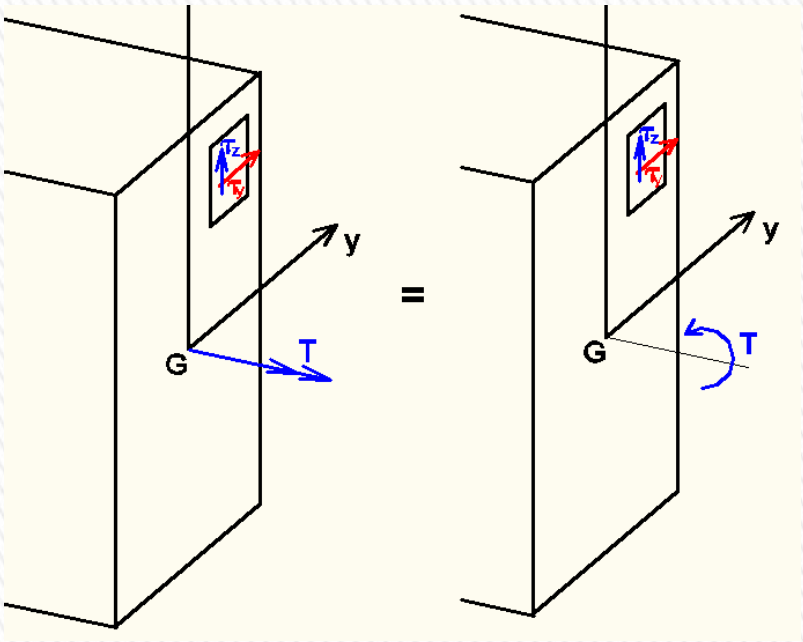
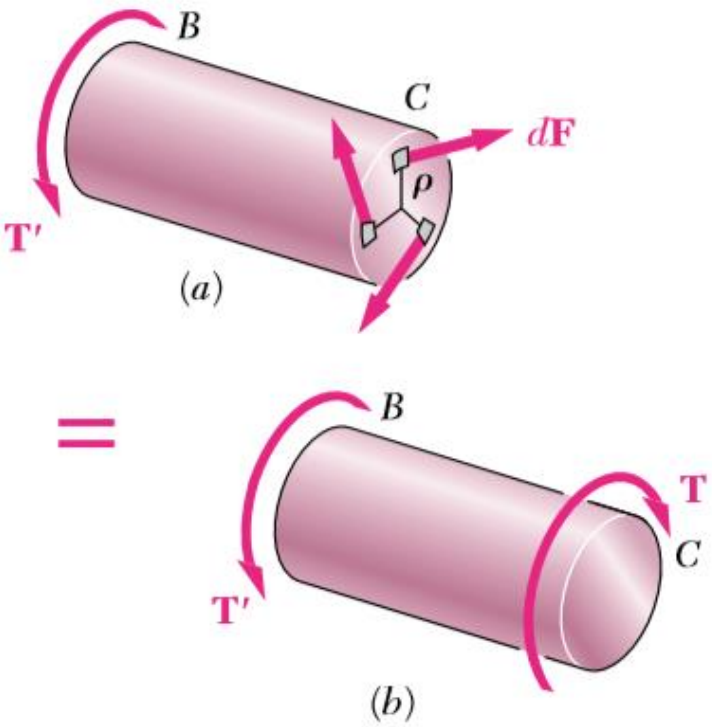
TORÇÃO EM EIXOS CIRCULARES

Valério S. Almeida

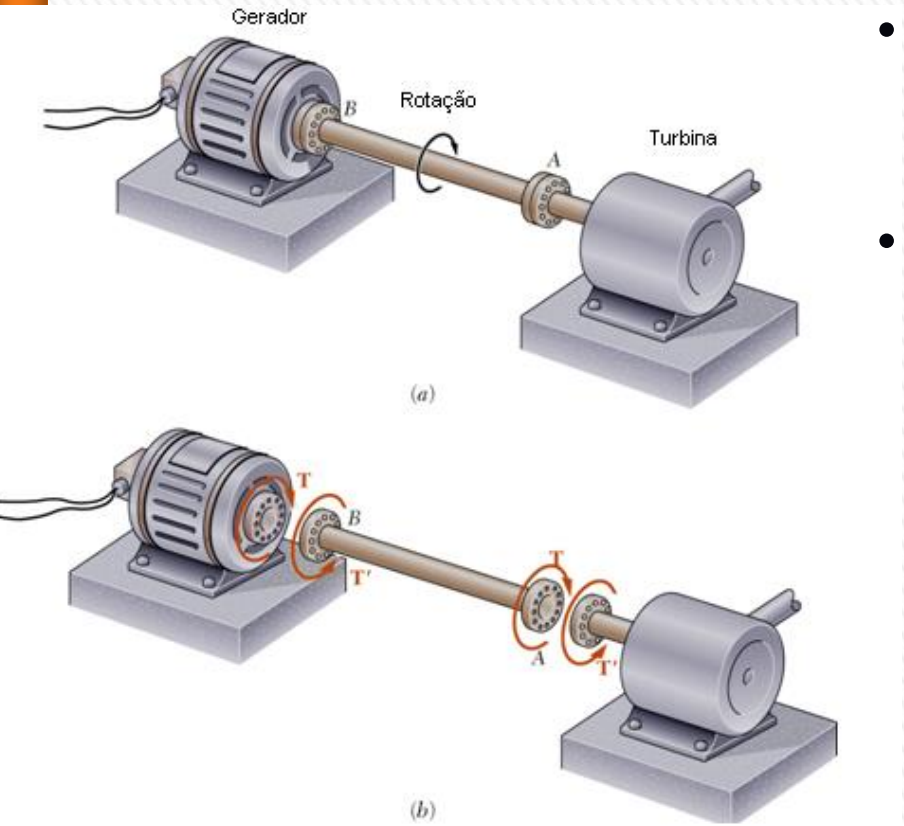
Abril/2020

TORÇÃO EM EIXOS CIRCULARES





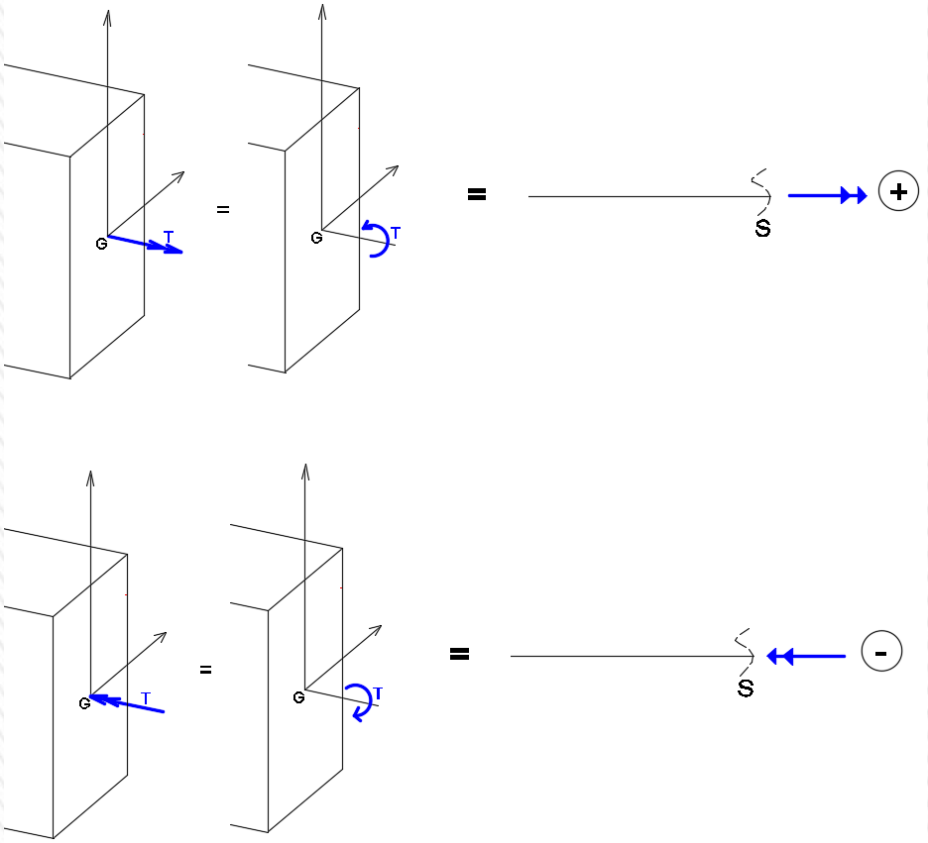
TORÇÃO EM EIXOS CIRCULARES

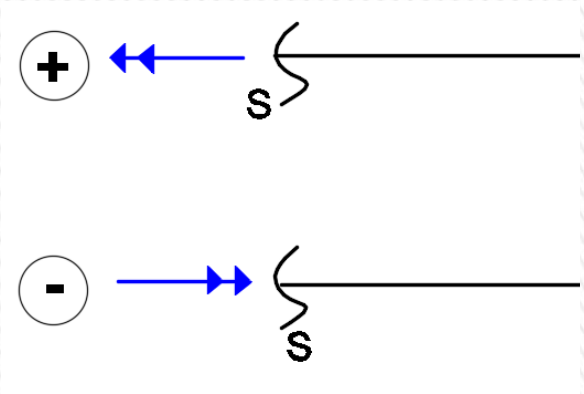


Hipóteses:

- seções planas permanecem planas ao eixo longitudinal;
- não há deformação longitudinal, não há o fenômeno de empenamento;
- as ações produzem uma rotação das seções transversais no eixo longitudinal (x);
- toda seção sofre uma rotação constante e de pequenos valores;

Diagramas de esforços - Convenção de sinais

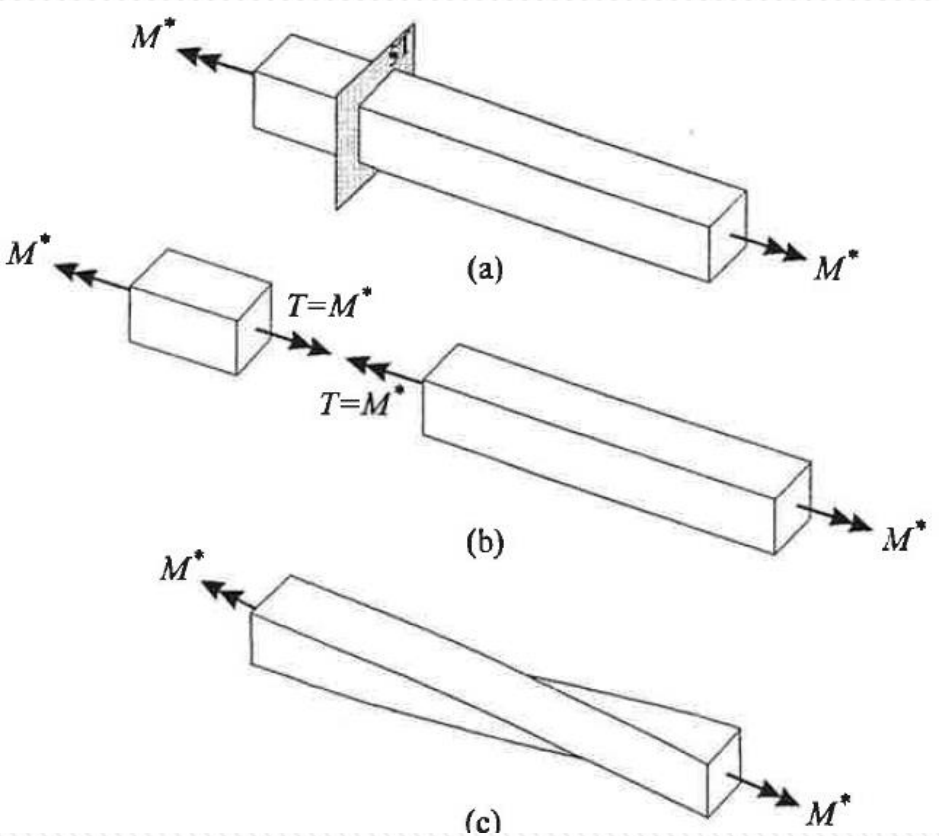




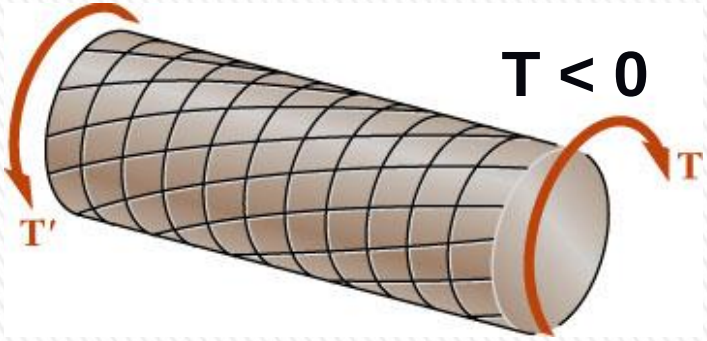
Momento de torção[2]	O vetor momento tem o sentido da normal externa à seção transversal em que atua	O vetor momento tem sentido contrário ao da normal externa à seção tranversal em que atua

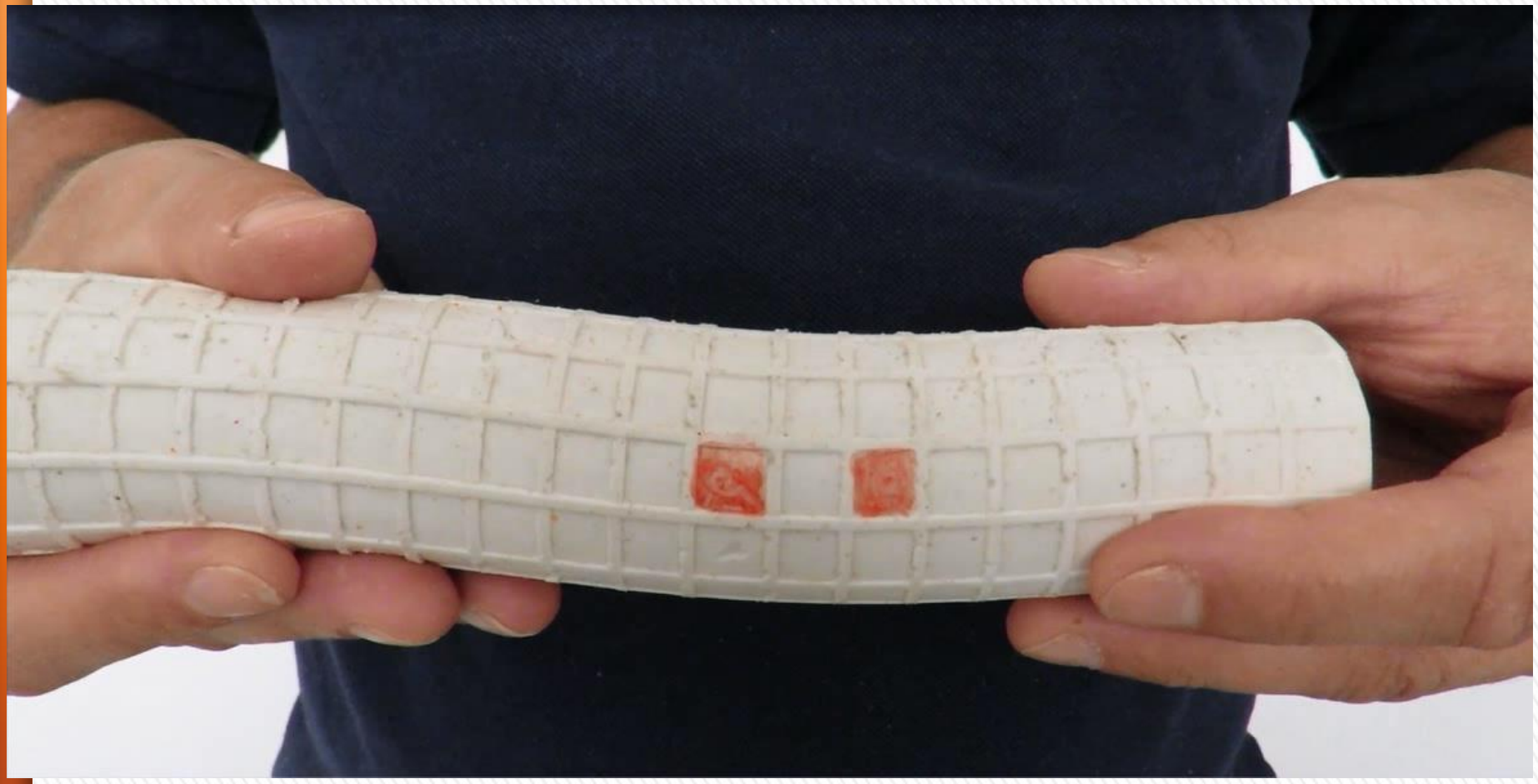
Rotacionar a seção no sentido anti-horário (T>0)

Diagramas de esforços - Convenção de sinais

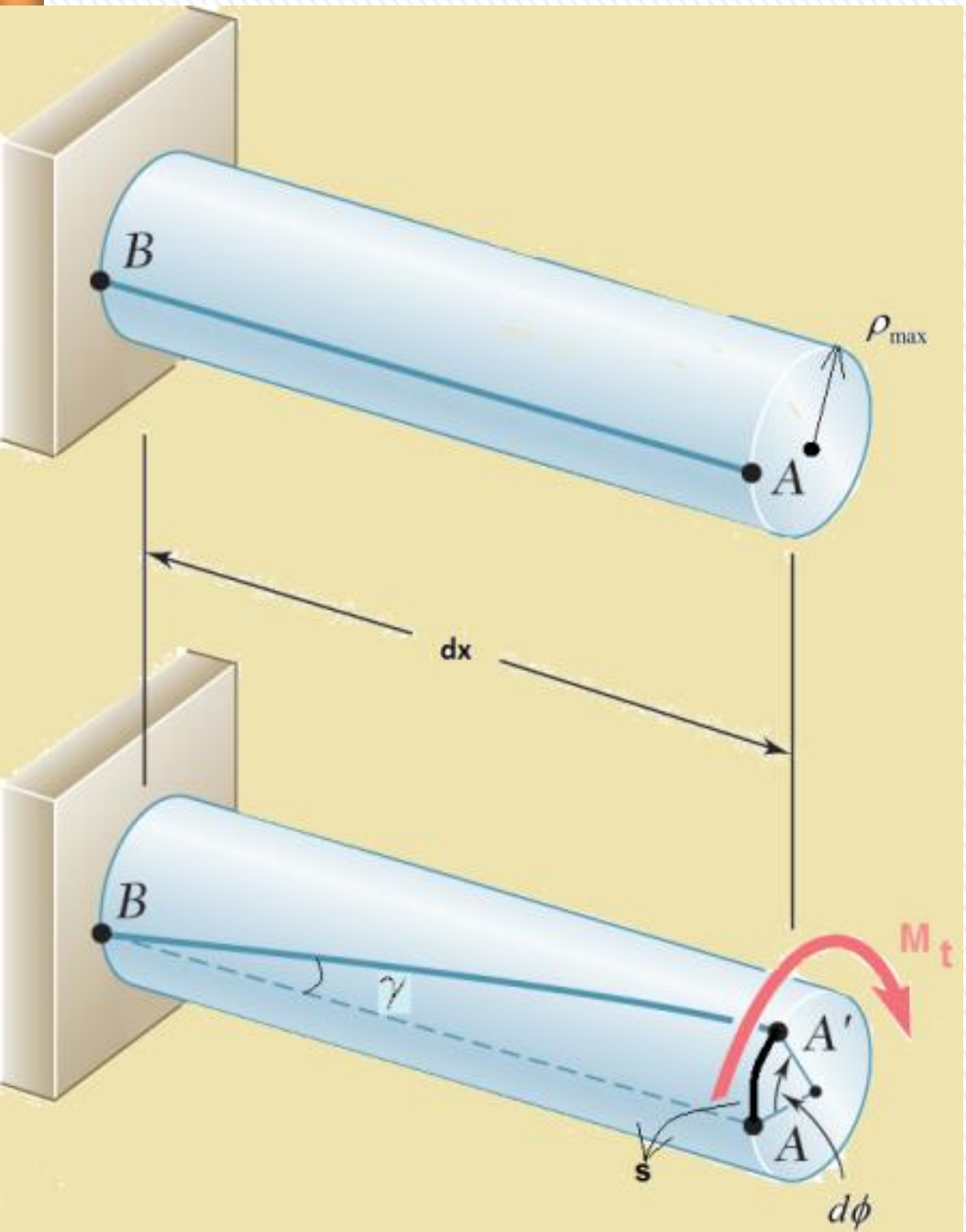


T > 0





Torção – Relação cisalhamento-ângulo



$$s = \gamma \cdot dx$$

$$s = \rho \cdot d\phi$$

$$\rho \cdot d\phi = \gamma \cdot dx \rightarrow \gamma = \frac{\rho \cdot d\phi}{dx}$$

$$\tau = G \cdot \gamma = G \cdot \frac{\rho \cdot d\phi}{dx}$$

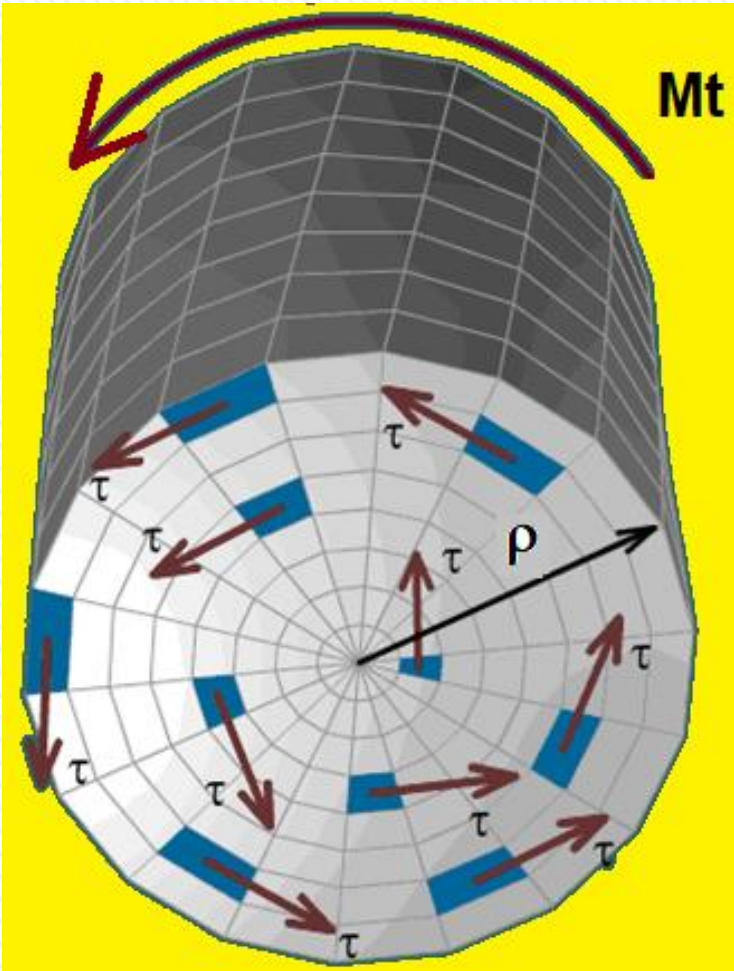
ρ: raio da seção
ϕ: rotação da seção
s: comprimento do arco

Torção – Cisalhamento-momento torçor

$$dM_t = \tau \cdot \rho \cdot dA$$

$$\begin{cases} \tau = G \cdot \gamma = G \cdot \dfrac{\rho \cdot d\phi}{dx} \\ \rho \cdot d\phi = \gamma \cdot dx \rightarrow \gamma = \dfrac{\rho \cdot d\phi}{dx} \end{cases}$$

$$\frac{d\phi}{dx} = \frac{\gamma}{\rho}$$



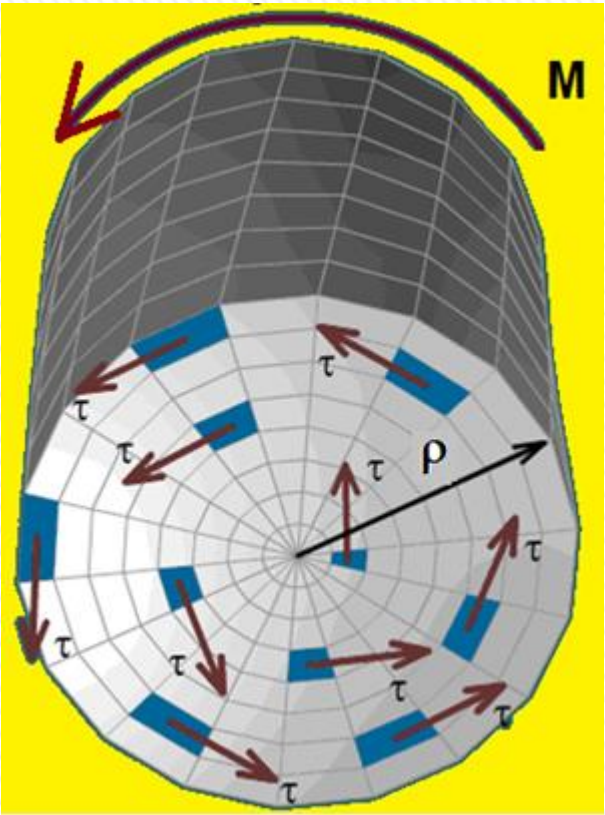
$$M_t = \int_A \tau \cdot \rho \cdot dA = \int_A G \cdot \rho \cdot \frac{\partial \phi(x)}{\partial x} \rho \cdot dA = G \cdot \frac{\partial \phi(x)}{\partial x} \int_A \rho^2 \cdot dA$$

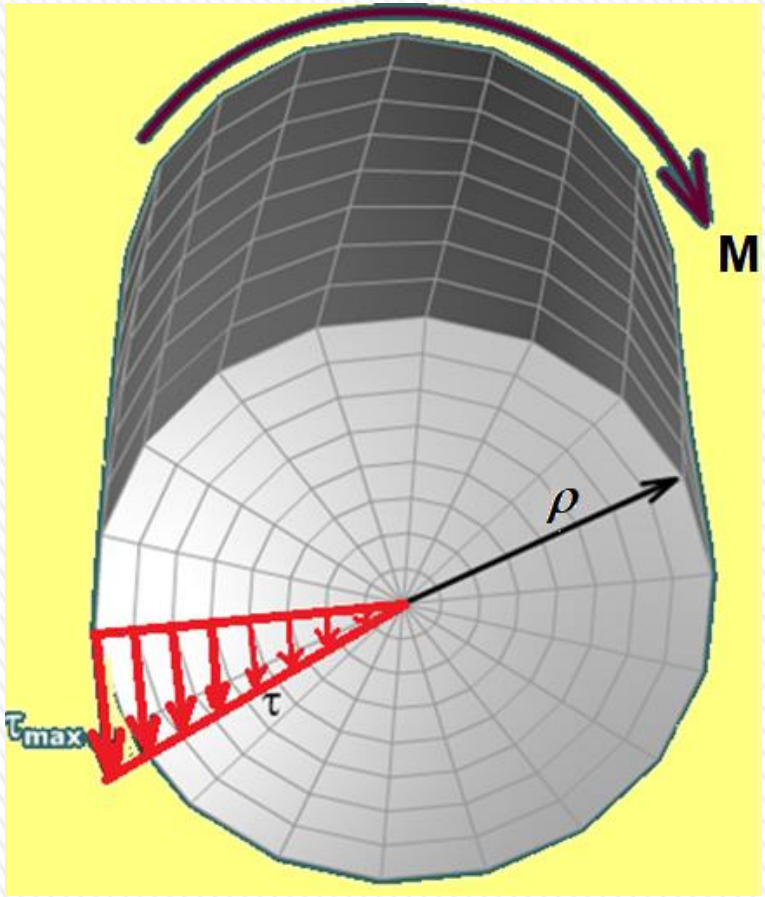
$$M_t = G \cdot \frac{\partial \phi(x)}{\partial x} \cdot J$$

$$\tau = \frac{M}{J} \cdot \rho$$

J: momento polar de inércia $J = \int_A \rho^2 \cdot dA$

Torção – Distribuição Cisalhamento





$$\tau = \frac{M}{J} \cdot \rho$$

Distribuição linear da tensão cisalhante

Tensão cisalhante máxima: fibras na borda da seção

$$\tau_{\max} = \frac{M}{J} \cdot \rho_{\max}$$

Torção – Momento Polar de Inércia (*J*)

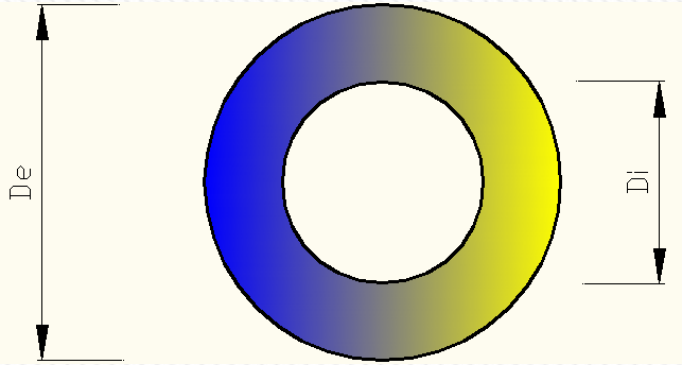
Propriedade geométrica da seção:

$$J = \int_A \rho^2 \cdot dA$$

Unidade: m^4,cm^4, mm^4

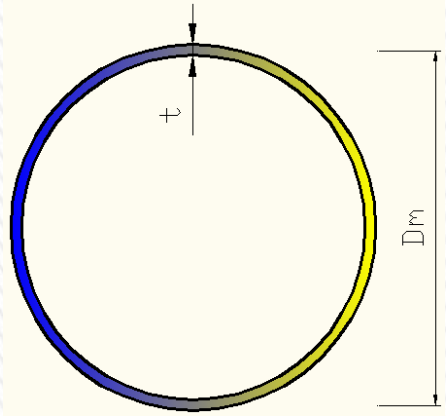
Seção vazada:

$$J = \frac{\pi \cdot \left(D_e^4 - D_i^4\right)}{32}$$



Tubo de parede fina, um cano, por exemplo:

$$t << D_m \rightarrow J = \frac{\pi \cdot D_m^3 \cdot t}{4}$$



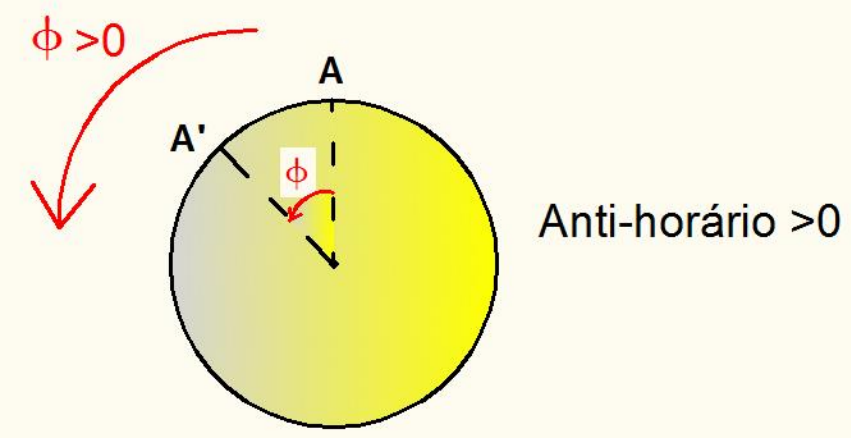
D_e e D_i: diâmetro externo e interno
D_m: diâmetro médio do tubo
t: espessura do cano

Torção – Equação da Rotação

$$\frac{\partial\phi(x)}{\partial x} = \frac{M_t(x)}{G \cdot J} \xrightarrow{\int} \int_{x0}^{x1} \partial\phi(x) = \int_{x0}^{x1} \frac{M_t}{G \cdot J} dx$$

$$\longrightarrow \phi(x_1) - \phi(x_0) = \frac{M_t \cdot (x_1 - x_0)}{G \cdot J} = \frac{M_t \cdot L}{G \cdot J}$$

$$\longrightarrow \phi(x_1) = \phi(x_0) + \frac{M_t \cdot L}{G \cdot J}$$



$$\phi(x_j) = \phi(x_0) + \sum_{i=1}^{j} \frac{M_i \cdot L_i}{G_i \cdot J_i}$$

ϕ em radianos (adimensional)

Onde *j* é o número de trechos da peça estrutural onde M_i, G_i e J_i são constantes em cada trecho de comprimento L_i

M_t ou M_i: trecho do diagrama de torção, **com sinal**.

Torção – Projeto de eixos

Critério para dimensionar ou verificar o eixo:

$$\max(\tau_j) \leq \tau_{adm.}$$ → Critério de segurança

$$\max(\phi_j) \leq \phi_{adm.}$$ → Critério de serviço

τ: tensão solicitante, depende das cargas, geometria da seção

τ_{adm}: tensão admissível, propriedade resistente do material

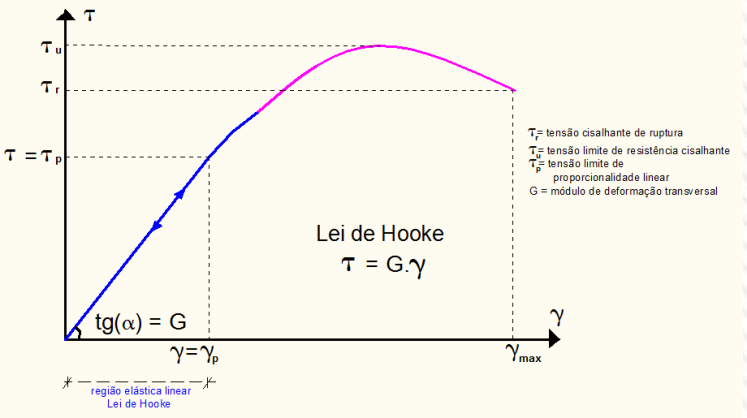
Unidades:
τ em MPa, kPa
ϕ em radianos (adimensional)

766 **Apêndice B. Propriedades típicas de materiais mais usados na engenharia[1,5]**
(Unidades SI)

Material	Densidade kg/m³	Limite de resistência: Tração, MPa	Limite de resistência: Compressão[2], MPa	Limite de resistência: Cisalhamento, MPa	Tensão de escoamento[3]: Tração, MPa	Tensão de escoamento[3]: Cisalhamento, MPa	Módulo de elasticidade, GPa	Módulo de elasticidade transversal, GPa	Coeficiente de expansão térmica, 10^{-6}/°F	Ductilidade, porcentagem de alongamento em 5 mm
Aço										
Estrutural (ASTM-A36)	7860	400			250	145	200	77,2	11,7	21
Baixa liga e alta resistência										
ASTM-A709 Classe 345	7860	450				345	200	77,2	11,7	21
ASTM-A913 Classe 450	7860	550				450	200	77,2	11,7	17
ASTM-A992 Classe 345	7860	450				345	200	77,2	11,7	21
Temperado e revenido ASTM-A709 Classe 690	7860	760				690	200	77,2	11,7	18
Inoxidável, AISI 302										
Laminado a frio	7920	860	520				190	75	17,3	12
Recozido	7920	655	260			150	190	75	17,3	50
Aço de Reforço Média resistência	7860	480	275	200	77	11,7				
Alta resistência	7860	620	415	200	77	11,7				
Ferro fundido										
Ferro fundido cinzento 4,5% C, ASTM A-48	7200	170	655	240			69	28	12,1	0,5
Ferro fundido maleável 2% C, 1% Si, ASTM A-47	7300	345	620	330	230		165	65	12,1	10
Alumínio										
Liga 1100-H14 (99% Al)	2710	110		70	95	55	70	26	23,6	9
Liga 2014-T6	2800	455		275	400	230	75	27	23,0	13
Liga 2024-T4	2800	470		280	325		73		23,2	19
Liga 5456-H116	2630	315		185	230	130	72		23,9	16
Liga 6061-T6	2710	260		165	240	140	70	26	23,6	17
Liga 7075-T6	2800	570		330	500		72	28	23,6	11

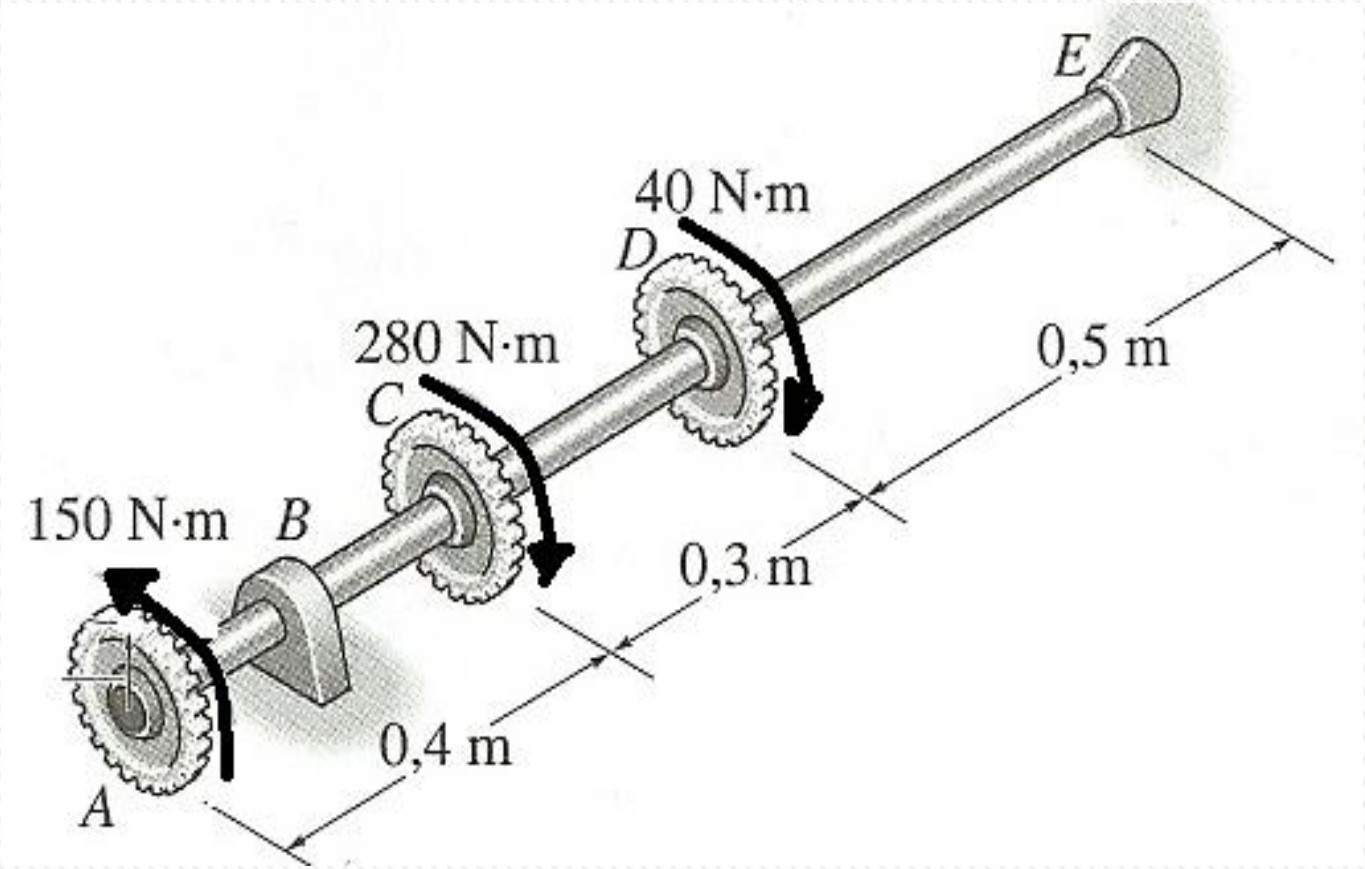
G

τ_{adm}: tensão adminssível, propriedade resistente do material

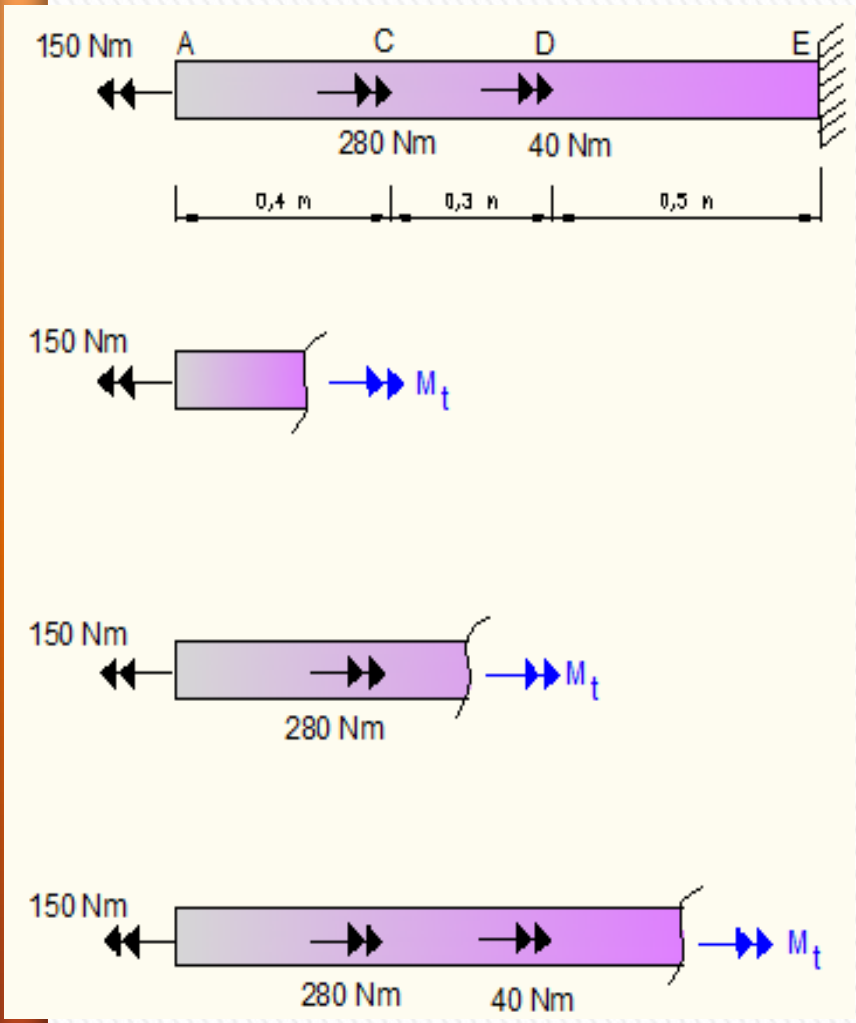


EXEMPLO 1

Engrenagens acopladas ao eixo de aço com a extremidade **E** fixa sujeitas aos torques mostrados. Adote G = 80 GPa e diâmetro de 14mm. Determinar a máxima tensão cisalhante da estrutura e a rotação do eixo em **A**. O eixo gira livremente dentro do mancal em B.



EXEMPLO 1

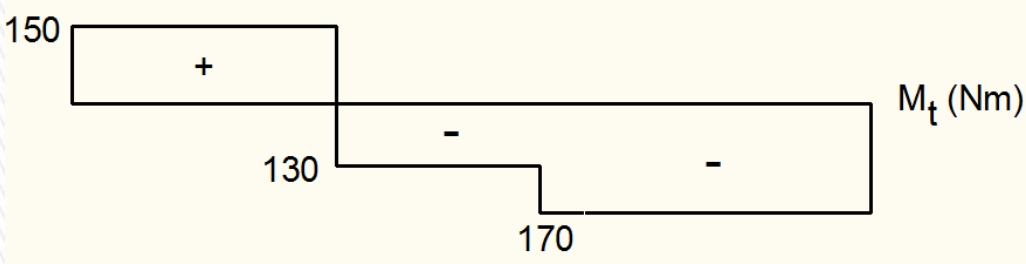


$$\sum M = 0 \longrightarrow M_t - 150 = 0 \rightarrow M_t = 150Nm$$

$$\sum M = 0 \longrightarrow M_t - 150 + 280 = 0 \rightarrow M_t = -130Nm$$

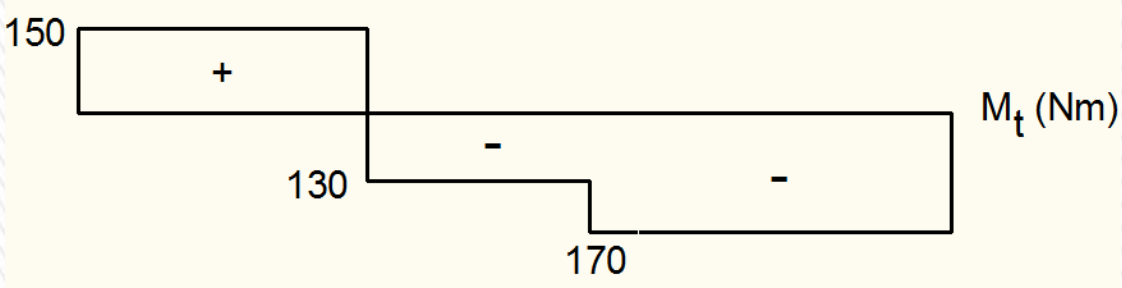
$$\sum M = 0 \longrightarrow M_t - 150 + 280 + 40 = 0 \rightarrow M_t = -170Nm$$

a) Diagrama de torção



EXEMPLO 1

b) Análise de tensão:

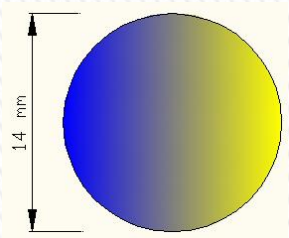


$$\tau_{max} = \frac{M}{J} \cdot \rho_{max}$$

$$J = \frac{\pi \cdot \left(D_e^4 - D_i^4\right)}{32}$$

$$\tau_{max} = \frac{M_{max}}{J} \cdot \rho_{max} = \frac{170}{\frac{\pi \cdot (0{,}014)^4}{32}} \cdot \left(0{,}014/2\right)$$

$$\tau_{max} = 315.525.834{,}7 \quad Pa \ (N/m^2)$$

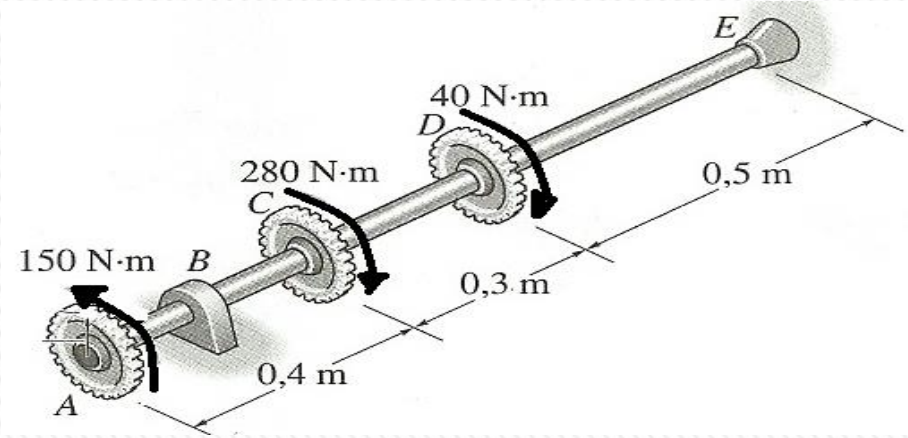


$$\tau_{max} = 315{,}5 \ MPa \ (MN/m^2)$$

EXEMPLO 1

c) Calculo de rotação em A:

$$\phi(x_j) = \phi(x_0) + \sum_{i=1}^{j} \frac{M_i \cdot L_i}{G_i \cdot J_i}$$

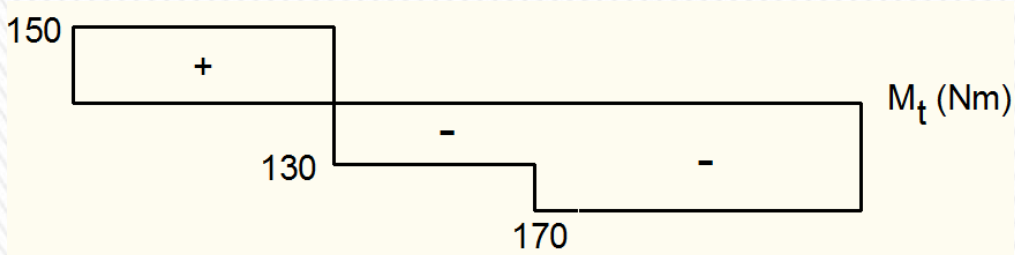


$$\phi(A) = 0 + \left[\left(\frac{M_t \cdot L}{G \cdot J} \right)_{ED} + \left(\frac{M_t \cdot L}{G \cdot J} \right)_{DC} + \left(\frac{M_t \cdot L}{G \cdot J} \right)_{CA} \right]$$

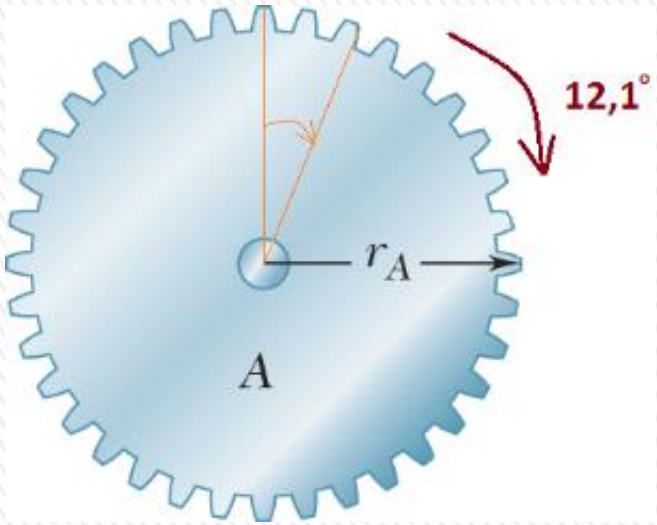
$$\phi(A) = 0 + \frac{1}{G \cdot J} \left[(M_t \cdot L)_{ED} + (M_t \cdot L)_{DC} + (M_t \cdot L)_{CA} \right]$$

$$\phi(A) = 0 + \frac{1}{G \cdot J} \left[(-170 \cdot 0{,}5)_{ED} + (-130 \cdot 0{,}3)_{DC} + (150 \cdot 0{,}4)_{CA} \right]$$

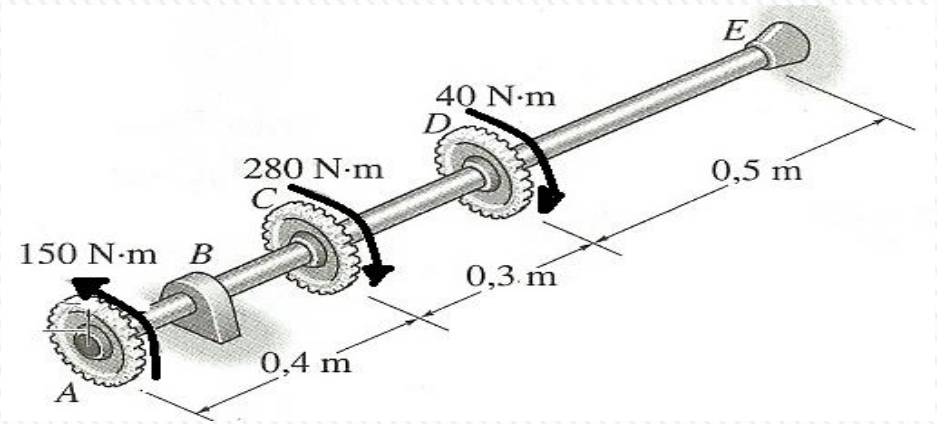
$$\phi(A) = 0 + \frac{-64}{80 \cdot 10^9 \cdot \pi (0{,}014)^4 / 32} = -0{,}21 \; rad \; (-12{,}1^{\circ})$$



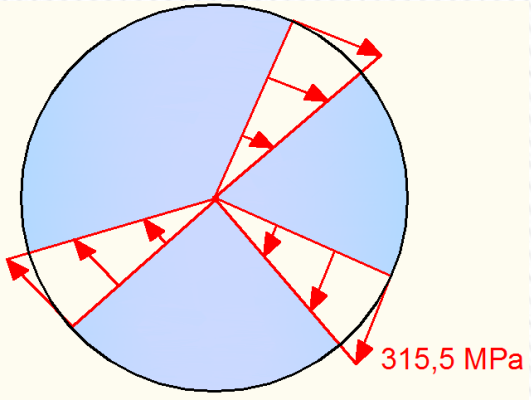
EXEMPLO 1



$$\phi(A) = -0{,}21\ rad\ (-12{,}1^{\circ})$$



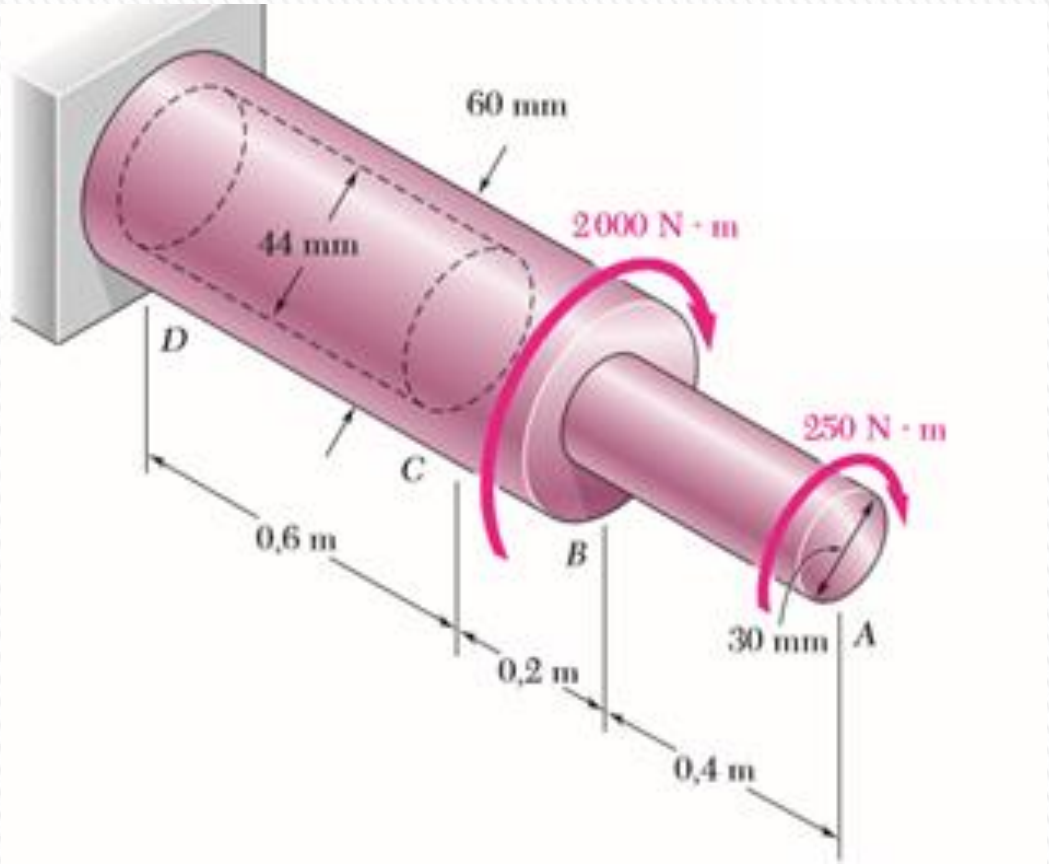
Máxima tensão: trecho DE



$$\tau_{\max} = 315{,}5\ MPa\ (MN/m^2)$$

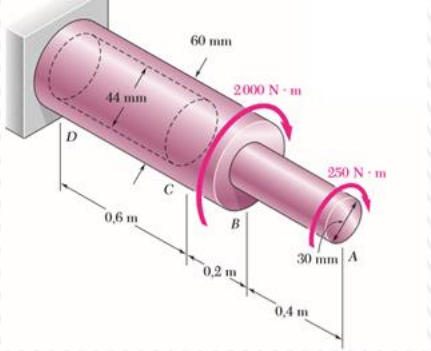
EXEMPLO 2

O eixo horizontal *AD* está engastado a uma base rígida em *D* e submetido aos torques mostrados na figura. Foi feito um furo de 44 mm de diâmetro na parte *CD* do eixo. Sabendo que o eixo inteiro é feito de aço para o qual $G = 77$ GPa, determine o ângulo de torção na extremidade *A*.



Ferdinand P. Beer / E. Russel Johnston, Jr. / John T. DeWolf / David F. Mazurek. MECÂNICA DOS MATERIAIS. 2008, The McGraw-Hill Companies, Inc., New York, NY, 10020

EXEMPLO 2



$\Sigma M_x = 0: \quad (250\ \text{N} \cdot \text{m}) - T_{AB} = 0 \qquad T_{AB} = 250\ \text{N} \cdot \text{m}$

Cortando agora o eixo em uma seção entre B e C, temos

$\Sigma M_x = 0: \ (250\ \text{N} \cdot \text{m}) + (2\,000\ \text{N} \cdot \text{m}) - T_{BC} = 0 \qquad T_{BC} = 2\,250\ \text{N} \cdot \text{m}$

Como não é aplicado nenhum torque em C,

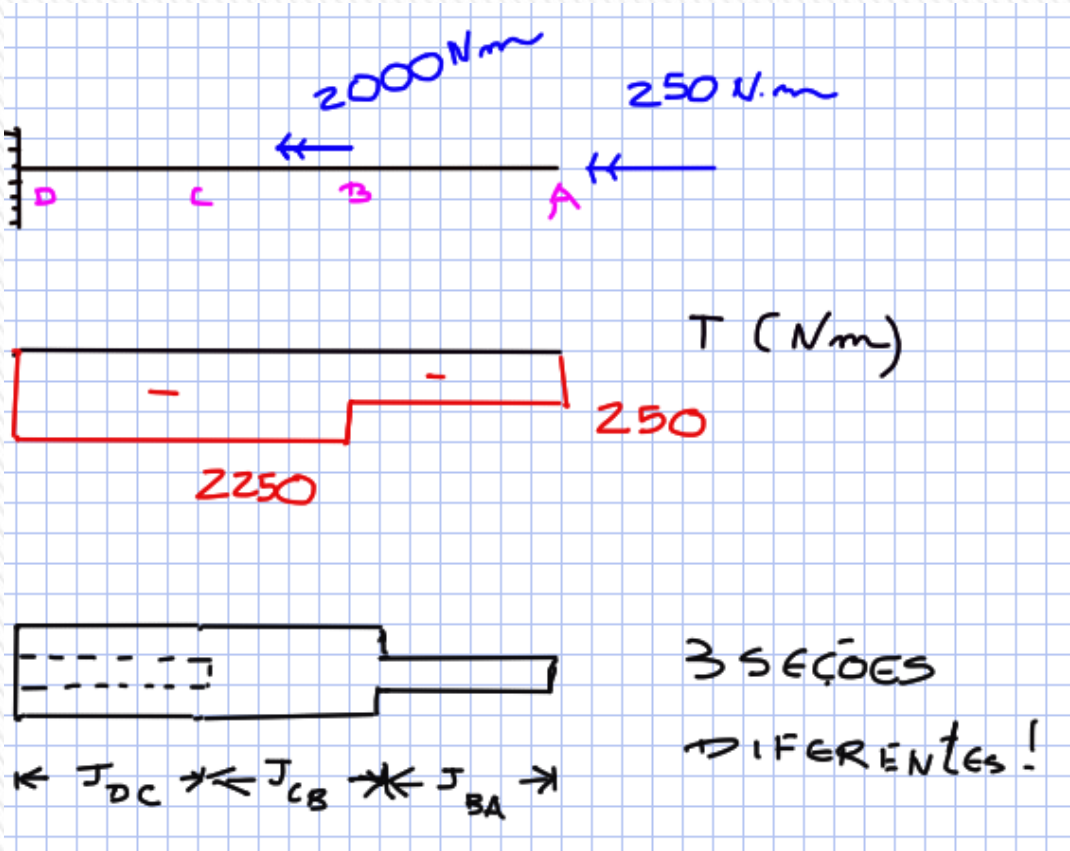
$$T_{CD} = T_{BC} = 2250\ \text{N} \cdot \text{m}$$

Momentos polares de inércia

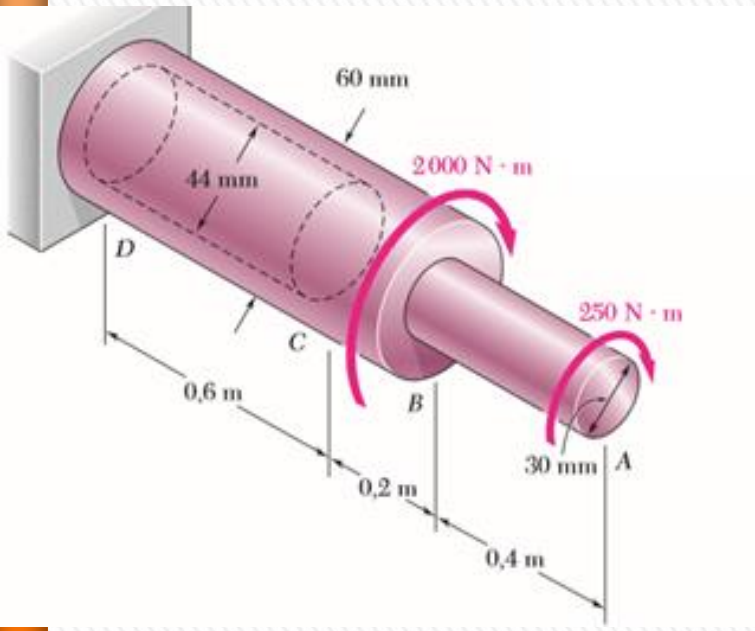
$$J_{AB} = \frac{\pi}{2} c^4 = \frac{\pi}{2} (0{,}015\ \text{m})^4 = 0{,}0795 \times 10^{-6}\ \text{m}^4$$

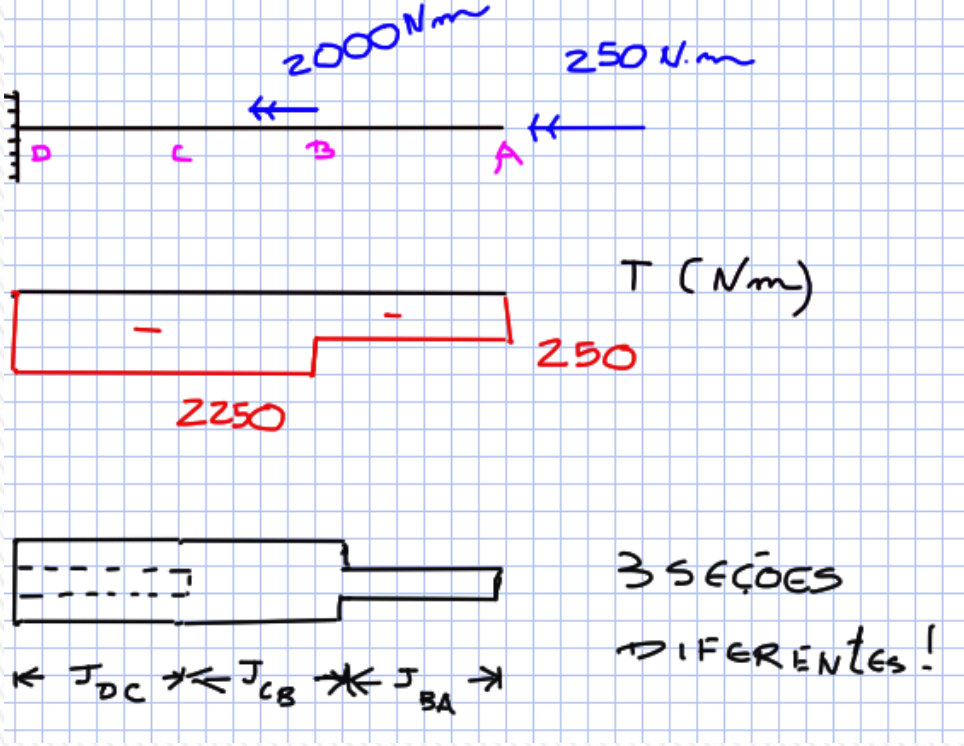
$$J_{BC} = \frac{\pi}{2} c^4 = \frac{\pi}{2} (0{,}030\ \text{m})^4 = 1{,}272 \times 10^{-6}\ \text{m}^4$$

$$J_{CD} = \frac{\pi}{2} (c_2^4 - c_1^4) = \frac{\pi}{2}[(0{,}030\ \text{m})^4 - (0{,}022\ \text{m})^4] = 0{,}904 \times 10^{-6}\ \text{m}^4$$



EXEMPLO 2





$$\phi_A = \sum_i \frac{T_i L_i}{J_i G} = \frac{1}{G}\left(\frac{T_{AB}L_{AB}}{J_{AB}} + \frac{T_{BC}L_{BC}}{J_{BC}} + \frac{T_{CD}L_{CD}}{J_{CD}}\right)$$

$$\phi_A = \frac{-1}{77\ \text{GPa}}\left[\frac{(250\ \text{N}\cdot\text{m})(0{,}4\ \text{m})}{0{,}0795 \times 10^{-6}\ \text{m}^4} + \frac{(2\,250)(0{,}2)}{1{,}272 \times 10^{-6}} + \frac{(2\,250)(0{,}6)}{0{,}904 \times 10^{-6}}\right]$$

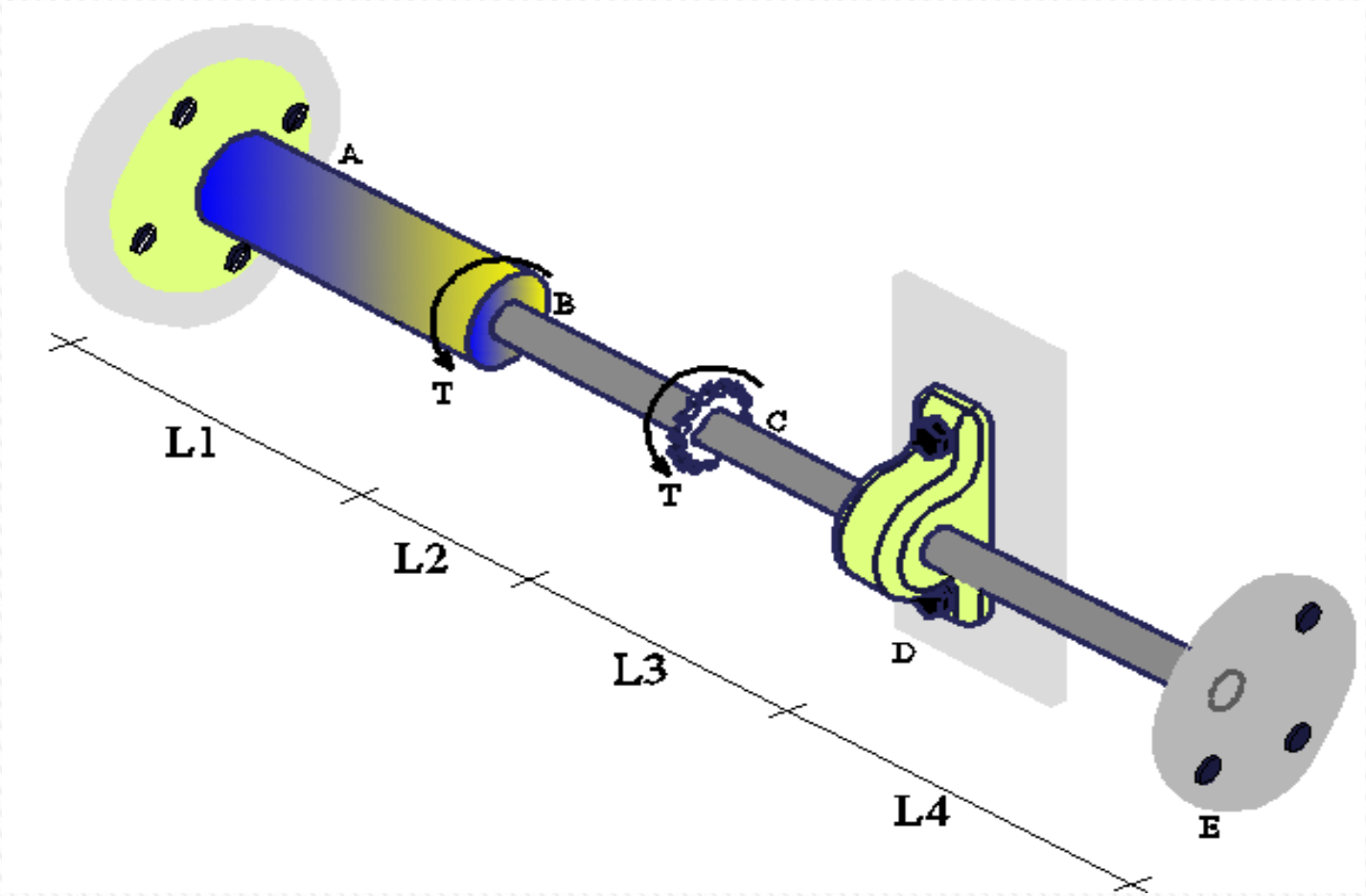
$$= -(0{,}01634 + 0{,}00459 + 0{,}01939) = -0{,}0403\ \text{rad}$$

$$\phi_A = -(0{,}0403\ \text{rad})\frac{360°}{2\pi\ \text{rad}} \qquad \phi_A = -2{,}31°$$

(sentido horário)

EXEMPLO 3

Um eixo fixo em **A** e **E** com um mancal de giro livre em D está submetido aos torques T em **B** e na engrenagem **C**. Obtenha o máximo valor de **T** de modo a atender o critério de tensão admissível e limite máximo do ângulo de torção de 5°. Diâmetro do eixo AB = 44 mm, eixo BE = 22 mm, L1 = L4 = 1500 mm, L2 = L3 = 1000 mm, $\tau_{adm} = 80 \quad MPa$ e G = 60 GPa.



*Resistência do Materiais: Um guia prático. Valerio Almeida; Marcelo Greco, Daniel Maciel. Elsevier, 2018

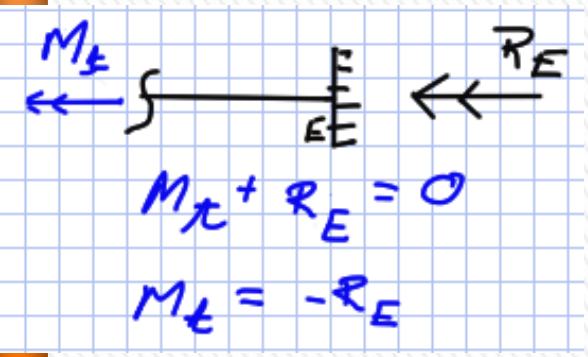
EXEMPLO 3

Problema hiperestático, obter diagrama em termos da reação em **E**

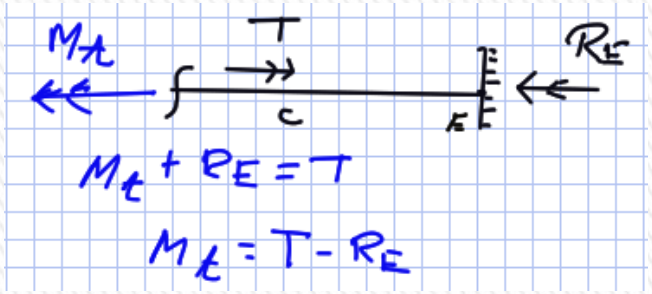
Duas incógnitas (R_A e R_E)
Uma equação: $\sum M_t = 0$

$R_A + R_E = 2\,T$

Inicialmente escrever o diagrama em termos da reação em **E**, assim:

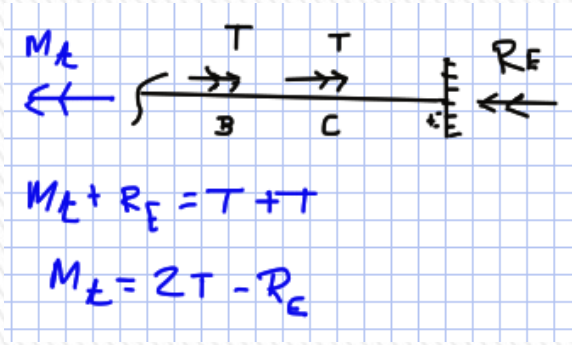


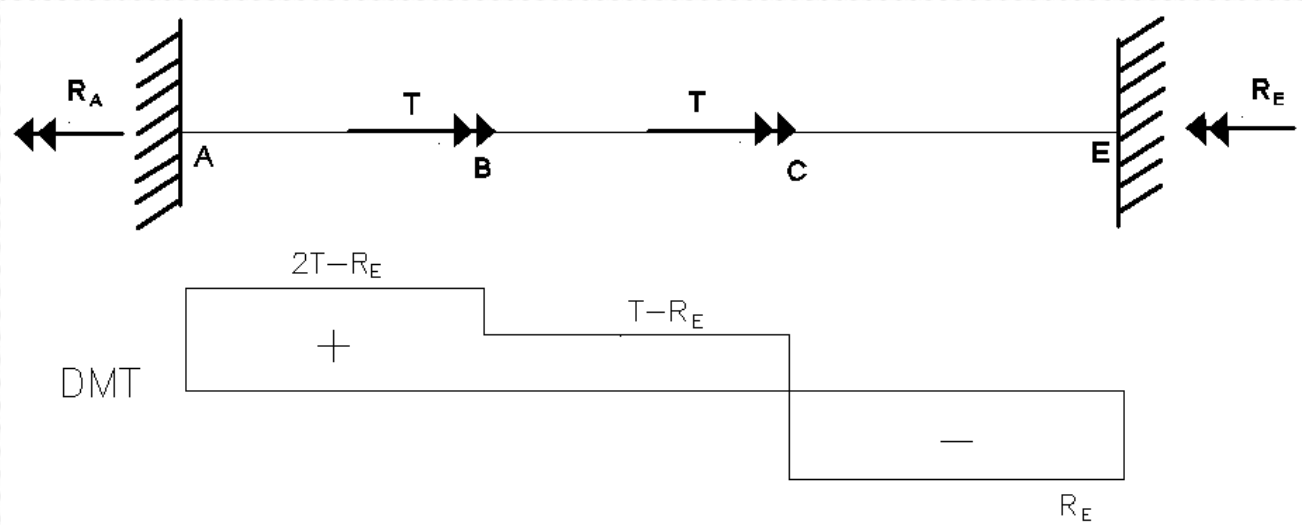
Corte 1



Corte 2

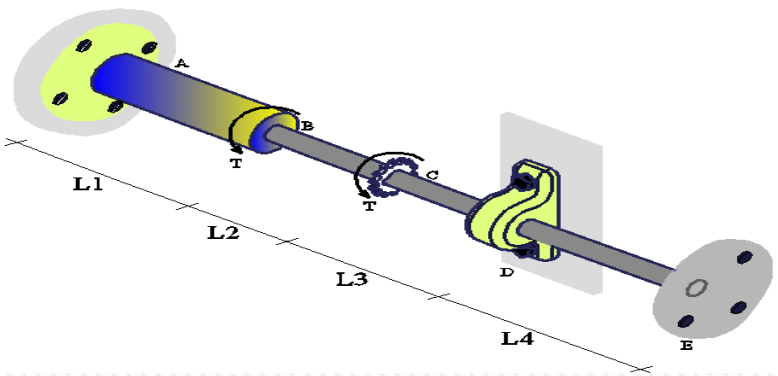
Corte 3





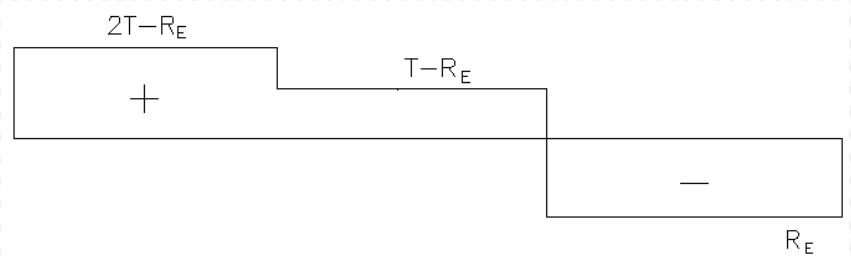
EXEMPLO 3

Necessário outra equação: Equação de coerência de deslocamento (rotação):



Seções **A** e **E** são fixas, indica que a rotação da seção em torno de seu eixo é **NULA:**

$$\phi_A = 0 \quad \text{e} \quad \phi_E = 0$$

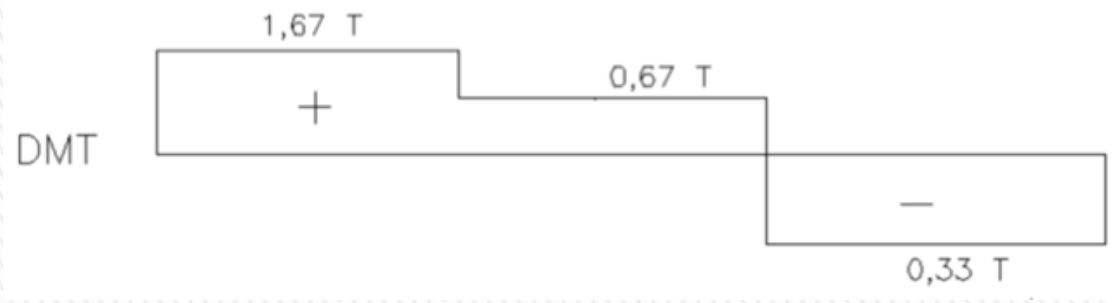


$$\phi_E = \phi_A + \left(\frac{T.L}{G.I_p}\right)_{AB\to DE} = 0 + \frac{(2T-R_E).1{,}5}{G\frac{\pi.0{,}044^4}{32}} + \frac{(T-R_E).1{,}0}{G\frac{\pi.0{,}022^4}{32}} + \frac{(-R_E).2{,}5}{G\frac{\pi.0{,}022^4}{32}} = 0$$

$$R_E = 0{,}33.T$$

EXEMPLO 3

A verificação de tensão crítica deve ser feita nos trechos AB e BC:



A verificação de tensão crítica deve ser feita nos trechos AB e BC:

$$\tau_{AB} = \frac{1{,}67.T.0{,}022}{\frac{\pi.0{,}044^4}{32}} \leq \bar{\tau} = 80.10^3 \rightarrow T \leq 0{,}80 \quad kN.m \quad \tau_{BC} = \frac{0{,}67.T.0{,}011}{\frac{\pi.0{,}022^4}{32}} \leq \bar{\tau} = 80.10^3 \rightarrow$$

$$T \leq 0{,}25 \quad kN.m$$

$$\tau_{BC} = \frac{0{,}67.T.0{,}011}{\frac{\pi.0{,}022^4}{32}} \leq \bar{\tau} = 80.10^3 \rightarrow \quad T \leq 0{,}25 \quad kN.m$$

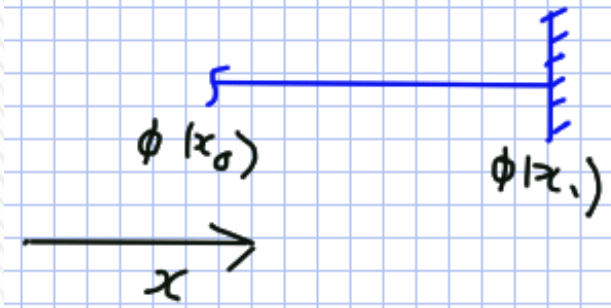
Verificação de rotação máxima.

$$\emptyset_C = \emptyset_A + \left(\frac{T.L}{G.I_p}\right)_{AB \rightarrow BC} = 0 + \frac{1{,}67.T.1{,}5}{60.10^6 \frac{\pi.0{,}044^4}{32}} + \frac{0{,}67.T.1{,}0}{60.10^6 \frac{\pi.0{,}022^4}{32}} \leq \frac{5\pi}{180}$$

$$T \leq 0{,}146 \quad kN.m$$

Portanto, $T = 14{,}6 \quad kN.cm$

EXEMPLO 3



$$\int_{x_0}^{x_1} d\phi(x) \rightarrow \phi(x_1) = \phi(x_0) + \frac{T \cdot L}{GJ}$$

$$\phi(x_0) = \phi(x_1) - \frac{T \cdot L}{GJ}$$

$$\phi(x_0 : C) = 0 - \frac{(-0{,}33T)(2{,}5)}{60 \cdot 10^6 \cdot \frac{\pi}{32} \cdot 0{,}022^4} \leq \frac{5\pi}{180^\circ}$$

$$T \leq 0{,}146 \text{ kNm}$$

Exercício a ser entregue até dia 30/04

3) Lista de exercícios de torção de seção circular

Editar

Exercícios fortemente recomendados para fazer dessa lista:

1;5;16;20;27

Lista de exercícios de torção de seção circular

Editar

Adicionar uma atividade ou recurso

Exercício 5 - Entrega

Editar

Entregar até dia 30/04 às 23:59h.

A lista é a de torção atualizada que está no quadro de nome:

"2) Lista de exercícios de torção de seção circular"

Veja a lista do seu exercício no pdf anexo abaixo.

Lista de seu exercicío

Editar

Exercicío de torção

Editar