Capítulo 1
Conceitos e Resultados Básicos

Um **grafo** é um par ordenado (V, A), onde V e A são conjuntos disjuntos, e cada elemento de A corresponde a um par não-ordenado de elementos (não necessariamente distintos) de V. Os elementos do conjunto V são chamados **vértices** e os elementos do conjunto A são chamados **arestas**.

Quando uma aresta a corresponde a um par $\{u, v\}$ de vértices, denotamos isso escrevendo $a = \{u, v\}$. Também escrevemos simplesmente uv para nos referirmos a uma tal aresta, quando não há perigo de confusão. Mais formalmente, pode-se explicitar a correspondência entre as arestas e os pares de vértices que as definem através de uma **função de incidência**, digamos

$$\psi : A \to V^{(2)},$$

onde $V^{(2)} = \{\{u, v\} : u, v \in V\}$. Assim, quando escrevemos $a = \{u, v\}$ estamos considerando que $\psi(a) = \{u, v\}$. Por simplicidade, em geral não explicitaremos tal função de incidência; e quando conveniente, consideraremos que o conjunto A de arestas é um subconjunto de $V^{(2)}$.

Exemplo:

Se G é um grafo, então também denotamos o seu conjunto de vértices por $V(G)$, e o seu conjunto de arestas por $A(G)$. Assim, tendo o nome de um grafo, ainda que os nomes do seu conjunto de vértices e do seu conjunto de arestas nao sejam explicitados, podemos sempre nos referir a esses objetos.

Estudaremos apenas os grafos **finitos**: aqueles que têm um número finito de vértices e de arestas. Mesmo que isso não seja dito explicitamente, deve ficar subentendido.

A **ordem** de um grafo $G = (V, A)$ é a cardinalidade de V; o seu **tamanho** é a soma $|V| + |A|$.

• Adjacência e incidência de vértices e arestas

Se $\alpha = \{u, v\}$ é uma aresta de um grafo, dizemos que α **vai de** u **para** v, ou **liga** os vértices u e v, ou **incide em** u (e em v). Também dizemos que u e v são os **extremos** (ou as **pontas**) de α; que u e v são **adjacentes** (ou **vizinhos**), e que u é **adjacente** a v.

Arestas com um extremo em comum são chamadas **adjacentes**; arestas com os mesmos extremos são chamadas **paralelas** ou **múltiplas**. Uma aresta com extremos iguais é um **laço**.

Pares de vértices (arestas) não-adjacentes são ditos **independentes**. Um conjunto de vértices (arestas) independentes é chamado **independente**.

Exemplo:

• Grau de vértices e de grafos

O **grau** de um vértice v, denotado por $g_G(v)$, é o número de arestas que incidem em v, onde os laços são contados duas vezes. Um vértice de grau zero é chamado **isolado**. Se o grafo a que estamos nos referindo é óbvio pelo contexto, o grau de um vértice v nesse grafo é denotado simplesmente por $\mathbf{g}(v)$.

O **grau mínimo** de um grafo G é o número $\delta(G) := \min\{g(v) : v \in V(G)\}$; e o **grau máximo** de G é o número $\Delta(G) := \max\{g(v) : v \in V(G)\}$. O **grau médio** de G é o número $\bar{g}(G) := \frac{1}{|V(G)|} \sum_{v \in V(G)} g(v)$.

Exemplo:

Da definição de grau de um vértice, segue imediatamente o seguinte resultado.

Proposição 1.1. *Para todo grafo G temos que $\sum_{v \in V(G)} g(v) = 2\ |(A(G)|$. Ou seja, a soma dos graus dos vértices de um grafo é igual ao dobro do número de suas arestas.*

Corolário 1.2 *Todo grafo tem um número par de vértices de grau ímpar.*

<u>Exercício</u> 1. *Prove que se G é um grafo sem vértices isolados e $|A(G)| < |V(G)|$, então G tem pelo menos 2 vértices de grau 1.*

<u>Exercício</u> 2. *Seja G um grafo de ordem $n \geq 2$. Prove que se G tem pelo menos $n + 1$ arestas então G possui um vértice com grau pelo menos 3.*

<u>Exercício</u> 3. *Prove que todo grafo simples de ordem $n \geq 2$ tem pelo menos dois vértices com o mesmo grau.* (Veja abaixo a definição de grafo simples.)

• Tipos especiais de grafos

Um grafo é **simples** se não tem laços e nem arestas múltiplas. Quando $G = (V, A)$ é um grafo simples, é conveniente considerar que $A \subseteq V^{(2)}$.

Dizemos que um grafo G é **vazio** se $V(G) = A(G) = \emptyset$. Um grafo com apenas um vértice e nenhuma aresta é chamado **trivial**.

Um grafo simples é k-**regular** se todos os seus vértices têm grau k; G é **regular** se é k-regular para algum k.

Um grafo **completo** é um grafo simples em que quaisquer dois de seus vértices distintos são adjacentes. A menos de isomorfismo, existe um único grafo completo com n vértices; que é denotado por K_n. O grafo K_3 é também chamado de **triângulo**.

Exemplos:

Um grafo G é **bipartido** se $V(G)$ pode ser particionado em dois conjuntos X e Y ($X \cup Y = V(G)$ e $X \cap Y = \emptyset$) de modo que cada aresta de G tenha um extremo em X e outro em Y. Uma tal partição é chamada uma **bipartição** do grafo.

Exemplos:

Um grafo **bipartido completo** é um grafo simples com bipartição (X, Y), no qual cada vértice de X é adjacente a cada vértice de Y. Se $|X| = m$ e $|Y| = n$ então um tal grafo é denotado por $K_{m,n}$. O grafo $K_{1,3}$ é chamado **garra** (*claw*).

Exemplos:

Se G é um grafo simples, o **complemento** de G, denotado por $\bar{G}$ é um grafos simples com $V(\overline{G}) = V(G)$, sendo que dois vértices são adjacentes em $\overline{G}$ se e só se eles não são adjacentes em G. Um grafo simples é **auto-complementar** se é isomorfo ao seu complemento.

• Isomorfismo de grafos

Vamos definir apenas para grafos simples. Sejam G e H dois grafos simples. Dizemos que G é **isomorfo** a H, e escrevemos $G \cong H$, se existe uma bijeção $\varphi : V(G) \to V(H)$ tal que $uv \in A(G) \Leftrightarrow \varphi(u)\varphi(v) \in A(H)$ para todo $u, v \in V(G)$. A bijeção φ é chamada um **isomorfismo**; e se $G = H$ então é φ é chamada um **automorfismo**.

Exercício 4. *Liste todos os grafos simples não-isomorfos de ordem 4. Para cada um dos grafos, diga de que tipo ele é: se é completo, bipartido, bipartido completo, regular.*

Exercício 5. *Desenhe todos os grafos simples* (V, A) *com conjunto de vértices* $V = \{u, v, w\}$. *Exiba a lista desenhando lado a lado os grafos que são complementares.*

Exercício 6. *Quantas arestas tem o grafo completo* K_n*? Quantas arestas tem o grafo bipartido completo* $K_{m,n}$*?*

Exercício 7. *(a) Prove que um grafo simples de ordem* n *com mais do que* $n^2/4$ *arestas não é bipartido. (b) Encontre todos (diga como são) os grafos bipartidos de ordem* n *com* $\lfloor n^2/4 \rfloor$ *arestas.*

Exercício 8. *Existe um grafo bipartido* G *com* $\delta(G) + \Delta(G) > |V(G)|$*? Justifique sua resposta.*

Exercício 9. *Um grafo simples é auto-complementar se é isomorfo ao seu complemento. Mostre que se* G *é um grafo simples auto-complementar então* $|V(G)| \equiv 0 \pmod 4$ *ou* $|V(G)| \equiv 1 \pmod 4$.

Exercício 10. *Seja* $X := \{1, 2, 3, 4, 5\}$. *Considere o grafo* $G = (V, A)$, *onde* $V = \{\{y, w\} : y, w, \in X, y \neq w\}$ *e* $A := \{\{u, v\} : u \cap v = \emptyset\}$. *Desenhe o grafo* G *definido. Esse grafo é chamado de* **grafo de Petersen**. *Esse grafo é regular? Quantas arestas tem?*

• Subgrafos

Um grafo H é um **subgrafo** de um grafo H se $V(H) \subseteq V(G)$ e $A(H) \subseteq A(G)$; escrevemos $H \subseteq G$. Neste caso, também dizemos que H **está contido** em G, ou que G **contém** H, ou que G é um **supergrafo** de H. Se $H \subseteq G$, mas $H \neq G$ então dizemos que H é um **subgrafo próprio** de G, e escrevemos $H \subset G$.

Dizemos que H é um subgrafo **gerador** (*spanning subgraph*) de G se $H \subseteq G$ e $V(H) = V(G)$.

Se G é um grafo e $\emptyset \neq X \subseteq V(G)$ então o subgrafo de G **induzido** (ou **gerado**) por X é o subgrafo H de G tal que $V(H) = X$ e $A(H)$ é precisamente o conjunto das arestas de G que têm ambos os extremos em X. Neste caso, H é denotado por $G[X]$.

Denotamos por $G-X$ o subgrafo induzido por $V(G) \setminus X$; é o subgrafo obtido de G removendo-se todos os vértices em X e todas as arestas que incidem neles.

Se G é um grafo e $\emptyset \neq F \subseteq A(G)$ então o subgrafo de G **induzido** (ou **gerado**) por F é o subgrafo H de G tal que $A(H) = F$ e $V(H)$ é o conjunto dos vértices de G que são extremos das arestas em F. Neste caso, H é denotado por $G[F]$

Denotamos por $G - F$ o subgrafo de G obtido removendo-se as arestas em F.

Para simplificar, em vez de $G - \{a\}$ escrevemos $G - a$, onde a é um vértice ou uma aresta de G.

Problema: *Prove que numa festa com 6 pessoas sempre existem 3 pessoas que se conhecem mutuamente, ou 3 pessoas que não se conhecem mutuamente.*

Considerando que, se x conhece y então y conhece x (isto é, a relação 'conhecer' é simétrica), na linguagem de grafos a afirmação a ser provada é a seguinte.

Proposição 1.3. *Se G é um grafo simples com 6 vértices, então ou G ou o seu complemento $\overline{G}$ contém um triângulo.*

Exercício 11. *Seja G_n um grafo com conjunto de vértices $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ e tal que v_i e v_j são adjacentes se e só se i e j são primos entre si (isto é, o máximo divisor comum deles é 1). Desenhe os grafos G_4 e G_8. Prove que se $m < n$ então G_m é um subgrafo induzido de G_n.*

Exercício 12. *É verdade que $\delta(H) \leq \delta(G)$ se H é*
(a) um subgrafo de G?
(b) um subgrafo gerador de G?

Exercício 13. *É verdade que o conjunto de vértices de qualquer grafo G pode ser particionado em duas partes X e Y de modo que $G[X]$ e $G[Y]$ sejam ambos grafos regulares?*

Exercício 14. *Prove que para todo grafo G existe um grafo auto-complementar que tem um subgrafo induzido isomorfo a G.*

• Passeios, trilhas, caminhos e circuitos

Um **passeio** em um grafo é uma seqüência finita não vazia $P = (v_0, a_1, v_1, a_2, \ldots, a_k, v_k)$, cujos termos são alternadamente vértices v_i e arestas a_j, e tal que, para todo i, $1 \leq i \leq k$, os extremos de a_i são v_{i-1} e v_i. Dizemos que P é um passeio **de** v_o **a** (**para**) v_k, e P **passa** pelos vértices v_i e pelas arestas a_j. Os vértices v_o e v_k são a **origem** e o **término** de P, respectivamente; e os vértices $v_1, \ldots, v_{k-1}$ são chamados **vértices internos** de P. O conjunto dos vértices e das arestas que definem P é denotado por $V(P)$ e $A(P)$, respectivamente.

O **comprimento** de P, denotado por $\|P\|$, é o número de arestas de P.

Uma **trilha** é um passeio sem arestas repetidas. Um **caminho** é um passeio sem vértices repetidos. Um passeio é **fechado** se tem comprimento não nulo e sua origem e seu término coincidem. Uma trilha fechada cuja origem e vértices internos são todos distintos é um **circuito**. Um circuito de comprimento n é denotado por C_n.

Exemplo:

Dizemos que um circuito é **par** (resp. **ímpar**) se seu comprimento é par (resp. impar).

Uma **seção** de um passeio P é um passeio que é uma subseqüência de termos consecutivos de P. A **concatenação** de dois passeios $P = (v_0, a_1, v_1, a_2, \ldots, a_k, v_k)$ e $Q = (v_k = u_0, b_1, u_1, \ldots, b_n, u_n)$, denotada por $\mathbf{P} \cdot \mathbf{Q}$, é o passeio $(v_0, a_1, v_1, a_2, \ldots, a_k, v_k, b_1, u_1, \ldots, b_n, u_n))$. O **reverso** de $P = (v_0, a_1, v_2, a_2, \ldots, a_{k-1}, v_k)$, denotado por $\mathbf{P^{-1}}$, é o passeio $(v_k, a_k, \ldots, v_1, a_1, v_o)$.

Convenções: o termo passeio (respectivamente trilha, caminho, circuito) também será usado para denotar um grafo ou subgrafo cujos vértices e arestas são os termos de um passeio (respectivamente trilha, caminho, circuito). No caso de grafos simples um passeio $P = (v_0, a_1, v_2, a_2, \ldots, a_{k-1}, v_k)$ fica determinado pela seqüência $(v_0, v_1, \ldots, v_k)$ de seus vértices; assim quando conveniente nos referimos ao passeio $(v_0, v_1, \ldots, v_k)$. Quando o grafo não é simples, ao denotarmos um passeio por $(v_0, v_2, \ldots, v_k)$, deve ficar subentendido que estamos nos referindo a qualquer um dos passeios com tal seqüência de vértices. No caso de circuitos, escrevemos apenas a seqüência dos vértices distintos. Assim, $C = (v_0, v_1, \ldots, v_k)$ denota um circuito com início e término v_0, e vértices internos $v_1, \ldots, v_k$.

Exercício 15. *Seja G um grafo, e u, v vértices de G. Se G contém um passeio P de u a v, então G contém um caminho Q de u a v tal que $V(Q) \subseteq V(P)$.*

Exercício 16. *Seja G um grafo e sejam u, v, x três vértices distintos de G. Prove que se G contém um caminho de u a v e um caminho de v a x, então G contém um caminho de u a x.*

Exercício 17. *Prove ou desprove as seguintes afirmações:*

a) Todo passeio fechado ímpar contém uma seção que é um circuito par.

b) Todo passeio fechado par contém uma seção que é um circuito par.

Proposição 1.5. *Seja G um grafo simples tal que $\delta(G) \geq 2$. Então G contém um caminho de comprimento $\delta(G)$ e um circuito de comprimento pelo menos $\delta(G) + 1$.*

Prova. [*Técnica do caminho mais longo.*]

Seja $k := \delta(G)$ e seja $P = (v_0, \ldots, v_m)$ um caminho mais longo em G. Então todos os vizinhos de v_m pertencem a $V(P)$ (caso contrário, teríamos um caminho mais longo do que $\|P\|$, contrariando a escolha de P). Como $g(v_m) \geq k$, temos que $m \geq g(v_m) \geq k$, e portanto o comprimento de P é pelo menos k. Considere o menor índice i tal que $v_i v_m \in A(G)$. Então $(v_i, v_{i+1}, \ldots, v_m)$ é um circuito de comprimento pelo menos $k + 1$. ■

• Conexidade

Um grafo é **conexo** se para todo par de vértices distintos u, v existe um caminho de u a v. Um grafo que não é conexo é dito **desconexo**.

Os *subgrafos conexos maximais* de um grafo são chamados **componentes**.

OBS: Um (sub)grafo G é dito *maximal* (resp. *minimal*) em relação a uma certa propriedade $\mathcal{P}$ (por ex. ser conexo) se G tem a propriedade $\mathcal{P}$, mas nenhum supergrafo (resp. subgrafo) próprio de G tem a propriedade $\mathcal{P}$. Por exemplo, dizer que *H é um subgrafo conexo maximal de G* equivale a dizer que *H é um subgrafo conexo de G e além disso, não existe nenhum supergrafo próprio de H que é um subgrafo conexo de G.* Note que, nada impede que G tenha um outro subgrafo conexo de tamanho maior ou igual ao de H.

Exemplo:

Exercício 18. *Se G é um grafo simples não-vazio com $|V(G)| \leq 2n$ e $g(v) \geq n$ para todo v em G, então G é conexo.*

Exercício 19. *Todo grafo conexo com $n \geq 1$ vértices possui pelo menos $n - 1$ arestas.*

Exercício 20. *Quaisquer dois caminhos mais longos em um grafo conexo possuem um vértice em comum.*

• Distância, diâmetro, cintura e circunferência

A **distância** entre dois vértices u e v de um grafo G, denotada por $d_G(u, v)$ ou simplesmente $d(u, v)$, é o comprimento de um caminho mais curto de u a v. Se não existe nenhum caminho de u a v, então definimos $d(u, v)$ como sendo infinita ($d(u, v) = \infty$). A maior das distâncias entre quaisquer dois vértices de G é o **diâmetro** de G, denotada por **diam(G)**. A **cintura** (*girth*) de um grafo G, denotada por **cint(G)** é o comprimento de um menor circuito de G. A **circunferência** de um grafo é o comprimento de um maior circuito do grafo. Se G não tem nenhum circuito, definimos sua cintura como sendo ∞ e sua circunferência como sendo zero.

Proposição 1.6. *Se G contém pelo menos um circuito então cint$(G) \leq 2$ diam$(G) + 1$.*

Prova. Seja C um circuito em G de comprimento mínimo. Suponhamos que $\|C\| \geq 2\,\mathrm{diam}(G)+2$. Então existem vértices u,v em C tais que $d_C(u,v) \geq \mathrm{diam}(G)+1$. Como em G a distância entre esses vértices é no máximo diam(G), existe em G um caminho mínimo P de u a v tal que P não é um subgrafo de C. Sejam x, y vértices de P tais que a seção P_{xy} de P que vai de x a y tem pelo menos uma aresta não pertencente a C e além disso, intersecta C precisamente nos vértices x e y. Então ambas as seções do circuito C que vão de y a x têm comprimento no máximo $\|P_{xy}\|$, já que a concatenação de qualquer uma dessas seções com P_{xy} forma um circuito em G, e sabemos que C é de comprimento mínimo. Logo, $\|C\|$ é no máximo $2\,\|P_{xy}\|$, e portanto, no máximo $2\,\mathrm{diam}(G)$, contrariando a hipótese assumida. ■

• Caracterização de grafos bipartidos

Proposição 1.6. *Um grafo é bipartido se e só se não contém circuitos ímpares.*

Prova. Seja G um grafo bipartido com bipartição (X,Y) e seja $C = (v_1, v_2, \ldots, v_k)$ um circuito de G. Sem perda de generalidade, suponha que $v_1 \in X$. Então $v_2 \in Y$, $v_3 \in X$, e de modo geral, $v_i \in X$ se i é ímpar, e $v_i \in Y$ se i é par. Como $v_1 \in X$, então $v_k \in Y$, e portanto k é par, ou seja, C é um circuito par.

Vamos agora provar que se G é um grafo sem circuitos ímpares então G é bipartido. É suficiente considerar o caso em que G é conexo. Suponha então G conexo, escolha arbitrariamente um vértice w e defina os conjuntos:

$$X := \{v \in V(G) :\ d(v,w) \text{ é par}\};$$

$$Y := \{v \in V(G) :\ d(v,w) \text{ é ímpar}\}.$$

Vamos provar que (X,Y) é uma bipartição de G. Para isso, vamos tomar dois vértices quaisquer u e v em X e provar que esses vértices não são adjacentes.

Sejam

P um caminho mais curto de w a u,

Q um caminho mais curto de w a v.

Seja z o vértice comum a $V(P)$ e $V(Q)$ tal que, em P, nenhum outro vértice que ocorre depois de z pertence a ambos os caminhos. [Pensar por que existe tal z, e ver onde usa essa informação no que segue.]

Sejam

P_{wz} a seção de P que vai de w a z, P_{zu} a seção de P que vai de z a u,

Q_{wz} a seção de Q que vai de w a z, Q_{zv} a seção de Q que vai de z a v.

Pela escolha de P e Q segue que $\|P_{wz}\| = \|Q_{wz}\|$. E como P e Q têm comprimento par, concluimos que $\|P_{zu}\|$ e $\|Q_{zv}\|$ têm a mesma paridade e se intersectam apenas no vértice z. Logo, $P_{zu}^{-1}Q_{zv}$ é um caminho par de u a v. Se u fosse adjacente a v então tal caminho juntamente com a aresta vu formaria um circuito ímpar em G, contrariando a hipótese. Logo, u e v não são adjacentes.

Analogamente, conclui-se que quaisquer dois vértices de Y não são adjacentes. Portanto, (X,Y) é uma bipartição de G, ou seja, G é bipartido. ■