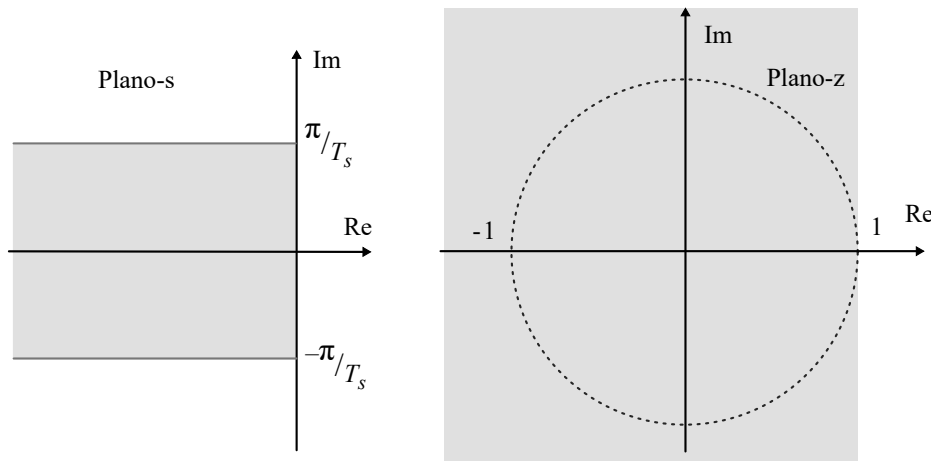


Figura 2.5: Mapeamento plano-s ao plano-z usando a fórmula retangular.

### Aproximação discreta da integração pela diferença posterior

Um procedimento semelhante ao caso anterior pode ser avaliado para aproximação da integração pela soma das áreas de retângulos elementares da Figura 2.4-b também

conhecida como aproximação retangular para trás. O cálculo da (2.16) para a Figura 2.4-b é dado pelo somatório:

$$u_I(k) = \sum_{j=0}^k T_s e(j). \quad (2.23)$$

De (2.23) pode-se chegar então à seguinte equação recursiva:

$$u_I(k) = u_I(k-1) + T_s e(k). \quad (2.24)$$

Usando-se a transformada  $\mathcal{Z}$  em (2.24) obtém-se a função de transferência relativa à operação de integração como sendo:

$$\begin{aligned} \frac{u_I(z)}{e(z)} &= \frac{T_s}{1 - z^{-1}} \\ &= \frac{T_s z}{z - 1} \end{aligned} \quad (2.25)$$

Associando-se expressão em (2.25) com a respectiva transformada de Laplace da operação de integração  $\frac{1}{s}$  resulta em:

$$s = \frac{z - 1}{T_s z} \quad (2.26)$$

ou seja, o mapeamento do plano-s no plano-z é obtido como sendo:

$$z = \frac{1}{1 - T_s s}. \quad (2.27)$$

Considerando a projeção do eixo imaginário por meio da expressão (2.27) resulta que cada trecho de extensão  $2\pi$  descreve um círculo de raio 0,5 centrado no ponto 0,5 do plano-z tal como indicado na Figura 2.6.

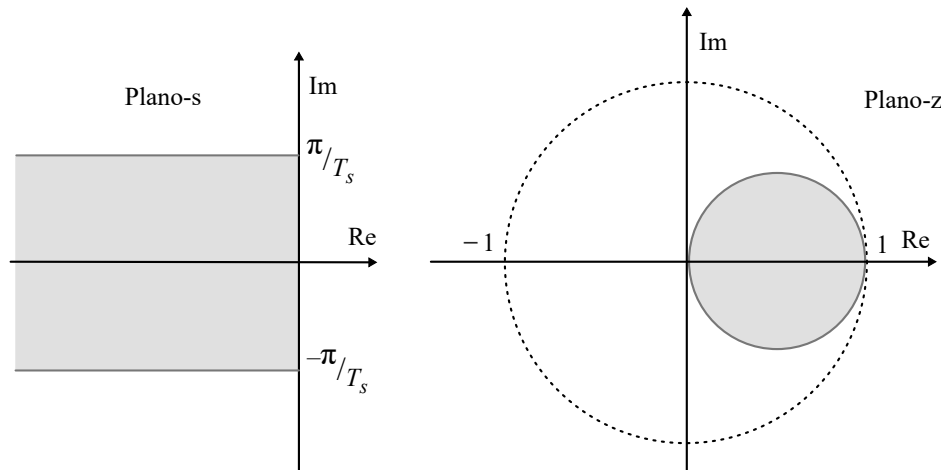


Figura 2.6: Mapeamento do plano-s ao plano-z usando a aproximação da integração pela diferença posterior.

### Aproximação discreta da integração pela fórmula trapezoidal

Usando-se a aproximação trapezoidal, também denominada método bilinear ou método Tustin, a fórmula pode ser obtida a partir do somatório dos trapézios elementares formados nos instantes de amostragem  $k$  e  $k - 1$  indicados na Figura 2.4-c resultando no somatório das áreas obtidas com o valor médio das amostras multiplicado pelo valor do período de amostragem  $T_s$ . De forma similar ao feito anteriormente com retângulos tem-se:

$$u_I(kT_s) = \int_0^{kT_s - T_s} e(\tau) d\tau + \int_{kT_s - T_s}^{kT_s} e(\tau) d\tau$$

Usando a aproximação trapezoidal para a área entre  $kT_s$  e  $kT_s - T_s$ , tem-se:

$$u_I(k) = u_I(kT_s - kT_s) + [e(kT_s) + e(kT_s - kT_s)] \frac{T_s}{2}.$$

Assim, a integração de 0 a  $k-1$  é dada pelo somatório:

$$u_I(k) = \sum_{j=0}^{k-1} \left( \frac{e(jT_s) + e(jT_s - T_s)}{2} \right) T_s.$$

A forma recursiva para  $u(k)$  é dada resulta em:

$$u_I(k) = u_I(k-1) + \frac{T_s}{2} (e(k) + e(k-1)). \quad (2.28)$$

Para este caso a representação em termos da transformada  $\mathcal{Z}$  produz a relação de função transferência como sendo:

$$\begin{aligned} \frac{u_I(z)}{e(z)} &= \frac{T_s}{2} \frac{1 + z^{-1}}{1 - z^{-1}} \\ &= \frac{T_s}{2} \frac{z + 1}{z - 1}. \end{aligned} \quad (2.29)$$

Assim, usando a correspondência a (2.29) com  $\frac{1}{s}$  tem-se a equivalência

$$s = \frac{T_s}{2} \frac{z - 1}{z + 1}. \quad (2.30)$$

O mapeamento do plano- $s$  no plano- $z$  sob esta aproximação pode ser verificado a partir (2.30) como sendo:

$$z = \frac{(T_s/2) + s}{(T_s/2) - s} \quad (2.31)$$

Mapeando-se o eixo imaginário do plano- $s$  com  $s = 0 \pm j\omega$  em (2.31) e processando-se a notação complexa para o modo polar chega-se a:

$$z = \frac{\sqrt{(T_s/2)^2 + \omega^2}}{\sqrt{(T_s/2)^2 + \omega^2}} \frac{e^{j\theta}}{e^{-j\theta}} = e^{j2\theta} \quad (2.32)$$

sendo  $\theta = \arctan 2\omega/T_s$ . Desta forma, verifica-se que o eixo imaginário é mapeado no círculo de raio 1. O mapeamento do semiplano esquerdo para essa transformação é

obtido da seguinte maneira. Se um sistema é estável tem-se  $\text{Re}(s) < 0$  o que implica  $\text{Re}\left(\frac{z-1}{z+1}\right) < 0$  com  $T_s > 0$ . Substituindo  $z = \sigma + j\omega$  tem-se:

$$\text{Re}\left(\frac{\sigma + j\omega - 1}{\sigma + j\omega + 1}\right) < 0 \quad (2.33)$$

o que fornece  $\sigma^2 - 1 + \omega^2 < 0$  e portanto,  $\sigma^2 + \omega^2 < 1$ . Assim, verifica-se que o semiplano esquerdo do plano- $s$  é mapeado no interior do círculo unitário, como no caso da definição da transformada  $\mathcal{Z}$  em (2.11) e correspondente à Figura 2.3.

A discretização de Tustin embora produza distorções na resposta em frequência, mapeia todo o semiplano esquerdo do plano- $s$  na totalidade do círculo unitário do plano- $z$  exatamente como feito pela definição e representado na Figura 2.3.

### Aproximação discreta da derivada

Esta aproximação pode ser obtida de maneira similar ao já visto para a aproximação da integral. Considere a aproximação pela diferença posterior e seja

$$u_D(t) = \frac{de}{dt}. \quad (2.34)$$

Integrando ambos os lados tem-se:

$$e(t) = \int_0^t u_D(\tau) d\tau. \quad (2.35)$$

Trocando  $u_D(t)$  por  $e(t)$  e  $u_I(t)$  por  $e(t)$  em (2.18) obtém-se:

$$e(kT_s) = e(kT_s - T_s) + T_s u_D(kT_s). \quad (2.36)$$

Assim,

$$u_D(kT_s) = \frac{1}{T_s} [e(kT_s) - e(kT_s - T_s)]. \quad (2.37)$$

### 2.5.2 Mapeamento de polos e zeros

Neste método, faz-se o mapeamento do plano- $s$  ao plano- $z$  pela definição da transformada  $\mathcal{Z}$ . Isto equivale a mapear os individualmente os polos/zeros do controlador do plano- $s$  para o plano- $z$ , tal que:

$$z = e^{T_s s} \quad (2.38)$$

sendo  $T_s$  adequadamente escolhido de forma a atender o teorema da amostragem. Portanto, se o controlador for obtido na sua forma contínua, por exemplo,

$$G_c(s) = K_c \frac{\prod_{j=1}^m (s + \beta_j)}{\prod_{i=1}^m (s + \alpha_i)} \quad (2.39)$$

através do mapeamento polo/zero chega-se a:

$$G_D(z) = K_D \frac{\prod_{j=1}^m (z - e^{T_s \beta_j})}{\prod_{i=1}^m (z - e^{-T_s \alpha_i})}. \quad (2.40)$$

O valor do ganho discreto  $K_D$  equivalente deve ser obtido da condição de regime permanente. Para a devida correspondência deve-se ter

$$|G_c(s)|_{s \rightarrow 0} = |G_D(z)|_{z \rightarrow 1}. \quad (2.41)$$

Já que segue a definição (2.48), mapeia todo o semiplano esquerdo do plano- $s$  no círculo unitário.

### 2.5.3 Método da resposta invariante ao degrau

Os métodos anteriores apresentam as técnicas usuais de discretização e fornecem resultados aproximados. Porém, é possível obter um modelo discreto exato amostrando o sistema contínuo. A técnica mais usual é aquela que emprega a invariância ao degrau, pois produz uma resposta mais próxima à forma contínua e independe do período de amostragem. Neste caso, ambas  $G(s)$  e  $G(z)$  apresentam a característica de que as suas respostas ao degrau  $y(t)$  e  $y(k)$  são iguais em  $t = kT_s$ . Isto é conseguido quando

$$\mathcal{Z}^{-1} \left[ G(z) \frac{1}{1-z^{-1}} \right] = \mathcal{L}^{-1} \left[ G(s) \frac{1}{s} \right]_{t=kT_s} \quad (2.42)$$

em que o lado esquerdo de (2.42) é igual a  $y(kT_s)$  e o lado direito é igual a  $y(t)$  em  $t = kT_s$ . Todos os outros métodos têm forte dependência do período de amostragem. Aplicando a transformada  $\mathcal{Z}$  em (2.42) obtém-se

$$G(z) = (1-z^{-1})\mathcal{Z} \left[ \frac{G(s)}{s} \right] = \mathcal{Z} \left[ \frac{1-e^{-sT_s}}{s} G(s) \right] = \mathcal{Z}[G_h(s)G(s)] \quad (2.43)$$

em que  $G_h(s)$  é a função de transferência de um amostrador (em inglês, *sample hold*) de ordem zero. Um segurador amostrador de ordem zero, como o próprio nome sugere, amostra o sinal e o retém por um período de amostragem. A Figura 2.7 ilustra o procedimento de amostragem. Na Figura 2.7, o bloco D/A representa a conversão digital/análogica e pode ser realizada com um decodificador e um segurador amostrador. Por outro lado, a conversão analógica/digital representada pelo bloco A/D pode ser realizada por um segurador amostrador, um quantizador e um codificador (Hermely, 1996).

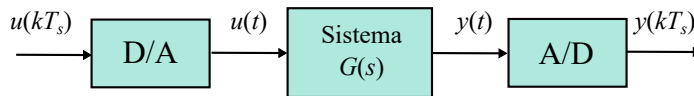


Figura 2.7: Diagrama de blocos de sistema a malha aberta amostrado.

A função de transferência do segurador amostrador de ordem zero pode ser obtida a partir da transformada Laplace de um trem de pulso de peso 1 e duração  $T_s$ :

$$p(t) = 1(t) - 1(t - T_s) \quad (2.44)$$

em que  $1(t)$  é a função degrau unitário. Assim, obtém-se

$$\begin{aligned} ZOH(s) &= \mathcal{L}(p(t)) \\ &= (1 - e^{-sT_s})/s, \end{aligned} \quad (2.45)$$

obtendo o diagrama da Figura 2.8, com  $\delta(t)$  designando a função impulso de Dirac.

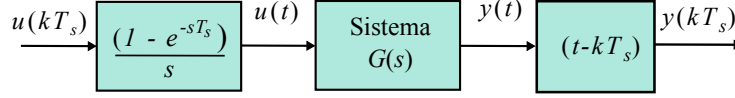


Figura 2.8: Diagrama de blocos do procedimento de conversão de sinais.

A função de transferência de  $u(kT_s)$  a  $y(kT_s)$  na Figura 2.7 incluindo os componentes A/D e D/A pode ser dada por:

$$\begin{aligned} G(z) &= Z\left(\frac{1 - e^{-sT_s}}{s}\right)G(s) \\ &= (1 - z^{-1})Z\left(\frac{G(s)}{s}\right), \end{aligned} \quad (2.46)$$

que é a mesma função de transferência obtida em (2.43). A saída amostrada em  $t = kT_s$  é dada por:

$$y(kT_s) = \sum_k \delta(t - kT_s)y(t). \quad (2.47)$$

Neste método, usa-se a relação do plano-s com o plano-z pela definição da transformada  $Z$ :

$$z = e^{T_s s} \quad (2.48)$$

sendo  $T_s$  adequadamente escolhido de forma a atender o teorema da amostragem. Já que o método segue a definição (2.48), tem-se que uma faixa horizontal no semiplano esquerdo do plano-s será mapeada no interior de um círculo unitário no plano-z, como mostrado na Figura 2.3.

**Exemplo 2.2** Considere um controlador tipo avanço de fase (ver Seção ??), projetado no domínio de tempo contínuo para um determinado processo. O controlador nesta forma, apresenta a função transferência :

$$\begin{aligned} G(s) &= \frac{u(s)}{e(s)} \\ &= \frac{10(s + 0,5)}{s + 0,1}. \end{aligned}$$

As respectivas formas discretas do mesmo controlador segundo os procedimentos de discretização enunciados e usando um período de amostragem de 1 [s] são indicados a seguir:

1. Aproximação pela diferença anterior dada por (2.21):

$$u(k) = 0,9091 u(k-1) + 13,6364e(k) - 9,091e(k-1).$$

2. Aproximação pela diferença posterior conforme (2.26):

$$u(k) = 0,9 u(k-1) + 10,0e(k) - 5,0e(k-1).$$



3. Aproximação pelo método trapezoidal conforme (2.30):

$$u(k) = 0,904762 u(k-1) + 11,904762e(k) - 7,142857e(k-1).$$

4. Discretização por mapeamento ( $s \rightarrow z$ ) conforme (2.38):

$$u(k) = 0,904963u(k-1) + 12,093e(k) - 7,334e(k-1).$$

5. Discretização por invariância ao degrau conforme (2.42):

$$u(k) = 0,9048u(k-1) + 10,0e(k) - 5,2420e(k-1).$$

**Exercício 2.1** Em relação ao Exemplo 2.2 visto anteriormente pede-se:

1. Se o erro  $e(k)$  se comporta como uma excitação degrau, obtenha e plote a resposta degrau do controlador contínuo e discreto em cada uma das formulações indicadas no Exemplo 2.2.
2. Repita o Exemplo 2.2 assumindo que o período de amostragem seja agora de 4 [s] e obtenha a resposta ao degrau comparando com o item anterior.

Como no caso da representação entrada-saída de sistemas pode-se obter o sistema espaço de estado discretizado a partir de um sistema contínuo via um segurador-amostrador. Considerando um conversor D/A segurador amostrador de ordem zero, tem-se

$$u(t) = u(kT_s), \quad kT_s \leq t \leq kT_s + T_s \quad (2.49)$$

Seja

$$t \in [kT_s, kT_s + T_s]. \quad (2.50)$$

Pode-se então, escrever a solução das equações discretas como:

$$x(kT_s + T_s) = e^{AT} x(kT_s) + \int_{kT_s}^{kT_s + T_s} e^{A(kT_s + T_s - \tau)} B u(\tau) d\tau. \quad (2.51)$$

Definindo:

$$\eta = kT_s + T_s - \tau$$

tem-se:

$$d\eta = -d\tau.$$

Para

$$\tau \rightarrow kT_s$$

tem-se:

$$\eta = T_s$$

e para

$$\tau \rightarrow kT_s + T_s$$

tem-se:

$$\eta = 0.$$

Assim, pode-se escrever a representação espaço de estado discreta do sistema contínuo

$$\begin{aligned} x(kT_s + T_s) &= e^{AT_s} x(kT_s) + \left[ \int_0^{T_s} e^{A\eta} d\eta \right] Bu(kT_s) \\ &= Fx(kT_s) + Gu(kT_s) \end{aligned} \quad (2.52)$$

com matrizes  $F$  e  $G$  definidas adequadamente por:

$$F = \Phi(T_s) = e^{A T_s} \quad (2.53a)$$

$$H = \int_0^{T_s} \Phi(\tau) B d\tau. \quad (2.53b)$$

**Exemplo 2.3** *Seja um sistema representado pela equação diferencial abaixo, para o qual deseja-se obter uma representação no espaço de estados discretos com  $T_s = 1[s]$ :*

$$\ddot{y}(t) + 3\dot{y}(t) + 2y(t) = u(t).$$

*A correspondente representação por variáveis de estado contínuas será:*

$$\dot{x}_2(t) = -3x_2(t) - 2x_1(t) + u(t)$$

com

$$\begin{aligned} x_1(t) &= y(t) \\ x_2(t) &= \dot{y}(t) = \dot{x}_1(t). \end{aligned} \quad (2.54)$$

*Na forma matricial obtém-se então:*

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= \begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t) \\ \dot{y}(t) &= [ 1 \quad 0 ] \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} u(t) \end{aligned}$$

*sendo portanto:*

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad C = [ 1 \quad 0 ] \quad d = 0.$$

*Resolvendo a equação de estados pelo método da transformada inversa de Laplace, tem-se:*

$$\begin{aligned} [ sI - A ] &= \begin{bmatrix} s & -1 \\ 2 & (s+3) \end{bmatrix}, \\ [ sI - A ]^{-1} &= \frac{1}{s^3 + 3s + 2} \begin{bmatrix} (s+3) & 1 \\ -2 & s \end{bmatrix} \end{aligned}$$

e finalmente, a matriz de transição  $\Phi(t)$  será:

$$\Phi(t) = \mathcal{L}^{-1} \left\{ [ sI - A ] \right\} = \begin{bmatrix} (e^{-t} - e^{-2t}) & (e^{-t} - e^{-2t}) \\ (-2e^{-t} + 2e^{-2t}) & (-e^{-t} + 2e^{-2t}) \end{bmatrix}$$

e no caso discreto, com (2.53a) tem-se:

$$F = \Phi(T_s) = \begin{bmatrix} (e^{-T_s} - e^{-2T_s}) & (e^{-T_s} - e^{-2T_s}) \\ (-2e^{-T_s} + 2e^{-2T_s}) & (-e^{-T_s} + 2e^{-2T_s}) \end{bmatrix},$$

e, conforme (2.53b) tem-se:

$$H = \int_0^{T_s} \Phi(q)B dq = \int_0^{T_s} F(q) \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} dq = \begin{bmatrix} (1/2 - e^{-T_s} + 1/2e^{-2T_s}) \\ (e^{-T_s} - e^{-2T_s}) \end{bmatrix}.$$

A representação deste processo por variáveis de estado discretas será então:

$$x(k+1) = F x(k) + H u(k)$$

$$y(k) = C x(k) + D u(k)$$

e com  $T_s=1$  [s] tem-se finalmente:

$$F = \begin{bmatrix} 0,6004 & 0,2325 \\ -0,4651 & -0,0972 \end{bmatrix} \quad H = \begin{bmatrix} 0,1998 \\ 0,2325 \end{bmatrix} \quad C = [ 1 \quad 0 ] \quad d = 0.$$

**Exercício 2.2** Obter as matrizes  $F$  e  $H$  do Exemplo 2.3, pelo método de expansão em série, com truncamento no 3<sup>a</sup> elemento da série. Comparar os resultados numéricos com os do Exemplo 2.3.

## 2.6 Aulas de Laboratório

Como proposta de atividade de laboratório é sugerida a verificação do teorema de amostragem por meio de um experimento simples. Como forma de verificar o teorema de amostragem são propostas as atividades a seguir que envolvem a investigação de sinais senoidais, de onda quadrada e triangular. A onda senoidal é de especial interesse, pois possui somente sua frequência fundamental e assim, a eficácia ou não do Teorema de Amostragem pode ser bem interpretada. Os sinais de onda quadrada e triangular possuem por sua vez um espectro de frequências harmônicas, as quais pelo teorema indicado, devem ser devidamente consideradas.

Na realização desta prática é utilizado um gerador de sinais (senoidal, de onda quadrada e triangular) com frequência de pelo menos 1 Hz. O uso de baixas frequências se deve ao fato de que sinais de baixa frequência podem ser facilmente visualizados e interpretados (1 Hz corresponde a um período de 1 seg.) com auxílio de um osciloscópio.

Para a realização do experimento é sugerido que se desenvolva um VI na ambiente do LabVIEW para executar leitura periódica do sinal senoidal do gerador em um dos

canais de entrada analógica disponível no módulo de aquisição. O sinal real pode ser monitorado em um osciloscópio que indicará a senoide do gerador.

O VI de aquisição deverá processar a leitura da senoide por pelo menos 10s o que corresponde a 10 ciclos do sinal senoidal de 1 Hz. O *loop* de aquisição deverá processar somente a leitura e indicar o resultado no painel do VI após finalizada a aquisição. Se a aquisição for bem sucedida deve se gravar os dados em um arquivo para pós-processamento no Matlab.

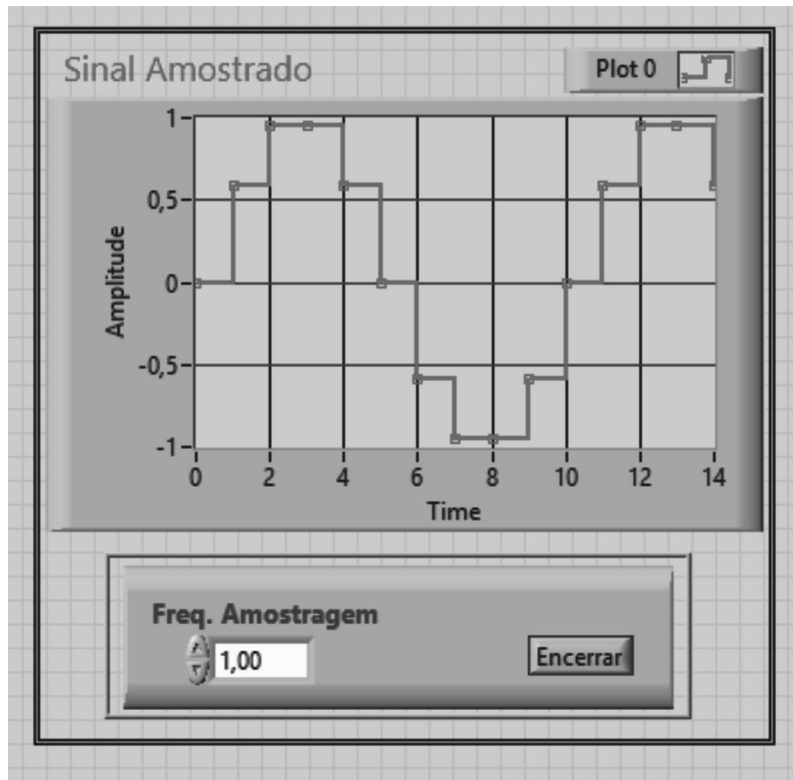


Figura 2.9: Painel Labview criado para análise da frequência de amostragem.

Com um VI contendo um painel de visualização conforme indicado na Figura 2.9, realizar as seguintes formas de amostragens:

1. Utilizando um gerador de funções selecionar a função de senoide com frequência 1Hz e amplitude inferior a 10 V.
2. Executar o VI de amostragem usando frequências de 1 Hz, ou seja igual àquela do sinal de entrada, com 2Hz ou seja o dobro que corresponde ao Teorema de Amostragem e ainda com frequências de 4Hz, 8Hz e 10Hz. Em cada caso, gravar os dados das telas gráficas em um arquivo de documentação do experimentos.
3. Comutar a função do gerador de sinais para onda quadrada e repetir o item 2.

4. Comutar a função de gerador de sinais para onda triangular e repetir o item 2.

### 2.6.1 Questões a serem respondidas

1. Utilizando os dados de amostragem no caso senoidal, comentar o resultado da amostragem aplicando o teorema de amostragem.
2. Com base nos dados obtidos determinar a frequência de amostragem a partir da qual a senoide é reconhecida.
3. Comentar os resultados de amostragem de sinal de onda quadrada e triangular nas frequências de amostragem utilizadas.
4. Suponha uma onda quadrada composta por um espectro harmônico de frequências ímpares obtidas a partir da fundamental. Suponha também que são necessárias 10 harmônicas para uma razoável descrição da onda quadrada. Obter a frequência de amostragem adequada neste caso.



# Apêndices





## Apêndice A

# Tabela da Transformada $\mathcal{Z}$ e Propriedades

### A.1 Propriedades da Transformada $\mathcal{Z}$

#### Linearidade

$$\mathcal{Z}\{\alpha x_1(k) + \beta x_2(k)\} = \alpha \mathcal{Z}\{x_1(k)\} + \beta \mathcal{Z}\{x_2(k)\} \quad (\text{A.1})$$

#### Deslocamento para Direita - O Operador Avanço

$$\mathcal{Z}\{x(k-d)\} = z^{-d} \mathcal{Z}\{x(k)\} = z^{-d} X(z) \quad d \geq 0 \quad (\text{A.2})$$

#### Deslocamento para Esquerda - O Operador Atraso

$$\mathcal{Z}\{x(k+d)\} = z^d \left[ X(z) - \sum_{q=0}^{d-1} x(q)z^{-q} \right] \quad d \geq 0 \quad (\text{A.3})$$

#### Amortecimento

$$\mathcal{Z}\{x(k)e^{-akT_s}\} = X(ze^{aT_s}) \quad (\text{A.4})$$

#### Valor Inicial

$$X(0) = \lim_{z \rightarrow \infty} X(z) \quad (\text{A.5})$$

#### Valor Final

$$\lim_{k \rightarrow \infty} x(k) = \lim_{z \rightarrow 1} \frac{z-1}{z} X(z) = \lim_{z \rightarrow 1} (z-1)X(z) \quad (\text{A.6})$$

A propriedade do valor final somente é válida se  $x(\infty)$  existe. Assim, só se aplica a processos estáveis

## A.2 Tabelas de Transformadas

$x(t)$	$X(s)$	$X(z)$	
$1(t)$	$\frac{1}{s}$	$\frac{z}{z-1}$	( 01 )
$t$	$\frac{1}{s^2}$	$\frac{T_s z}{(z-1)^2}$	( 02 )
$t^2$	$\frac{2}{s^3}$	$\frac{T_s^2(z+1)}{(z-1)^3}$	( 03 )
$t^3$	$\frac{6}{s^4}$	$\frac{T_s^3(z^2+4z+1)}{(z-1)^4}$	( 04 )
$e^{-at}$	$\frac{1}{(s+a)}$	$\frac{z - e^{-aT_s}}{z - e^{-aT_s}}$	( 05 )
$te^{-at}$	$\frac{1}{(s+a)^2}$	$\frac{T_s z e^{-aT_s}}{(z - e^{-aT_s})^2}$	( 06 )
$t^2 e^{-at}$	$\frac{2}{(s+a)^3}$	$\frac{T_s^2 z^2 e^{-aT_s} (z + e^{-aT_s})}{(z - e^{-aT_s})^3}$	( 07 )
$1 - e^{-at}$	$\frac{a}{s(s+a)}$	$\frac{(1 - e^{-aT_s})z}{(z-1)(z - e^{-aT_s})}$	( 08 )
$at - 1 + e^{-at}$	$\frac{s^2(s+a)}{a^2}$	$\frac{(aT_s - 1 + e^{-aT_s})z^2 + (1 - aT_s e^{-aT_s} - e^{-aT_s})}{(z-1)^2(z - e^{-aT_s})}$	( 09 )
$e^{-at} - e^{-bt}$	$\frac{(b-a)}{(s+a)(s+b)}$	$\frac{z(e^{-aT_s} - e^{-bT_s})}{(z - e^{-aT_s})(z - e^{-bT_s})}$	( 10 )
$1 - (1+at)e^{-at}$	$\frac{s(s+a)^2}{a^2}$	$\frac{z}{z-1} - \frac{z}{(z - e^{-aT_s})} - \frac{aT_s e^{-aT_s} z}{(z - e^{-aT_s})^2}$	( 11 )
$\sin(\omega_1 t)$	$\frac{\omega_1}{s^2 + \omega_1^2}$	$\frac{z \sin(\omega_1 T_s)}{z^2 - 2z \cos(\omega_1 T_s) + 1}$	( 12 )
$\cos(\omega_1 t)$	$\frac{s}{s^2 + \omega_1^2}$	$\frac{z(z - \cos(\omega_1 T_s))}{z^2 - 2z \cos(\omega_1 T_s) + 1}$	( 13 )
$e^{-at} \sin(\omega_1 t)$	$\frac{\omega_1}{(s+a)^2 + \omega_1^2}$	$\frac{z e^{-aT_s} \sin(\omega_1 T_s)}{z^2 - 2z e^{-aT_s} \cos(\omega_1 T_s) + e^{-2aT_s}}$	( 12 )
$e^{-at} \cos(\omega_1 t)$	$\frac{(s+a)}{(s+a)^2 + \omega_1^2}$	$\frac{z(z - \cos(\omega_1 T_s))}{z^2 - 2z e^{-aT_s} \cos(\omega_1 T_s) + e^{-2aT_s}}$	( 13 )

Tabela A.1: Transformadas de Laplace e Transformadas Z

## Apêndice B

# Ganho para Sistemas MIMO

O ganho é uma relação entra/saída e pode ser definido como

$$\begin{aligned}\text{Ganho} &= \frac{\|y\|}{\|u\|} = \frac{\|G(j\omega)u_0e^{j\omega t}\|}{\|u_0e^{j\omega t}\|} \\ &= \frac{\|G(j\omega)u_0\|}{\|u_0\|}\end{aligned}\tag{B.1}$$

com  $\| \cdot \|$  a norma Euclidiana. Observe que multiplicando a entrada por um escalar não altera o ganho do sistema, assim

$$\min_{u_0} \frac{\|G(j\omega)u_0\|}{\|u_0\|} \leq \text{Ganho} \leq \max_{u_0} \frac{\|G(j\omega)u_0\|}{\|u_0\|}$$

$$\text{ou} \min_{\|u_0\|=1} \|G(j\omega)u_0\| \leq \text{Ganho} \leq \max_{\|u_0\|=1} \|G(j\omega)u_0\|$$

Não existe uma definição útil de fase para sistemas MIMO. A resposta em frequência de sistemas MIMO é limitada portanto pelo máximo e mínimo ganho do sistema. Seja a decomposição

$$H = Y \begin{bmatrix} \Sigma & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} U^*\tag{B.2}$$

em que  $H \in C^{m \times p}$ ,  $Y \in C^{p \times p}$ ,  $U \in C^{m \times m}$  são matrizes unitárias e  $\Sigma = \text{diag}(\sigma_1, \dots, \sigma_r)$  com  $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \dots \geq \sigma_r > 0$  e  $\min(m, p) \geq r$ . As colunas de  $U$  são formadas por autovetores ortonormais de  $H^*H$  e as colunas de  $Y$  por autovetores ortonormais de  $HH^*$ .

**Notação B.1**  $\sigma(H) = \sigma_i : i = 1, \dots, r$ ,  $\sigma_{\max}(H) = \sigma_1$  e  $\sigma_{\min}(H) = \sigma_r$ .

Pode ser verificado que  $\sigma(H) = \max[\lambda_i(H^*H)]^{1/2}$  e  $\sigma(H) = \min[\lambda_i(H^*H)]^{1/2}$  com  $\lambda(\cdot)$  denotando autovalor.

**Definição B.1** Uma matriz  $U \in F^{n \times n}$  é dita uma matriz unitária se e só se  $U^*U = UU^* = 1_n$ . Equivalentemente, as  $n$  colunas de  $U$  formam uma base ortonormal de  $F^n$ , i. e.

$$u_i^* u_j = \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & i \neq j. \end{cases} \quad (\text{B.3})$$

Se  $F = R$ , a matriz  $U$  é chamada ortogonal.

**Observação B.1** Matrizes unitárias preservam o produto interno e daqui a norma de vetores:  $U \in F^{n \times n}$  é unitária então  $\forall x, y \in F^n$   $(Ux, Uy) = (x, y)$  e daqui  $\|Ux\|_2 = \|x\|_2$ .

**Observação B.2** A matriz  $H$  não possui valores singulares zero ( $\sigma(H) > 0$ ) se e só se  $H$  tiver posto coluna completo. Quando a matriz  $H$  for quadrada tem-se  $\sigma_{\min}(H) > 0$  se e só se  $H$  for não singular.

## B.1 Interpretação da Matriz H como Operador

Sejam

$$\begin{aligned} H : C^p &\mapsto C^m & U &= [U_1 U_2], & U_1 &\in C^{m \times r} \\ u &\mapsto Hu & Y &= [Y_1 Y_2], & Y_1 &\in p \times r \end{aligned} \quad (\text{B.4})$$

Assim,  $H[U_1 U_2] = [Y_1 \sum : 0]$  onde  $HU_1 = Y_1 \sum$  ou  $H = Y_1 \sum U_1^*$  ou na forma didática

$$H = \sum_{i=1}^r \sigma_i y_i u_i^* \quad (\text{B.5})$$

com  $u_i$  e  $y_i$  e colunas de  $U$  e  $Y$ , respectivamente. Os vetores  $u_i$  e  $y_i$  são chamados vetores singulares à direita e à esquerda de  $H$ , respectivamente. Uma vez que  $U$  é unitária  $u_i^* u_j = \delta_{ij}$  e segue que  $u_j$  é mapeado em  $\sigma_j y_j$  por  $H$

$$Hu_j = \left( \sum_{i=1}^r \sigma_i y_i u_i^* \right) u_j \quad (\text{B.6})$$

$$= \sigma_j y_j \quad (\text{B.7})$$

então,  $H$  rotaciona ( $u_j \rightarrow y_j$ ) e escalona ( $y_j \rightarrow \sigma_j y_j$ ). Em  $R^2$  pode-se visualizar graficamente o efeito de  $H$  em  $u$  na Figura B.1

**Exercício B.1** Mostrar que o valor singular pode ser computado a partir do problema de autovalor, uma vez que  $\sigma_i^2$  é um autovalor de  $H^*H$ , ou seja  $H^*Hy_i = \sigma_i^2 y_i$ . Sugestão. Utilizar a forma diádica de  $H$  e  $H^*$ .

O máximo valor singular  $\sigma_{\max}(H)$  e o mínimo valor singular  $\sigma_{\min}(H)$  desempenham um papel importante na análise e projeto de sistemas de controle multivariáveis.

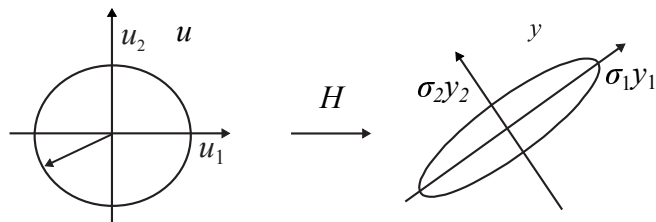


Figura B.1: Interpretação geométrica do valor singular.

**Lema B.1**  $\sigma_{\max}(H)$  e  $\sigma_{\min}(H)$  são dados pelas identidades:

$$\begin{aligned}\sigma_{\max}(H) &= \max_{\|u\|=1} \|Hu\| \\ \sigma_{\min}(H) &= \min_{\|u\|=1} \|Hu\|.\end{aligned}\tag{B.8}$$

Para verificar o lema,  $H$  pode ser escrita como:

$$\begin{aligned}\|Hu\|^2 &= u^* U \sum Y^* Y \sum U^* u \\ &= x^* \sum^2 x\end{aligned}\tag{B.9}$$

com  $x = U^*u$  e usando as propriedades:  $\|x\| = \|U^*u\| = \|u\|$  e  $\max_{\|u\|=1} \|Hu\| = \max_{\|x\|=1} \|\sum x\|$ .

Agora  $\|\sum x\|^2 = \sum_{i=1}^r \sigma_i^2 |x_i|^2$ , sujeito a  $\|x\|^2 = 1$ , é maximizado com  $x_1 = 1$  e  $x_i = 0$  para todo  $i \neq 1$  e é minimizado com  $x_r = 1$  e  $x_i = 0$  para todo  $i \neq r$  e então  $\sigma_{\max}(H) = \max_{\|u\|=1} \|Hu\|$  e  $\sigma_{\min}(H) = \min_{\|u\|=1} \|Hu\|$ .

O ganho do sistema para todas as entradas é menor do que o máximo valor singular  $\frac{\|Hu\|}{\|u\|} \leq \sigma_1$ . Uma maneira intuitiva de entender este resultado é notando que  $\sigma_1$  é o máximo ganho sobre o conjunto ortogonal de direções da entrada definido pelos vetores singulares à direita. Assim, o ganho máximo pode ser obtido quando a entrada  $u$  é proporcional a  $u_1$ . O cálculo do ganho da matriz para a entrada  $\alpha u_1$  fornece

$$\begin{aligned}\frac{\|H(\alpha u_1)\|}{\|\alpha u_1\|} &= \frac{\|\sum_{i=1}^r \alpha_i y_i u_i^* \alpha u_1\|}{\|\alpha u_1\|} \\ &= \frac{\|\alpha \sigma_1 y_1\|}{\|\alpha u_1\|} \\ &= \frac{|\alpha| \sigma_1 \|y_1\|}{|\alpha| \|u_1\|} \\ &= \frac{|\alpha| \sigma_1}{|\alpha|} = \sigma_1\end{aligned}$$

uma vez que  $\|y_i\| = \|u_i\| = 1$ .

**Observação B.3** A decomposição de valor singular tem a seguinte propriedade:

$$\begin{aligned}\sigma_{max}(H) &= \|H\| \\ &= \max_{\|u\|=1} \|Hu\| \\ &= \max_{u \neq 0} \frac{\|Hu\|}{\|u\|}\end{aligned}$$

ou seja  $\sigma_{max}(H)$  é a norma do operador  $H$  induzida pela norma Euclidiana.

## B.2 Ganhos de um Sistema Multivariável

Seja  $y(t) = G(j\omega)u_0e^{j\omega t}$ . A decomposição de valores singulares da matriz de função de transferência é dada por  $G(j\omega) = \sum_{i=1}^r \sigma_i y_i u_i^*$  para cada  $\omega$ . Os valores singulares em função da frequência são chamados valores principais.

**Exercício B.2** Dado o sistema  $(A, B, C, D)$  abaixo, obter a matriz de transferência  $G(j\omega)$ , os ganhos e a norma infinito. Utilizar os comandos:

```
G=ss(A, B, C, D); Gf=tf(G); sigma(G)
normhinf(G);
A=[0 1 0;0 0 1;-4040 -444 -14];
B=[ 1 2;0 1; 0 4]; C=[10 10 0;0 1 0]; D=eye(2);
```

# Referências Bibliográficas

- Castrucci, P. L., Bittar, A. and Sales, R. M. (2011). *Controle Automtico*, LTC-livros Tcnicos e Cientficos Editora Ltda., Rio de Janeiro.
- Chen, C. T. (1999). *Linear System Theory and Design*, 3a. edn, Oxford University Press, New York.
- Chong, E. K. P. and Zak, S. H. (1996). *An introduction to optimization*, Wiley-Interscience Publication, New York.
- Cossi, L. (2011). *Introduction to Stability of Quasipolynomials*, IntTech Open Science, Captulo 1, pp. 1–14. <http://www.intechopen.com/books/time-delay-systems/introduction-to-stability-of-quasipolynomials>.
- El'sgol'ts, L. E. and Norkin, S. B. (1973). *Introduction to the Theory and Application of Differential Equations with Deviating Arguments*, Vol. 105 of *Mathematics in Science and Engineering*, Academic Press, London.
- Franklin, G. F., Powell, J. D. and Emami-Naeini, A. (1994). *Feedback Control of Dynamic Systems*, Addison Wesley, New York.
- Garcia, C. (2005). *Modelagem e Simulação de Processos Industriais e de Sistemas Eletromecânicos*, 2 edn, EDUSP, São Paulo, Brasil.
- Geromel, J. C. and Palhares, A. G. B. (2004). *Anlise Linear de Sistemas Dinmicos: Teoria, Ensaio Prticos e Exerccios*, Edgard Blcher Ltda, So Paulo.
- Hermely, E. M. (1996). *Controle por Computador de Sistemas Dinâmicos*, Edgard Blücher, So Paulo.
- Isermann, R. (1989). *Digital Control Systems*, Springer Verlag, Heidelberg.
- Ogata, K. (1997). *Modern Control Engineering*, Prentice Hall, Upper Saddle River.
- Sakai, K. (2001). *Nonlinear Dynamics and Chaos in Agricultural Systems*, Developments in Agricultural Engineering 12, Elsevier, Amsterdam, The Netherlands.
- Taniguchi, T., Tanaka, K., Ohtake, H. and Wang, H. O. (2001). Model construction, rule reduction, and robust compensation for generalized form of takagi-sugeno fuzzy systems, *IEEE Transactions on Fuzzy Systems* **9**(4): 525–537.

- Teixeira, M. C. M. and Zak, S. H. (1999). Stabilizing controller design for uncertain non-linear systems using fuzzy models, *IEEE Transactions Fuzzy Systems* **15**(1): 116–132.
- Zhang, L., Chang, X. and Karimi, H. R. (2014). Fuzzy modeling and control for a class of inverted pendulum system, *Abstract and Applied Analysis* **2014**, **Article ID 936868**.



# Índice Remissivo

- , 5
- Aproximação discreta, 50
- Aproximação trapezoidal, 49
- Controle digital, 39
- Convolução, 4
- Descrição entrada-saída, 1
- Discretização, 39
- Discretização espaço de estado, 53
- Equação diferencial de ordem  $n$ , 2
- Equações a diferença, 4
- Equações a diferença: exemplo, 4
- Equações diferencial-diferença, 33
- Espaço de estado, 17
  - equação discreta, 32
  - Sistemas equivalentes, 33
  - transição de estado, 30
- Exemplo circuito RC, 2
- Função de transferência, 8
  - discreta, 14
- Função impulso, 6
- Integral de superposição, 6
- Invariância no tempo, 6
- Linearização local, 18
  - aproximação de Taylor, 19
  - modelos locais, 25
  - Teixeira Zák, 21
- Métodos de discretização, 45
- Mapeamento polos e zeros, 50
- Modelos
  - estufa elétrica, 37
- Modos
  - sistemas contínuos, 12
  - sistemas discretos, 15
- Motor CC
  - equações, 3
- Pólos, 30
- Pêndulo invertido, 22
  - equações, 22
- Pêndulo simples
  - equações, 18
- Polinômio característico, 9
- Polos e zeros, 10
- Resposta impulsional, 7, 29
- Resposta invariante ao degrau, 51
- Sistemas amostrados, 39
- Sistemas com atraso
  - equação diferencial-diferença, 34
  - neutral, 35
  - quasi-polinômio, 35
  - retardo, 34, 36
- Sistemas relaxados, 5
- Teorema do valor final, 13
- Teorema do valor inicial, 13
- Transformada Z, 61
- Valor singular, 63
- Zeros, 30