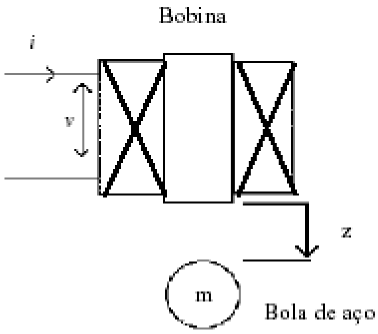
SEL-853- Sistemas Lineares
1ª Lista de Exercícios
Março 2017

Os itens indicados como exemplos e problemas foram tirados de um dos livros texto Chen, C. T. Linear System Theory and Design, 1998.

1. Obter as equações espaço de estado para o sistema de suspensão magnética e a função de transferência. O sistema de suspensão magnética consiste de uma bola de metal que deve ser mantida através de equilíbrio entre a força gravitacional e a força eletromagnética a uma distância z0 da bobina. O diagrama esquemático do sistema é mostrado abaixo (Oliveira et al., 2005).



O modelo para o sistema é obtido a partir das equações:

$$f(z,i) = \frac{-L_0}{2a} \frac{i^2}{(1+z/a)^2}$$

$$m\frac{d^2z}{dt^2} = mg + f(z,i)$$

$$v = Ri + \frac{d(L(z)i)}{dt}$$

em que f(.,.) é a força eletromagnética [N], i é a corrente na bobina [A], v é a tensão aplicada [V], L(.) e R são a indutância [H] e a resistência da bobina [Ω], a é uma constante [m] e L0 = L(0)-L(∞). Estas equações são não lineares, mas podem ser linearizadas em torno de um ponto de equilíbrio. Os parâmetros são apresentados na Tabela 1. Nesta tabela, L é uma constante que aproxima L(.) no ponto de equilíbrio. No equilíbrio $mg = -f(z_e, i_e)$ fornecendo para L constante e $z_e = 0.0045$:

$$i_e = \sqrt{\frac{mg2a}{L_0}(1+\frac{z_e}{a})}$$
.

Tabela 1: Parâmetros do sistema de suspensão magnética

massa da esfera metálica	m [kg]	$22{,}6\text{x}10^{-3}$
resistência da bobina	R [Ω]	19,9
indutância da bobina aproximada	L [H]	0,520
indutância bobina no ponto de operação	L_0 [H]	$2{,}49\text{x}10^{-2}$
posição da bola no ponto de operação	z_0 [m]	$4{,}5 \text{ x } 10^{-3}$
constante *a*	a [m]	$6{,}72 \text{ x } 10^{-3}$

2. Obter as equações espaço de estado e as funções de transferência para os sistemas do Exemplo 2.6, Exemplo 2.8 e Exemplo 2.9 do livro do Chen.

3. Considere o pêndulo simples. Esse sistema pode representar um atuador robótico com *u* o torque fornecido por um motor e θ o ângulo do braço. A dinâmica do pêndulo pode ser descrita por

$$mL^2\ddot{\theta} + b\dot{\theta} + mgLsen\theta = u$$

em que *u* é o torque externo aplicado ao pêndulo, *b* é o coeficiente de atrito no apoio e *g* é a aceleração gravitacional. Para m=0.1 [kg], b=0.015[kg], L=0.2 [m] e g=9,81 [m/s] e definindo o vetor de estado $x = [\theta \quad \omega]^T$ com $\omega = \dot{\theta}$ pede-se:

a) Obter a representação espaço de estado na forma vetorial $\dot{x} = F(x,u)$.

b) Para $u = 0$ e $x(0) = [\theta_0 \quad 0]^T$ com $\theta_0 = \pi/18, \pi/6\ e\ \pi/3$, plotar as variáveis de estado para $t \geq 0$.

c) Repetir b) para o sistema linearizado no ponto de equilíbrio $x_e = [0 \quad 0]^T$.

d) Comparar as respostas obtidas em b) e c).

4. Problema 2.1
5. Problema 2.3
6. Problema 2.10. Obter também a representação espaço de estado do sistema a partir da função de transferência obtida.
7. Problema 3.1
8. Problema 3.2
9. Problema 3.4
10. Problema 3.5
11. Problema 3.6
12. Problema 3.7
13. Problema 3.8
14. Problema 3.11
15. Problema 3.12
16. Problema 3.13
17. Problema 3.19

SEL-853- Sistemas Lineares

2ª Lista de Exercícios

Março 2016

Exemplos e exercícios dos livros textos: Chen, C. T. Linear System Theory and Design, HRW, 1998 e Antsaklis, P. J. Michel, A. N. *A Linear System Primer*, Birkhauser, 2007. Os itens indicados como problemas foram tirados do livro do Chen.

1. Obter e^{At} para $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -9 & -3 \end{bmatrix}$ usando a decomposição modal dada a seguir para e^{At}.

   Idem para $A = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$ e $A = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$. Comentar sobre a presença ou não de todos os modos do sistema em e^{At}.

$$e^{At} = \sum_{i=1}^{m} \sum_{k=0}^{n_i-1} A_{ik} t^k e^{\lambda_i t}$$
$$= \sum_{i=1}^{m} [A_{i0} e^{\lambda_i t} + A_{i1} t e^{\lambda_i t} + \cdots A_{i(n_i-1)} t^{n_i-1} e^{\lambda_i t}]$$

com $\lambda_1, \cdots, \lambda_m$ os m autovalores com multiplicidade n_i distintos de A e

$$A_{ik} = \frac{1}{k!} \frac{1}{(n_i - 1 - k)!} \lim_{s \to \lambda_i} [[s - \lambda_i)^{n_i} (sI - A)^{-1}]^{(n_i - 1 - k)}]$$

em que $[.]^{(\ell)}$ denota a $\ell -$ézima derivada com respeito a s. O termo $A_{ik} t^k e^{\lambda_i t}$ é chamado de modo do sistema $\dot{x} = Ax$. Para o caso em que $n_i = 1$ usar

$e^{At} = \sum_{i=1}^{n} v_i u_i e^{\lambda_i t}$ com $v_i \in R^n$ e $u_i^T \in R^n$ autovetores a direita e a esquerda de A, ou seja, v_i e u_i são obtidos a partir de $(\lambda_i I - A) v_i = 0$ e $u_i (\lambda_i I - A) = 0$, respectivamente.

2. Considere as equações de um pêndulo simples. Plotar o diagrama de fase para a) coeficiente de amortecimento <1 e b) >1. Analisar a estabilidade da origem.

3. Problema 3.26 (Sugestão: Para mostrar a parte do traço usar a identidade de Newton para raízes de polinômios).
4. Problema 3.27
5. Problema 3.31
6. Problema 3.33
7. Problema 3.34
8. Problema 3.35
9. Problema 3.38