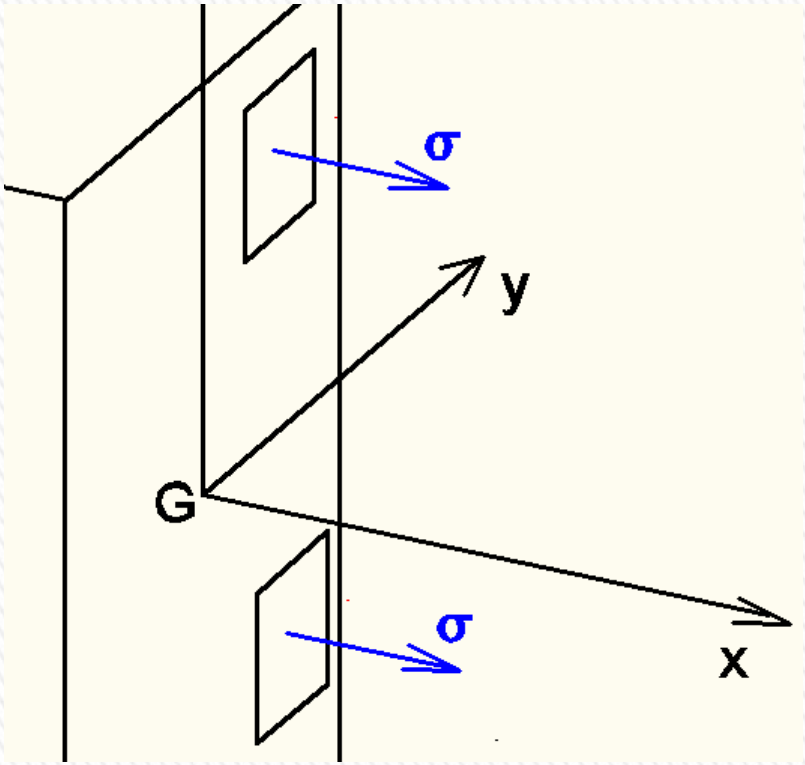
Tensão – Deformação

Cargas axiais e Cisalhamento puro

Valério S. Almeida

Abril/2020

Relação Tensão-Força Normal



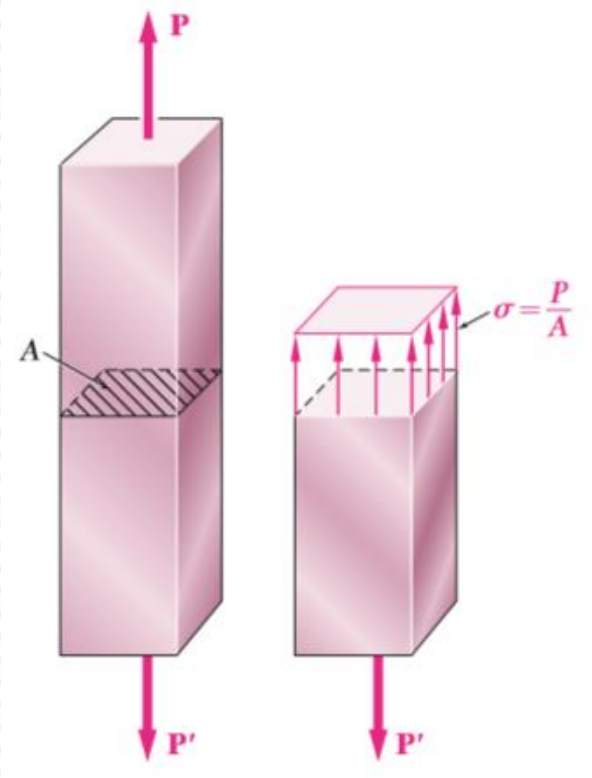
$$N = \int_A \sigma \, dA$$

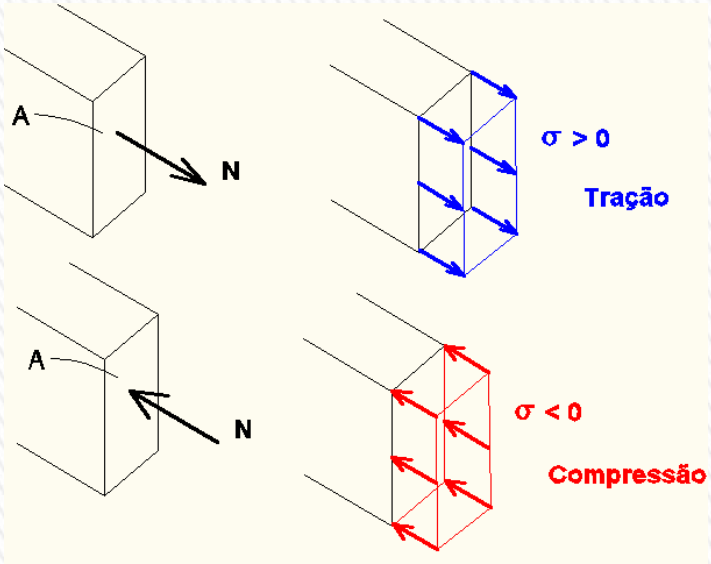
N: ESFORÇO NORMAL

σ: TENSÃO NORMAL

M = 0 (CARGA AXIAL)

Relação Tensão-Força Normal





$$\sigma_{med} = \sigma = \frac{N}{A}$$

Unidade:

$N/m^2 \ (Pa)$

$kN/m^2 = 1.10^3 N/m^2 = 1 \ kPa$

$MN/m^2 = 1.10^6 N/m^2 = 1 \ MPa$

$kgf/cm^2 = 1.10^{-3} tf/cm^2 = 0{,}1 \ MPa$

N: força normal; A: área da seção transversal

Definição de Deformação (ε)

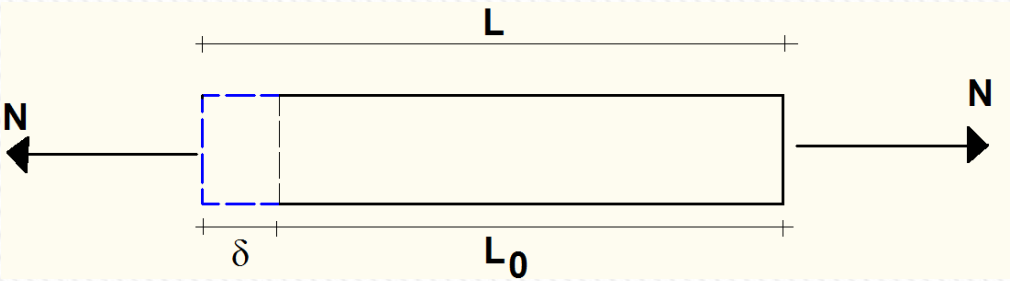
N : esforço normal de tração

L_0: comprimento inicial da barra reta

L : comprimento final

ε: alongamento relativa:
deformação específica

$$\varepsilon = \frac{L - L_0}{L_0} = \frac{\delta}{L_0}$$

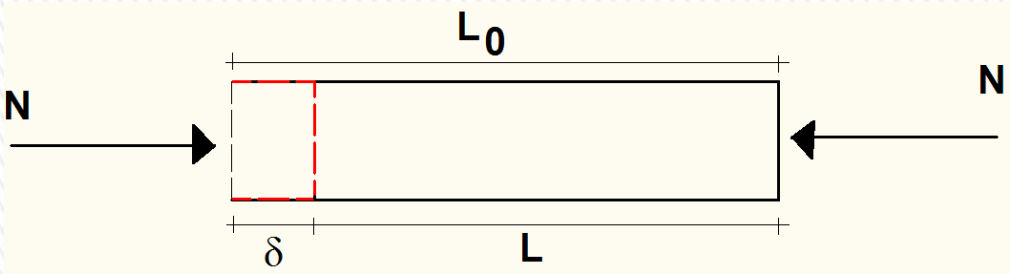


$$\varepsilon > 0 \rightarrow \ alongamento$$

Definição de Deformação (ε)

N : esforço normal de compressão

ε: alongamento relativa: deformação específica



$$\varepsilon = \frac{L - L_0}{L_0} = \frac{\delta}{L_0}$$

$$\varepsilon < 0 \rightarrow \ encurtamento$$

Unidade (ε): adimensional

Modelos constitutivos

Comportamento do material → Tensão: em função da história da deformação

↓

Equação constitutiva

Relações distintas para cada material: fibras, rochas, concreto, aço

Uma dimensão: Lei da tensão x deformação

6

Ensaio de tração

Características essências do comportamento do material

⬇

Curva tensão – deformação com teste unidimensional (uniaxial/cisalhamento)

- **Carga quase-estática**
- **Temperatura moderada (evitar efeito dependente do tempo)**

7

Diagrama Tensão-Deformação (σ-ε)

Ensaio de corpo de prova

Máquina de teste

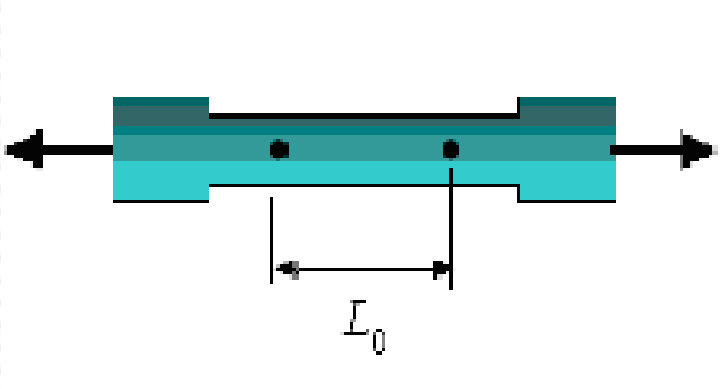
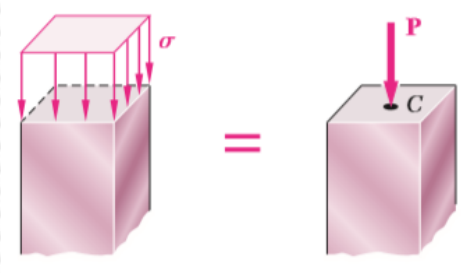


Diagrama Tensão-Deformação (σ-ε)



Aplica-se uma força gradativa

Mede-se a deformação com extensômetros

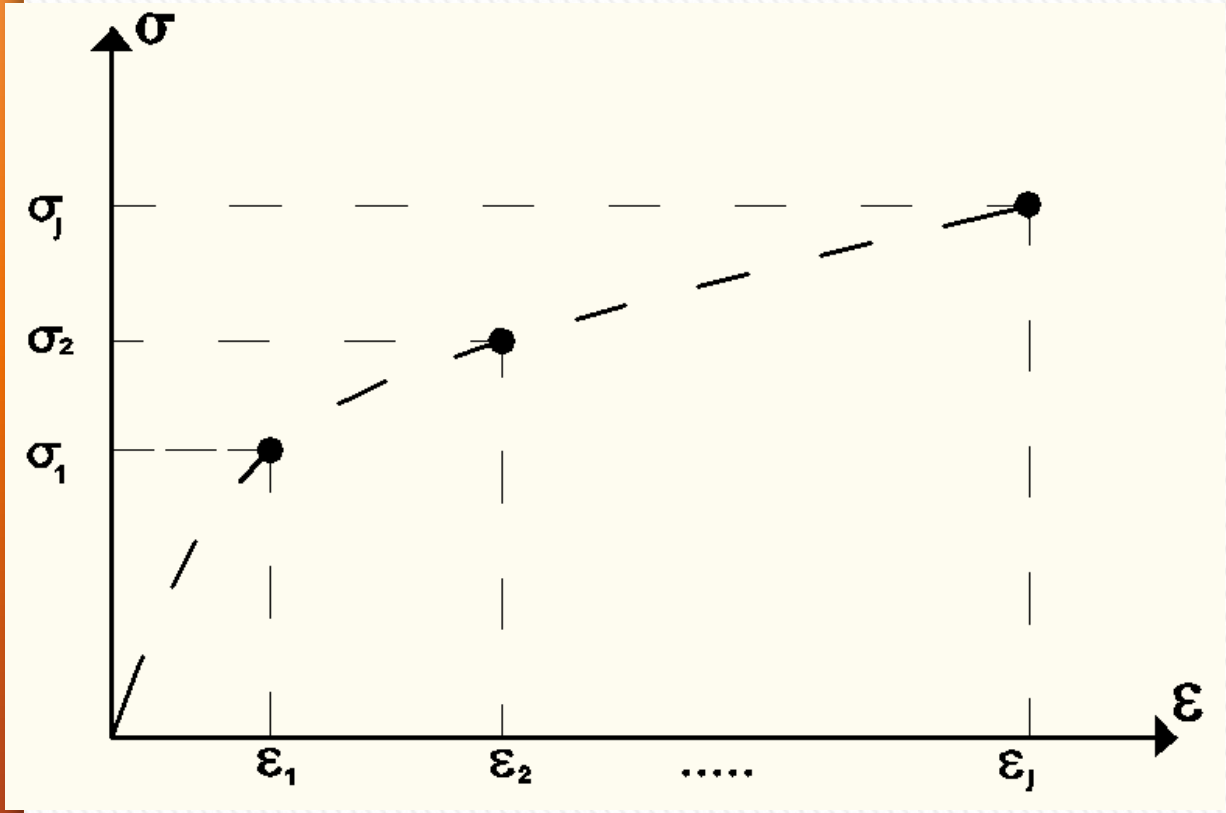
Plota a curva tensão - deformação

$$\sigma(t) = \frac{N(t)}{A}$$

$$\varepsilon(t) = \frac{L(t) - L(t_0)}{L(t_0)} = \frac{\delta}{L_0}$$

Diagrama Tensão-Deformação (σ-ε)

Plota-se a curva tensão - deformação



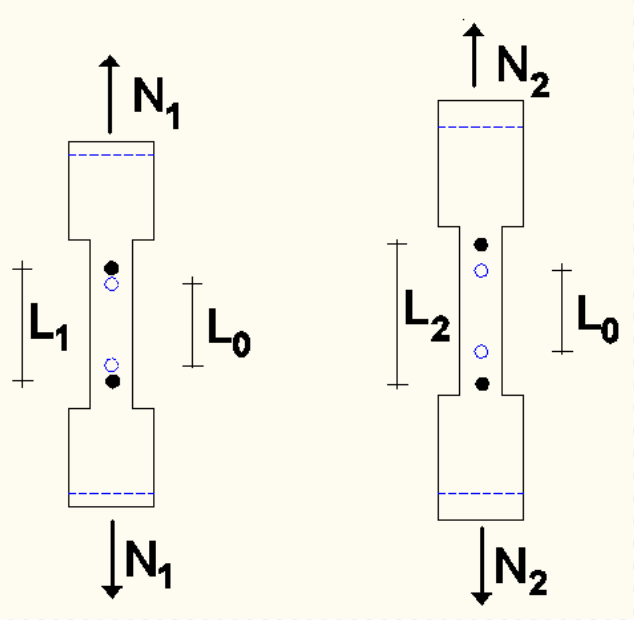


Diagrama Tensão-Deformação (σ-ε)

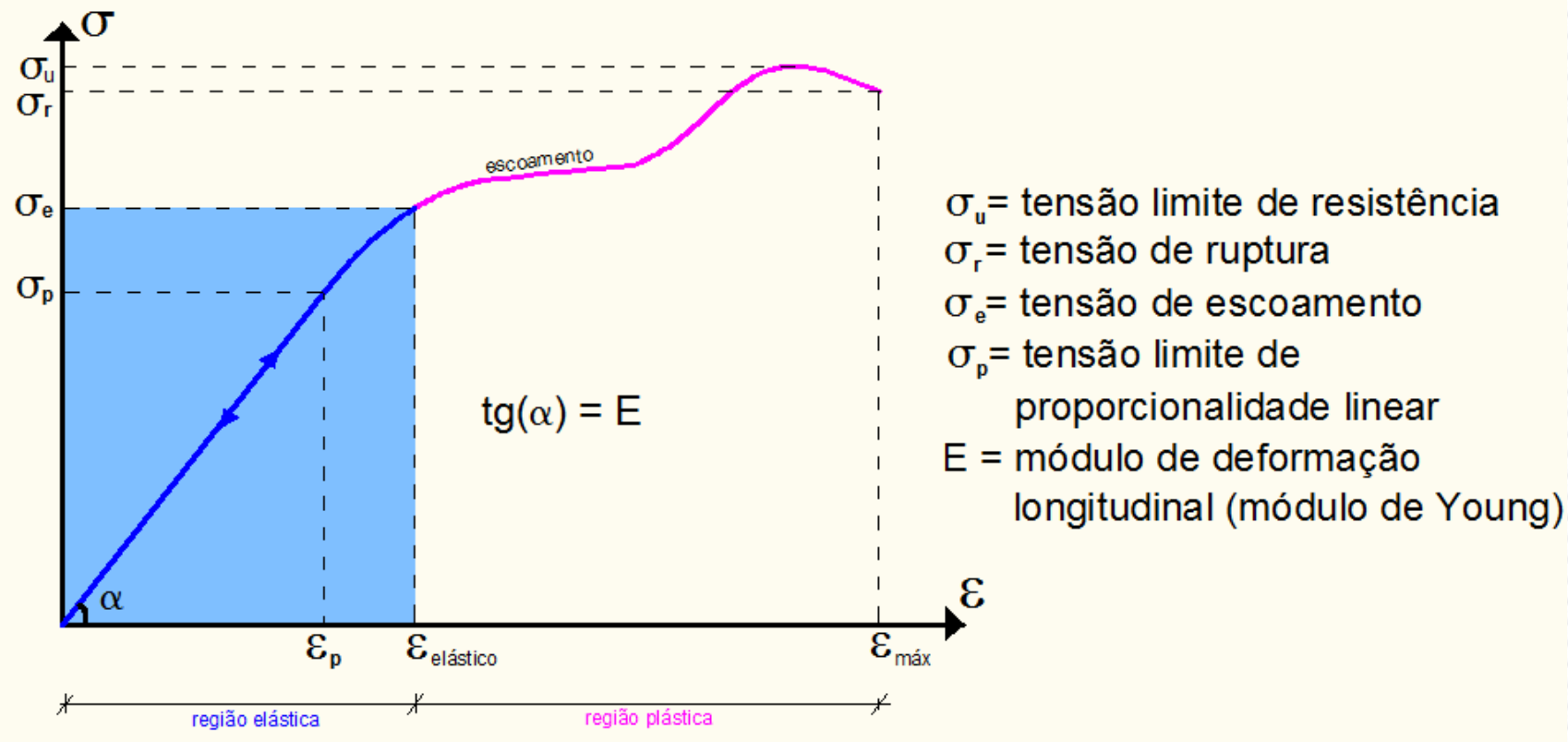


Diagrama Tensão-Deformação (σ-ε)

Região elástica
- reversível

Trecho Linear
- **Lei de Hooke**

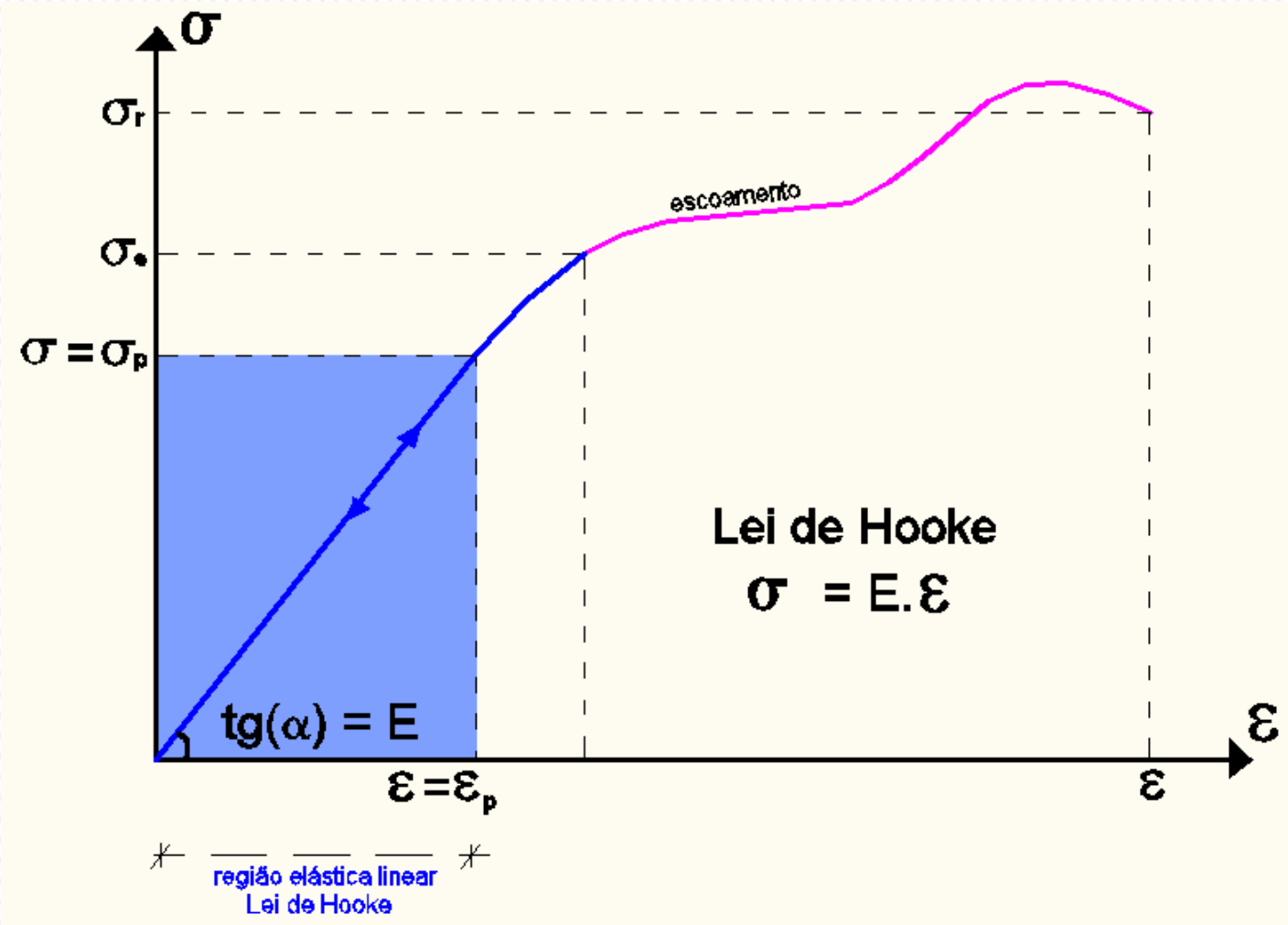


Diagrama Tensão-Deformação (σ-ε)

Região plástico: irreversível

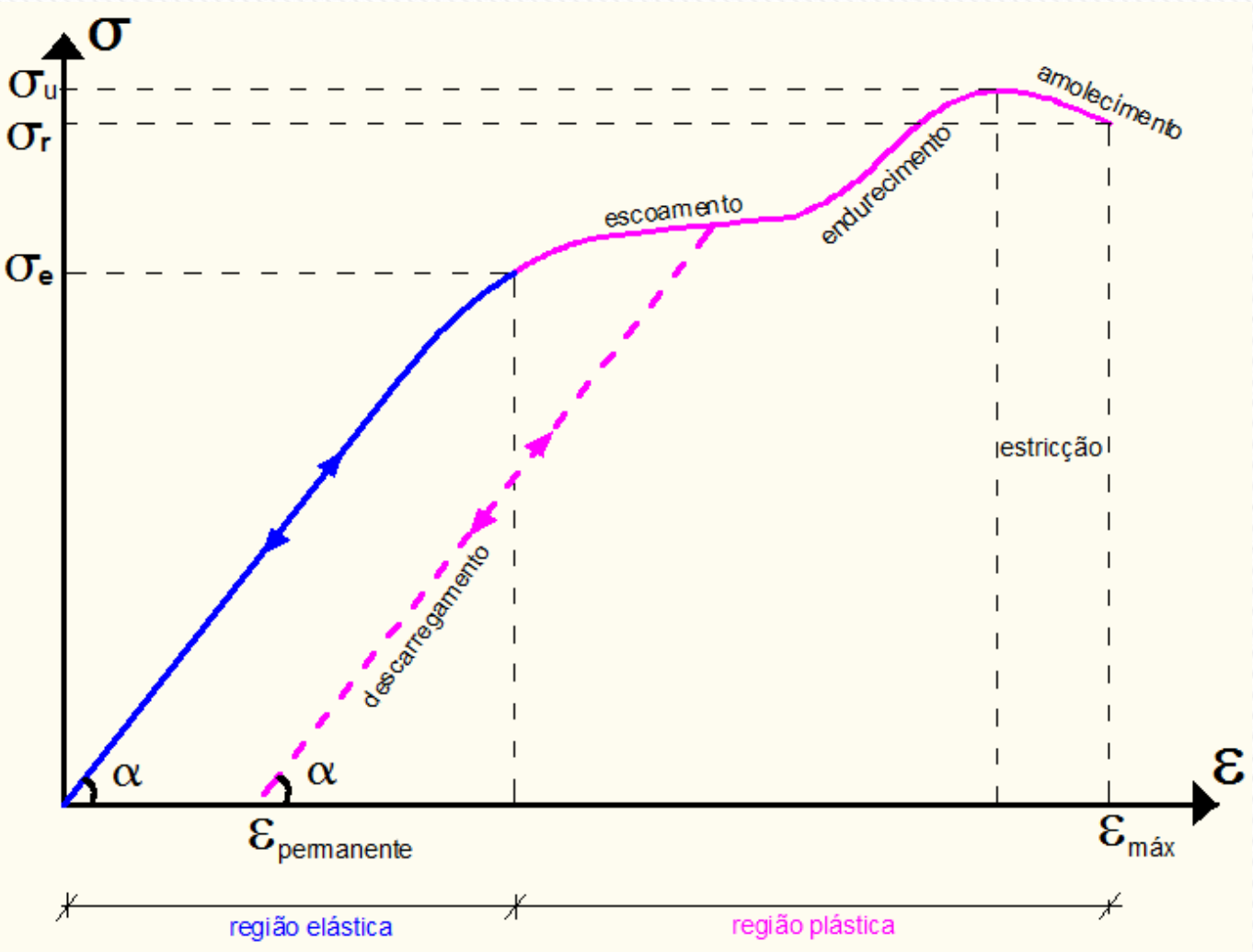
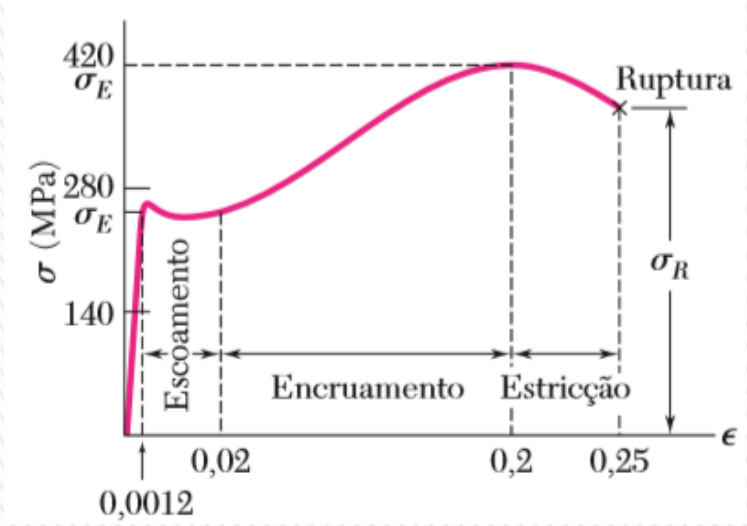


Diagrama Tensão-Deformação (σ-ε)

Material dúctil

- Resistem bem ao impacto
- Ideais para engenharia
- Deformam muito antes de romper

Ex. Aço doce



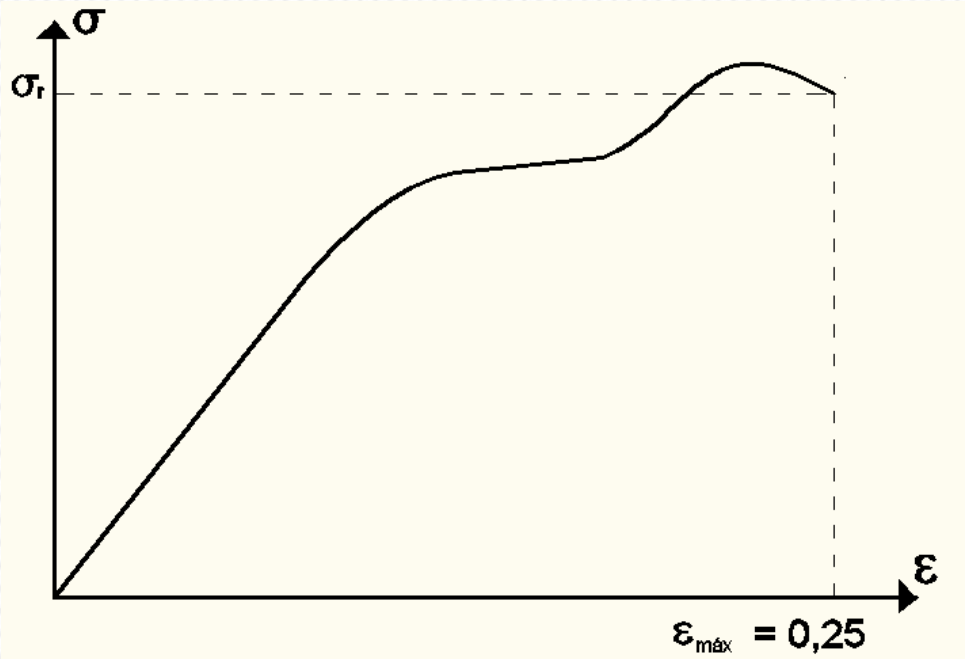
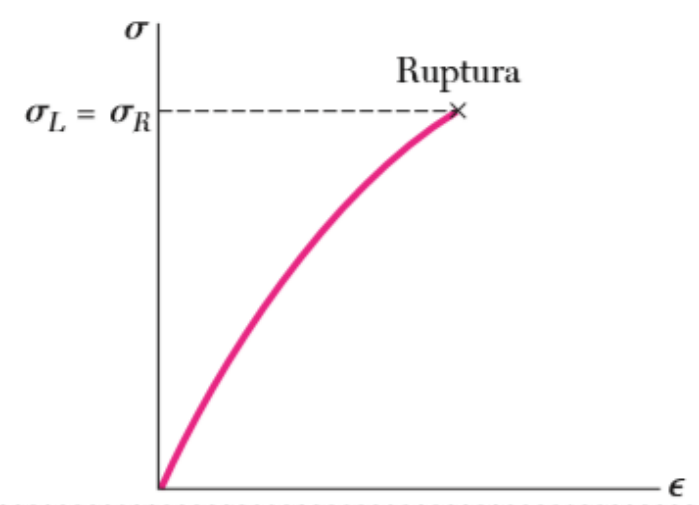


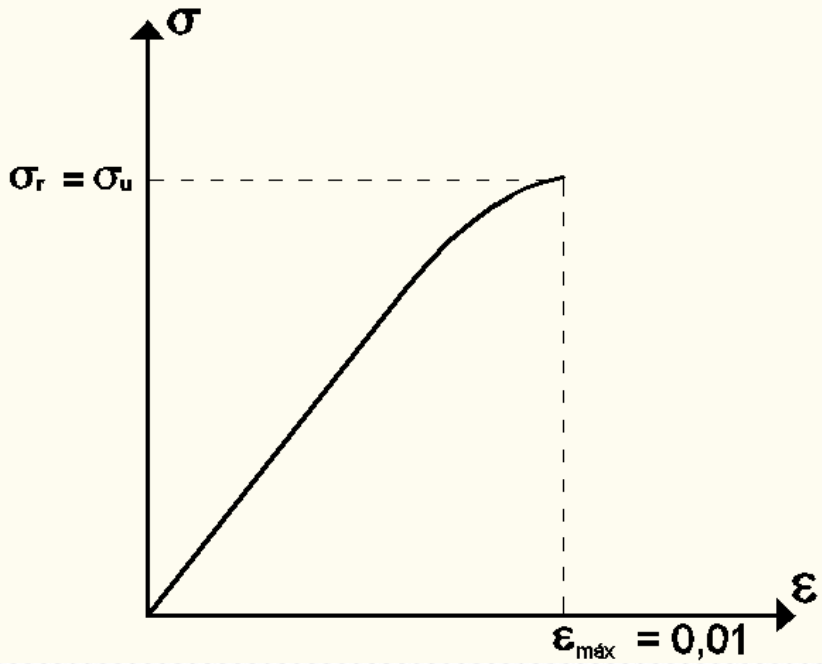
Diagrama Tensão-Deformação (σ-ε)



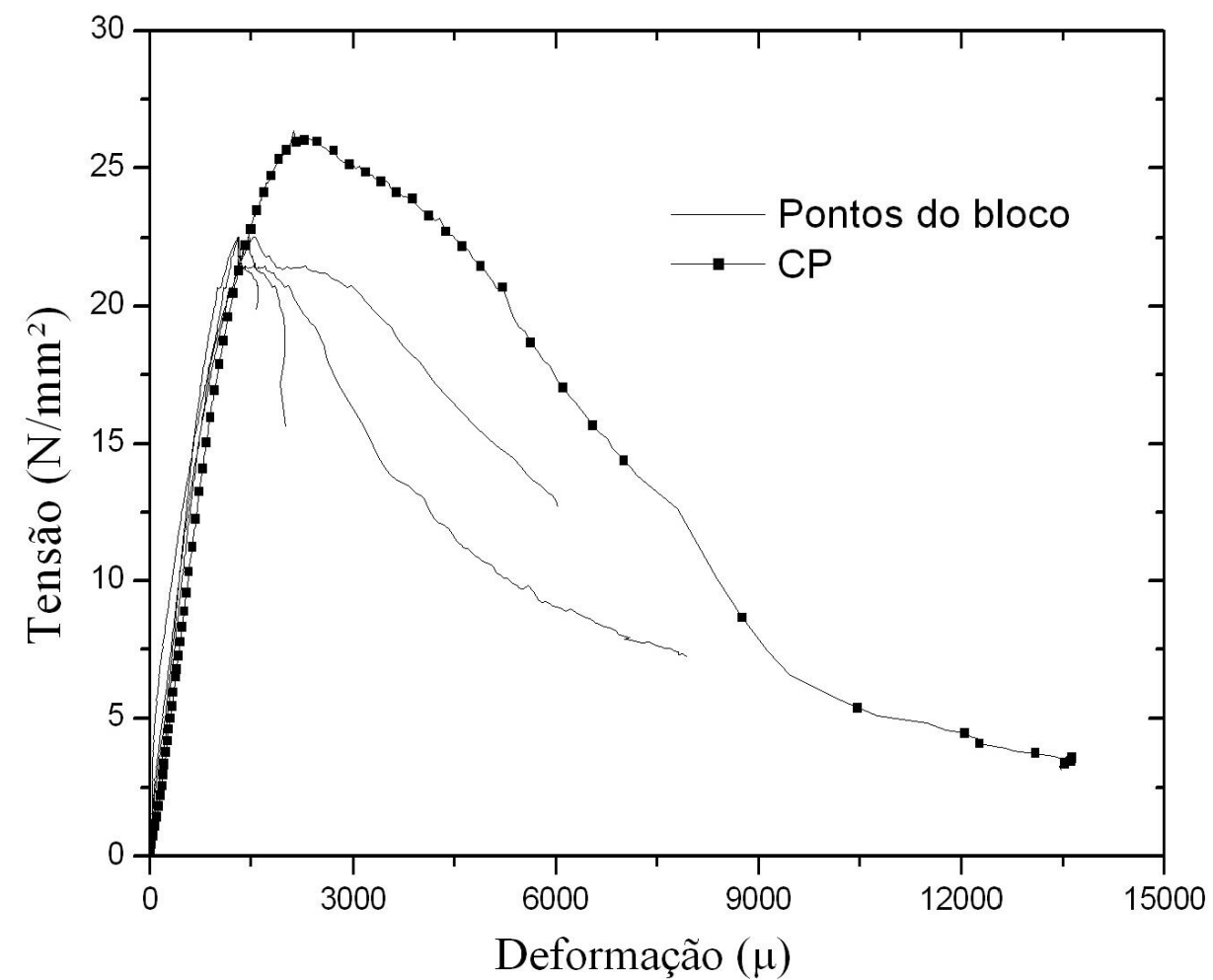
Material frágil:

- Não tem quase escoamento
- Ruptura repentina

Ex. Ferro fundido, concreto.



Ensaio real - Concreto (σ-ε)



Exemplos de materiais

Aço: E = 200 GPa

σ_u = 400 MPa

Titânio: E = 120 GPa

σ_u = 900 MPa

Alumínio: E = 70 MPa

σ_u = 110 MPa

Concreto:

E = 22 GPa

σ_u = 30 MPa (compressão)

σ_u = 3 MPa (tração)

σ_u = 900 MPa = 9.000 kgf/cm^2

Apêndice B. Propriedades típicas de materiais mais usados na engenharia[1,5]
(Unidades SI)
Continuação

Material	Densidade kg/m³	Limite de resistência: Tração, MPa	Limite de resistência: Compressão[2], MPa	Limite de resistência: Cisalhamento, MPa	Tensão de escoamento[3]: Tração, MPa	Tensão de escoamento[3]: Cisalhamento, MPa	Módulo de elasticidade, GPa	Módulo de elasticidade transversal, GPa	Coeficiente de expansão térmica, 10^{-6}/°F	Ductilidade, porcentagem de alongamento em 50 mm
Ligas de magnésio										
Liga AZ80 (forjado)	1800	345		160	250		45	16	25,2	6
Liga AZ31(extrudado)	1770	255		130	200		45	16	25,2	12
Titânio										
Liga (6% Al, 4% V)	4730	900			830		115		9,5	10
Liga Monel 400 (Ni-Cu)										
Trabalhado a frio	8830	675			585	345	180		13,9	22
Recozido	8830	550			220	125	180		13,9	46
Cobre-níquel (90% Cu, 10% Ni)										
Recozido	8940	365			110		140	52	17,1	35
Trabalhado a frio	8940	585			545		140	52	17,1	3
Madeira, seca ao ar*										
Douglas fir	470	100	50	7,6			13	0,7	Varia	
Spruce, sitka	415	60	39	7,6			10	0,5	3,0 a 4,5	
Shortleaf pine	500		50	9,7			12			
Western white pine	390		34	7,0			10			
Ponderosa pine	415	55	36	7,6			9			
White oak	690		51	13,8			12			
Red oak	660		47	12,4			12			

Ferdinand P. Beer / E. Russel Johnston, Jr. / John T. DeWolf / David F. Mazurek. MECÂNICA DOS MATERIAIS. 2008, The McGraw-Hill Companies, Inc., New York, NY, 10020

Apêndice B. Propriedades típicas de materiais mais usados na engenharia[1,5] (Unidades SI) Continuação

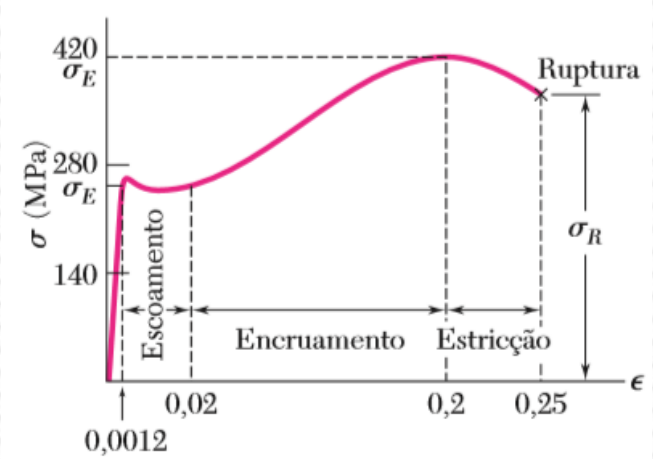
767

Material	Densidade kg/m³	Limite de resistência: Tração, MPa	Limite de resistência: Compressão[2], MPa	Limite de resistência: Cisalhamento, MPa	Tensão de escoamento[3]: Tração, MPa	Tensão de escoamento[3]: Cisalhamento, MPa	Módulo de elasticidade, GPa	Módulo de elasticidade transversal, GPa	Coeficiente de expansão térmica, 10^{-6}/°F	Ductilidade, porcentagem de alongamento em 50 mm
Concreto										
Média resistência	2320		28				25		9,9	
Alta resistência	2320		40				30		9,9	
Plásticos										
Náilon, tipo 6/6 (composto moldado)	1140	75	95		45		2,8		144	50
Policarbonato	1200	65	85		35		2,4		122	110
Poliéster PBT (termoplástico)	1340	55	75		55		2,4		135	150
Elastômero termoplástico de poliéster	1200	45		40			0,2			500
Poliestireno	1030	55	90		55		3,1		125	2
Vinil, PVC rígido	1440	40	70		45		3,1		135	40
Borracha	910	15							162	600
Granito (valores médios)	2770	20	240	35			70	4	7,2	
Mármore (valores médios)	2770	15	125	28			55	3	10,8	
Arenito (valores médios)	2300	7	85	14			40	2	9,0	
Vidro, 98% sílica	2190		50				65	4,1	80	

Ferdinand P. Beer / E. Russel Johnston, Jr. / John T. DeWolf / David F. Mazurek. MECÂNICA DOS MATERIAIS. 2008, The McGraw-Hill Companies, Inc., New York, NY, 10020

TENSÕES ADMISSÍVEIS - σ_{adm}

Tensão de segurança ou admissível.
Écomum projetar no regime elasto-linear



$$\sigma_{adm} = \overline{\sigma} = \frac{\sigma_u}{s}$$

$$\overline{\sigma}_{tração} = \frac{(\sigma_u)_{tração}}{s_t}$$

$$\overline{\sigma}_{compressão} = \frac{(\sigma_u)_{compressão}}{s_c}$$

s > 1,0 (coeficiente de segurança, normatizado)

s: associado as incertezas de projeto (ações, dimensões)

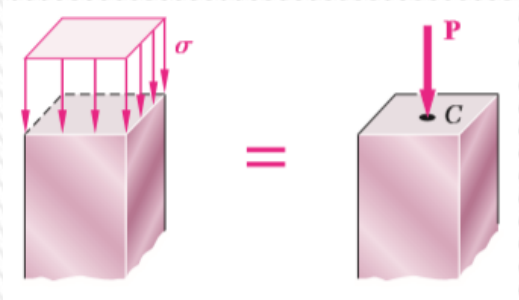
PROJETO CARGAS AXIAIS

Critério para dimensionar ou verificar a estrutura:

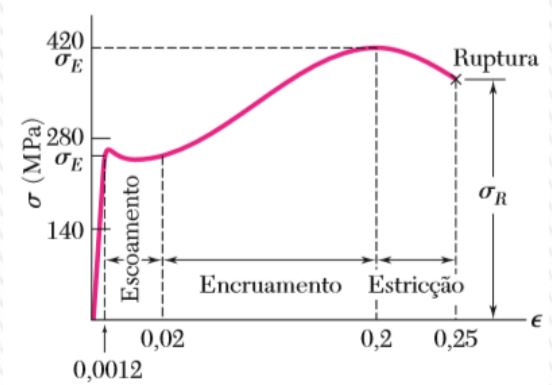
$$\max(\sigma)_{tração} \leq (\overline{\sigma})_{tração}$$

$$\max(\sigma)_{compr.} \leq (\overline{\sigma})_{compr.}$$

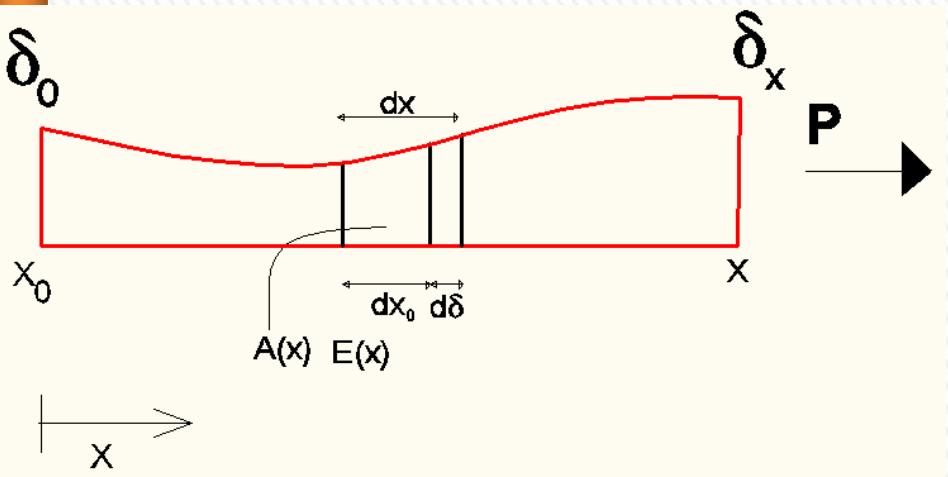
$$\sigma = \frac{N}{A}$$



$$\leqq$$



DESLOCAMENTO AXIAL



$$d\delta(x) = dx - dx_0$$

$$\varepsilon(x) = \frac{dx - dx_0}{dx_0} = \frac{d\delta}{dx_0}$$

Ou

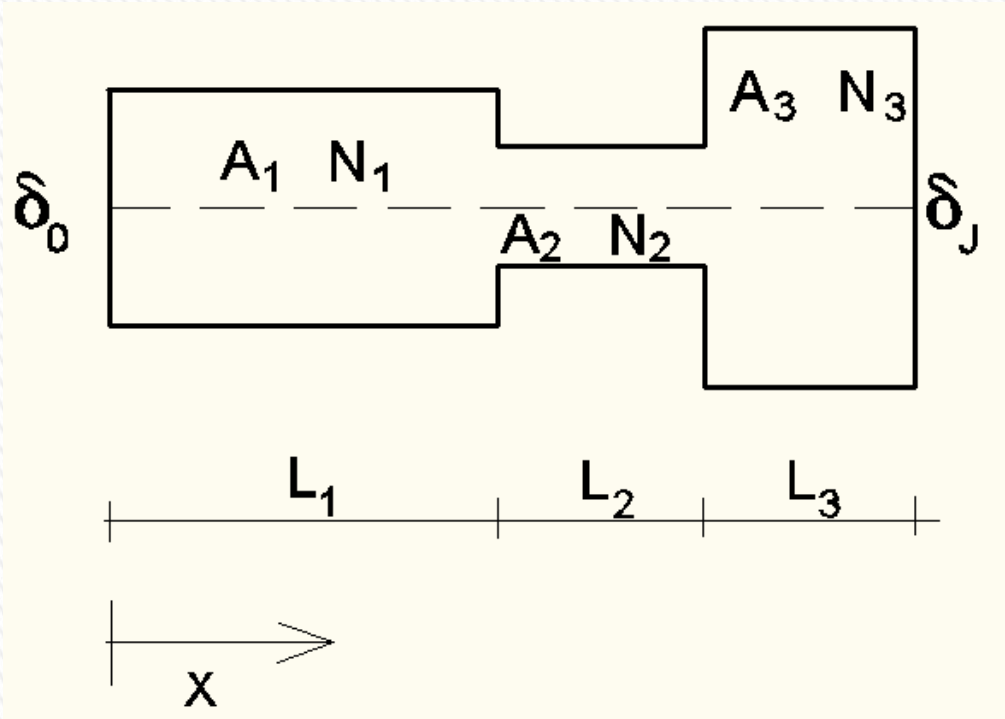
$$d\delta(x) = \varepsilon(x) \cdot dx_0 \rightarrow \delta(x) = \int_{X_0}^{X} \varepsilon(x) \cdot dx + \delta_0$$

$$\sigma(x) = E \cdot \varepsilon(x)$$

$$\delta(x) = \int_{X_0}^{X} \frac{\sigma(x)}{E} \cdot dx = \int_{X_0}^{X} \frac{N(x)}{E.A(x)} \cdot dx + \delta_0$$

DESLOCAMENTO AXIAL

Se trechos constantes, material único (E = único):



$$\delta_j = \delta_0 + \sum_{i=1}^{3} \frac{N_i \cdot L_i}{A_i \cdot E}$$

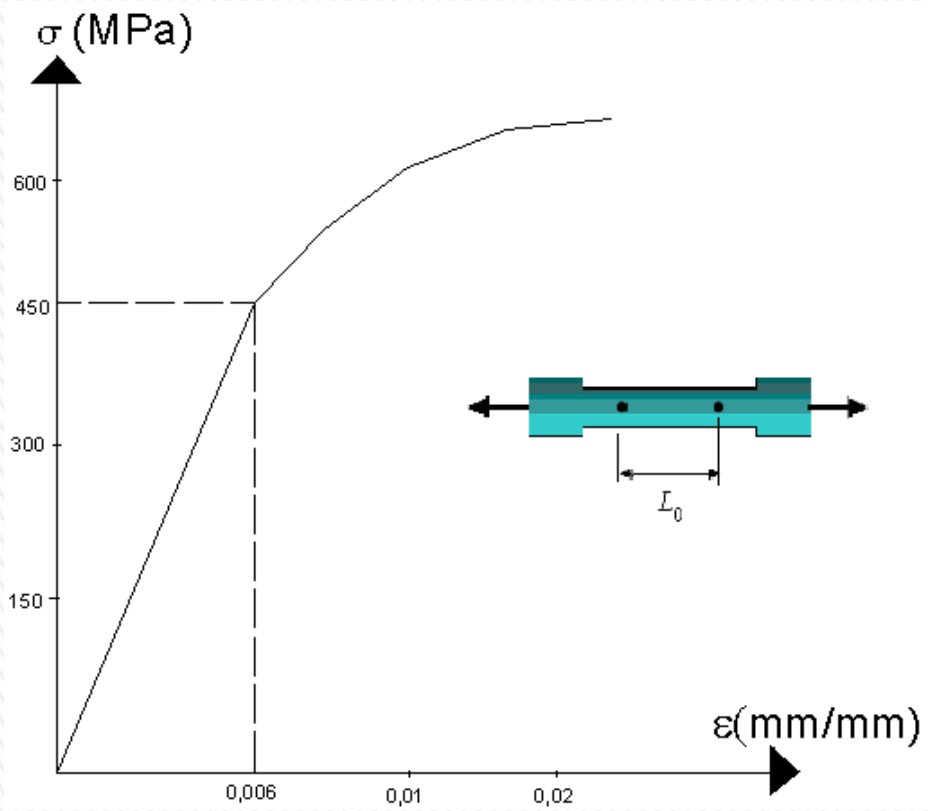
Exemplo 1)

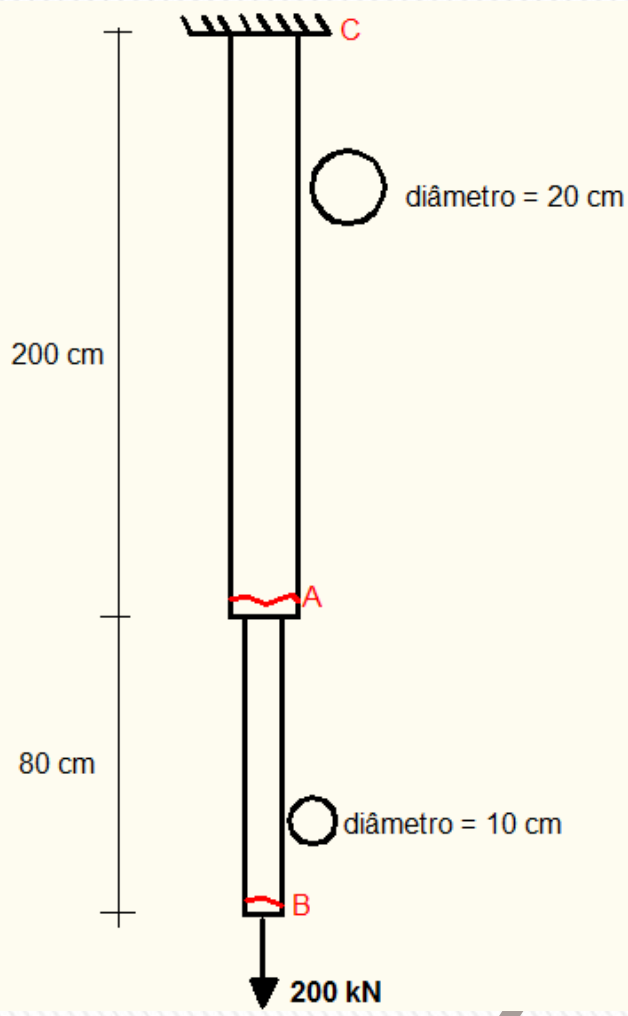
Calcule:

a) diagrama de esforços

b) tensão nas seções A e B

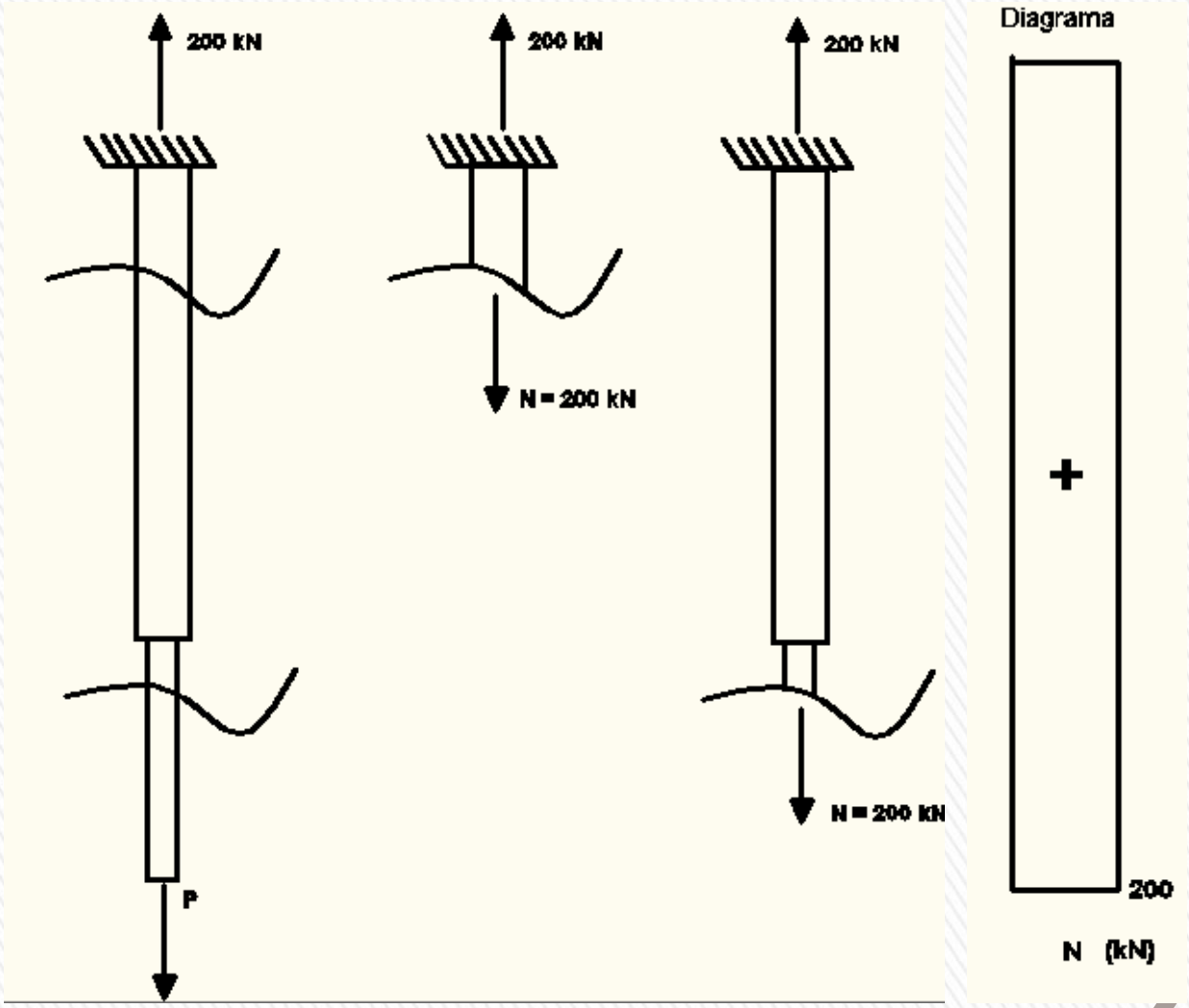
c) alongamento sofrido na seção A





Exemplo 1)

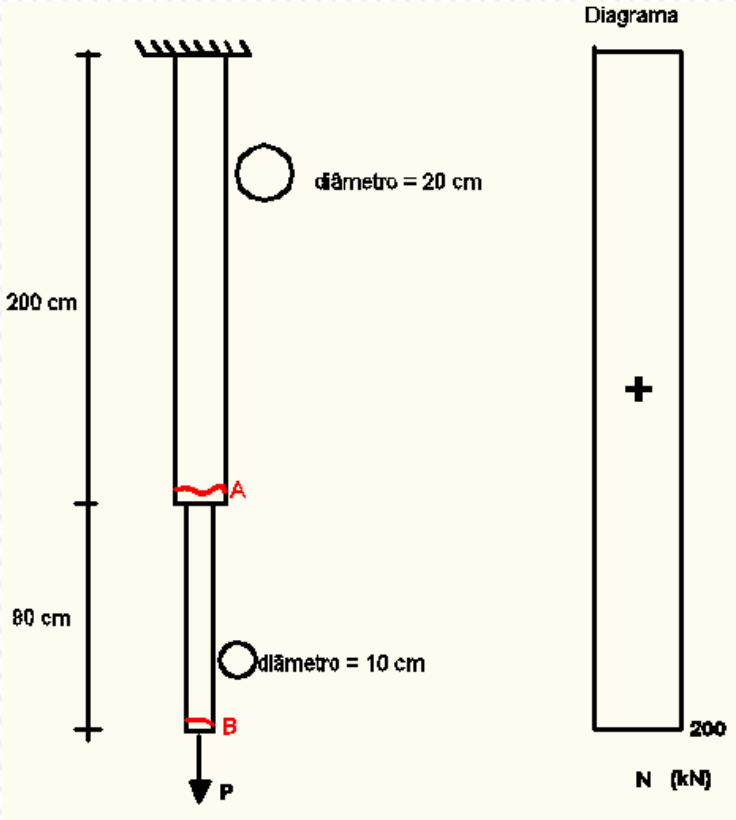
a) dia*gra*ma
de esforços



Exemplo 1)

a) diagrama de esforços

b) Tensões em A e B



trecho do engaste até seção A:

$$A = \frac{\pi \cdot d^2}{4} = \frac{\pi \cdot 0{,}2^2}{4} = 0{,}0314 \ m^2$$

$$\sigma_A = \frac{F}{A} = \frac{200}{0{,}0314} = 6{,}3662 \cdot 10^3 \ kPa = 6{,}36 \ MPa$$

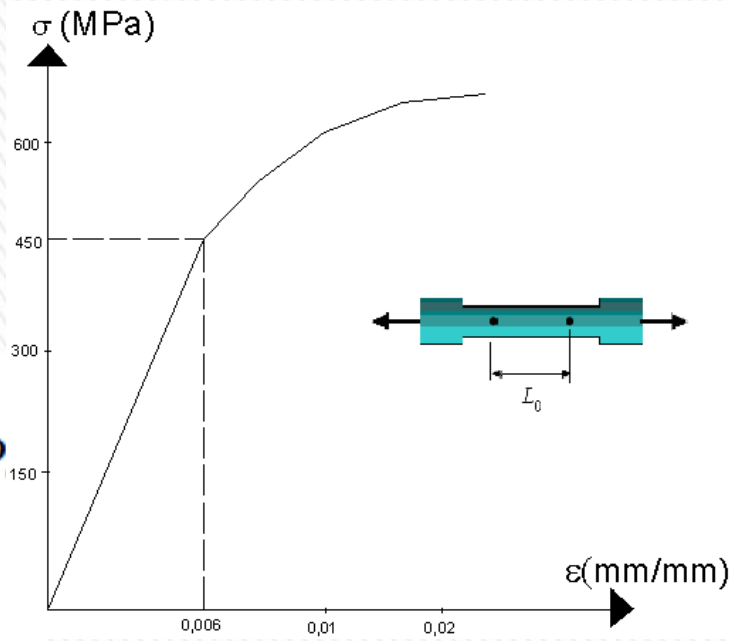
trecho da após seção A até seção B

$$A = \frac{\pi \cdot d^2}{4} = \frac{\pi \cdot 0{,}1^2}{4} = 0{,}007854 \ m^2$$

$$\sigma_B = \frac{F}{A} = \frac{200}{0{,}0079} = 25{,}4650 \cdot 10^3 \ kPa = 25{,}46 \ MPa$$

Exemplo 1)

c) Alongamento em A:

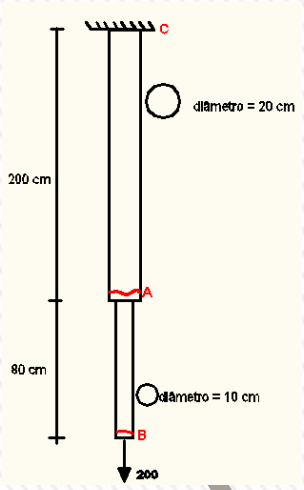


$$E = \frac{\sigma}{\varepsilon} = \frac{450}{0{,}006} = 75000 \ \ MPa = 75.10^6 \, kP$$

$$\delta_A = \delta_C + \frac{N_{CA} \cdot L_{CA}}{A_{CA} \cdot E}$$

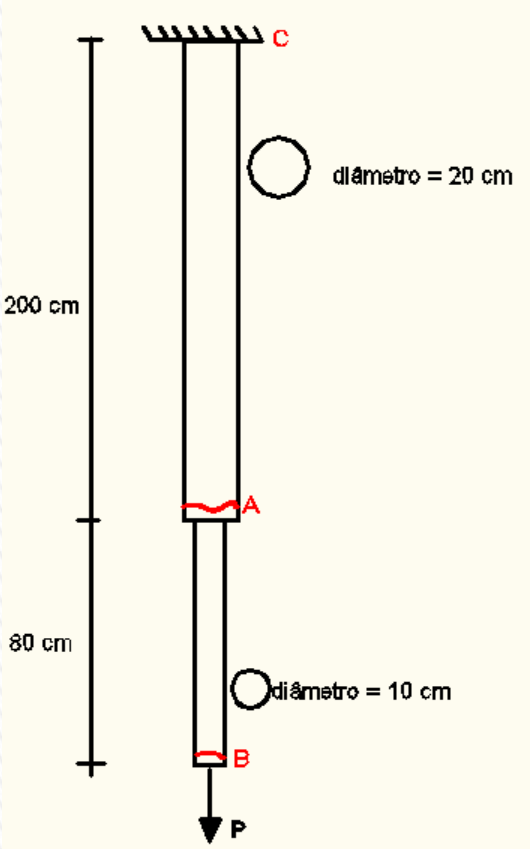
Portanto:

$$\delta_A = 0 + \frac{200 \cdot 2}{0{,}0314 \cdot 75.10^6} = 0{,}17 \cdot 10^{-3} \, m = 0{,}17 \ \ mm$$



Exemplo 2)

Qual a maior força P que pode ser aplicada para que nenhum trecho fique fora do trecho linear (elástico linear)?



Cálculo de tensão entre C e A:

$$\sigma_{CA} = \frac{P}{A} = \frac{P}{0.0314} \leq 450 \ \ MPa \rightarrow P \leq 450 \cdot 0{,}0314 \rightarrow P \leq 14.130 \ \ kN$$

Cálculo de tensão entre A e B:

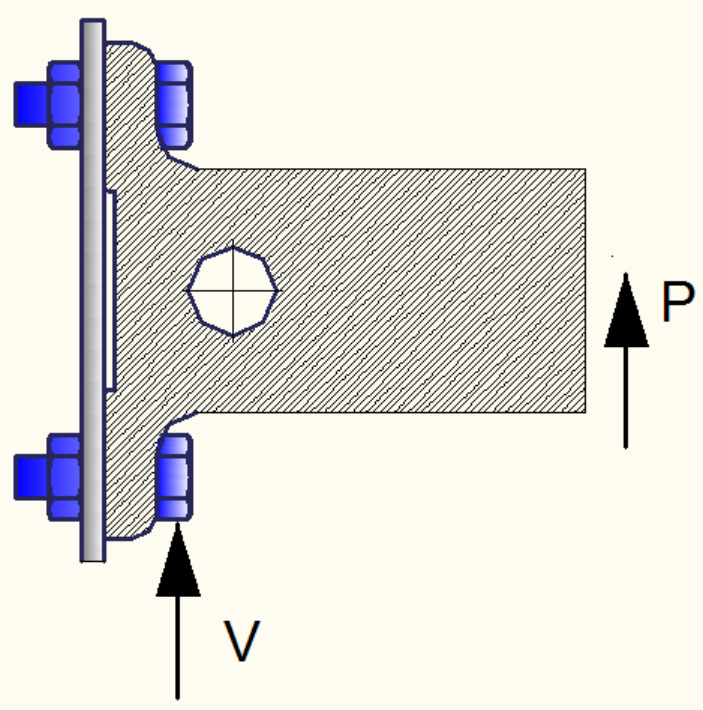
$$\sigma_{AB} = \frac{P}{A} = \frac{P}{0{,}007854} \leq 450 \ \ MPa \rightarrow P \leq 450 \cdot 0{,}007854 \rightarrow P \leq 3.534{,}3 \ \ kN$$

$$P_{\max} = 3.534{,}3 \ \ kN$$

CISALHAMENTO PURO

Suponha ação que gere apenas força cortante.

Ex. Ligações parafusadas



Força cortante V age no parafuso

Supondo tensões normais desprezíveis

CISALHAMENTO PURO

Admitindo:

- V suficiente grande
- apoios rígidos

aprox.

$$\tau_{médio} = \frac{V}{A}$$

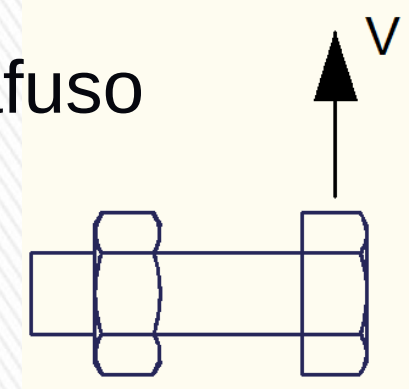
Normas permitem sua aplicação em:

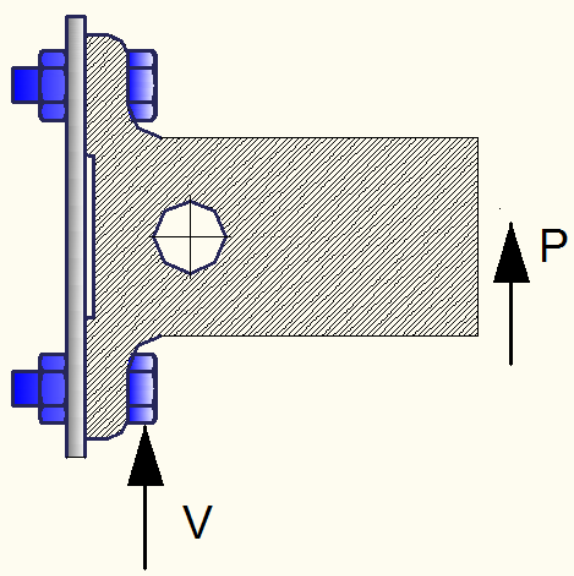
- conexões
- ligações parafusadas e rebitadas

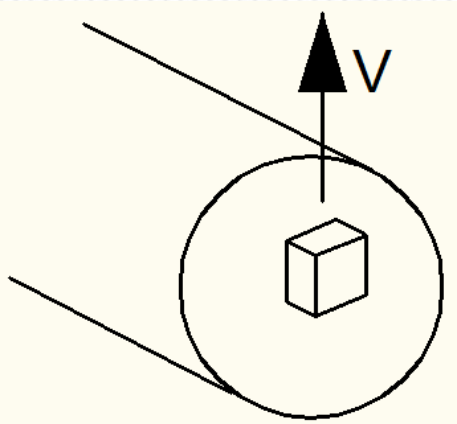
CISALHAMENTO PURO

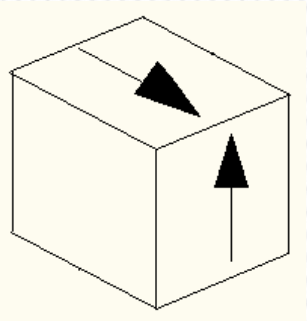
No parafuso tem a força cortante V

Tome um elemento infinitesimal no parafuso



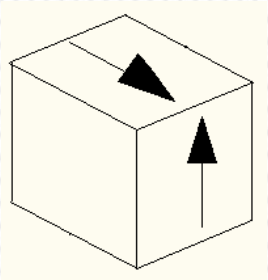


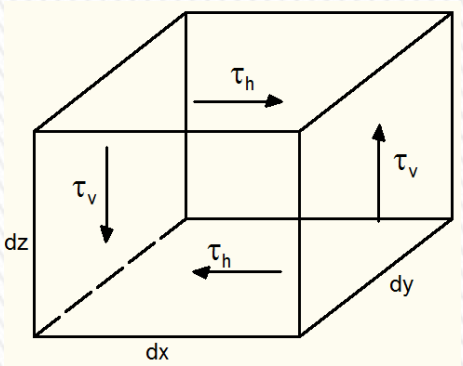


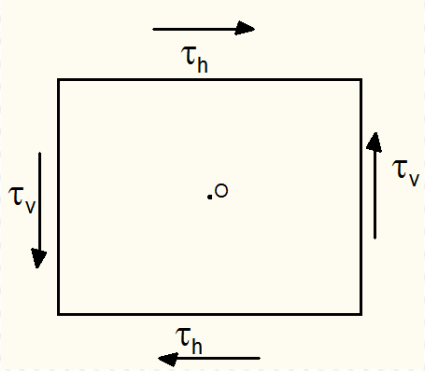


TENSÃO CISALHANTE - τ

Simetria das tensões cisalhantes, por equilíbrio:







$$\sum M_o = 0$$

$$\tau_h \cdot (dz \cdot dx) \cdot dy = \tau_v \cdot (dz \cdot dy) \cdot dx \rightarrow \tau_h = \tau_v$$

DEFORMAÇÃO ANGULAR - γ

As tensões cisalhantes distorcem o elemento

Define-se a distorção angular (deformação angular)

<u>Deformação angular</u>: Redução do ângulo (orig. reto) do elemento

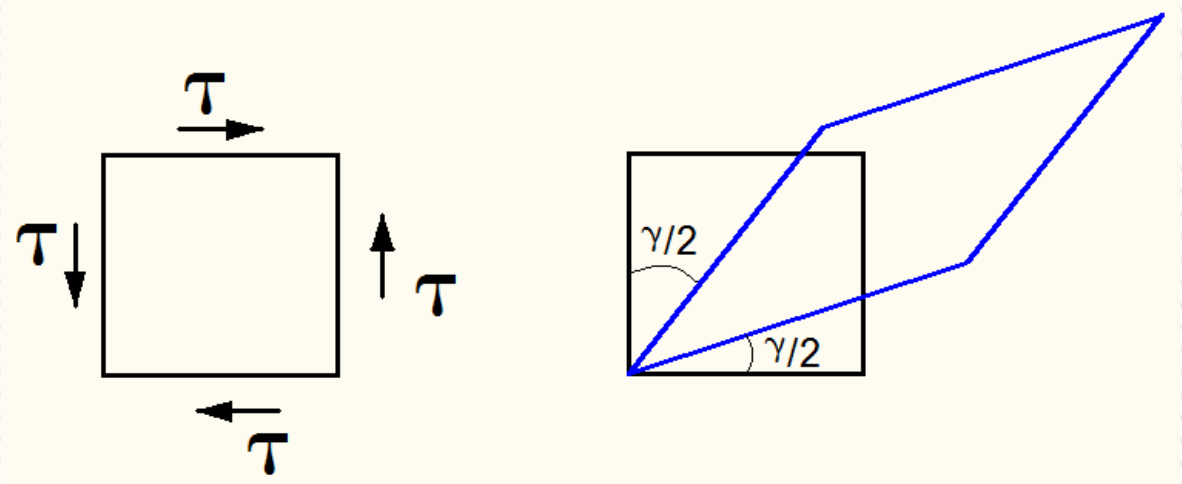
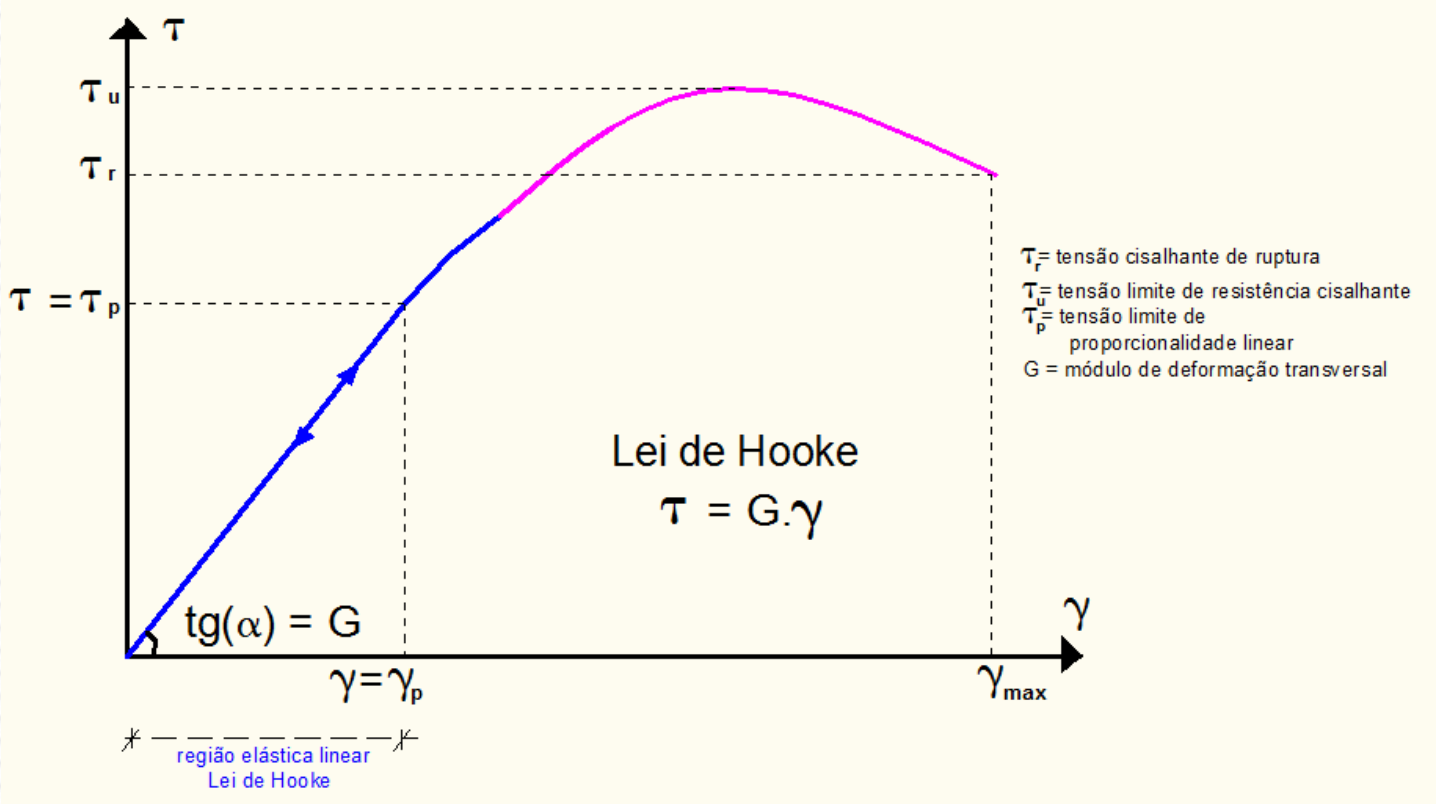


Diagrama Tensão - Deformação Angular (τ -γ)

Ensaio de corpo de prova



Exemplos de materiais

Trecho Elástico-Linear

$$\tau = G.\gamma$$

Aço Estrutural: G = 75 GPa

τ_e = 150 MPa

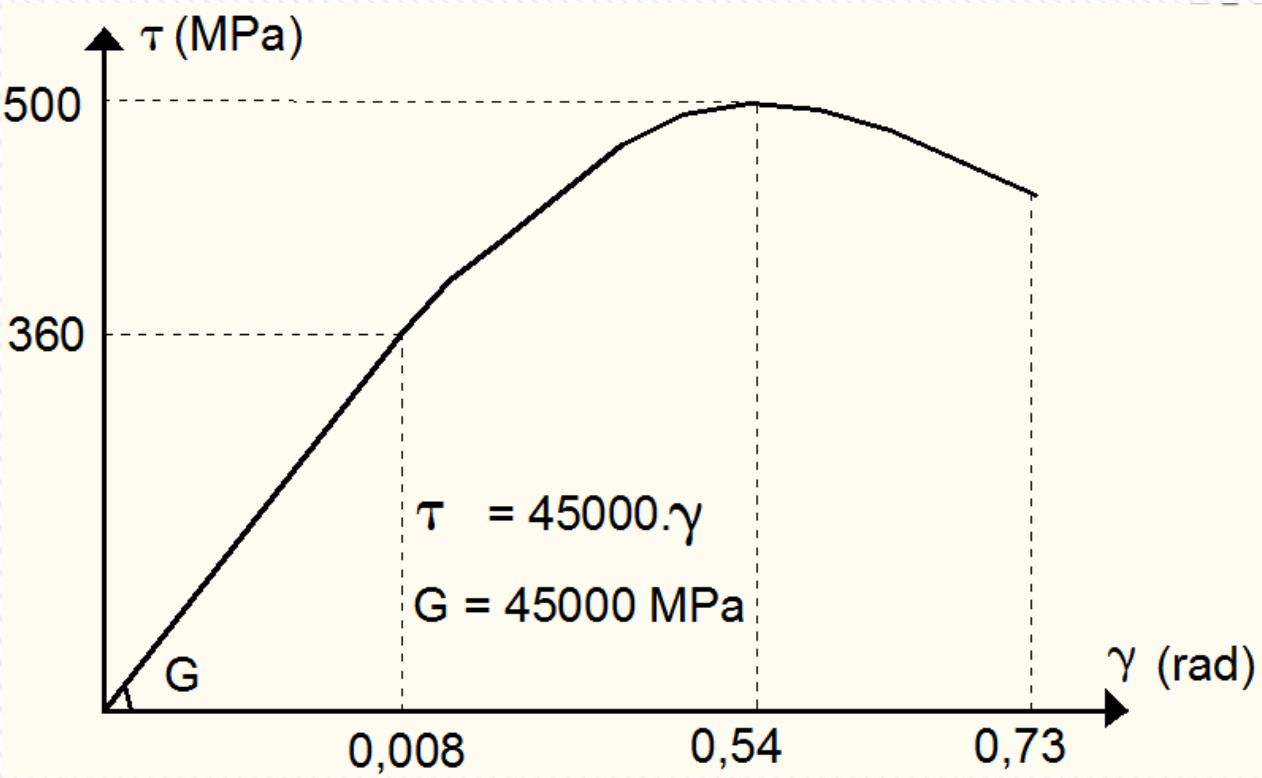
Alumínio: G = 75 GPa

τ_e = 26 MPa

Diagrama Tensão - Deformação Angular (τ -γ)

Exemplo:

Liga de Titânio



TENSÕES ADMISSÍVEIS - τ_{adm}

Tensão de segurança ou admissível:
é comum projetar no regime elásto - linear

$$\tau_{adm} = \bar{\tau} = \frac{\tau_u}{s}$$

s > 1,0 (coeficiente de segurança, normatizado)

s: associado as incertezas de projeto (ações, dimensões)

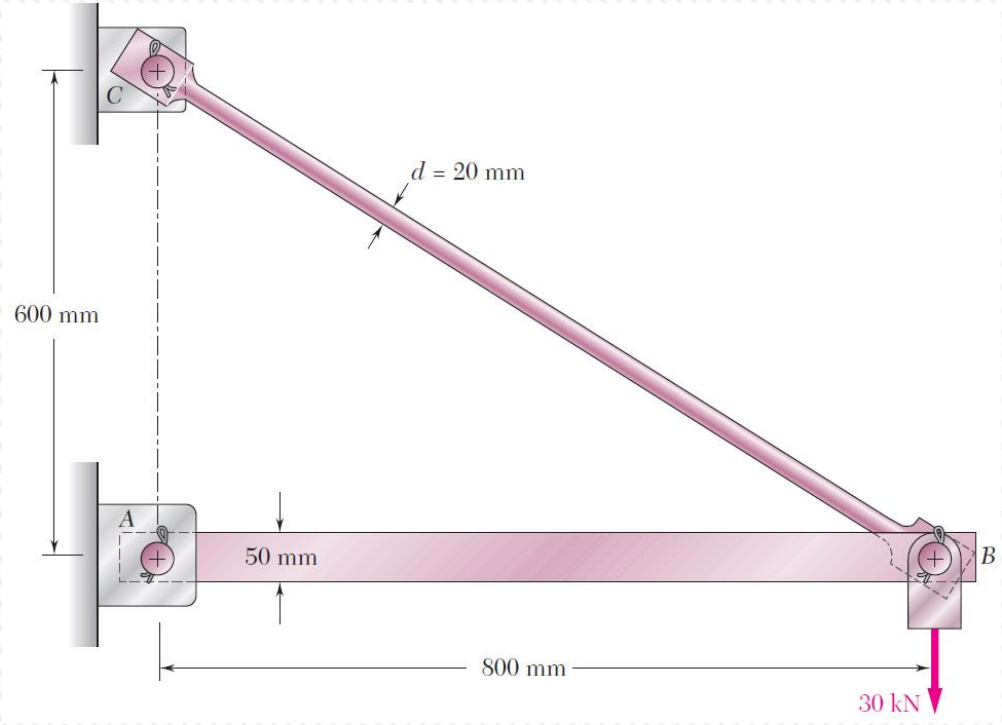
Critério para dimensionar ou verificar a ligação:

$$\max(\tau) \leq \bar{\tau}$$

Exemplo 3)

Determinar:

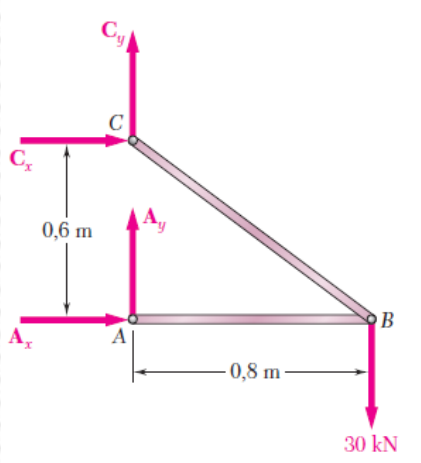
a) Reações e esforços da treliça;
b) Tensões cisalhantes nas conexões A e C;
c) Tensões normais nas barras AB e BC.



Fonte: Estática e mecânica dos materiais. Autores: Ferdinand P. Beer; E. Russell Johnston Jr. 2013

Exemplo 3)

a) Calcular reações e esforços:



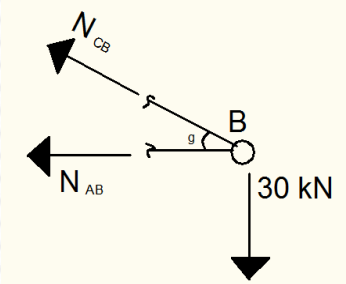
$+\circlearrowleft \Sigma M_C = 0:$ $\quad A_x(0{,}6\text{ m}) - (30\text{ kN})(0{,}8\text{ m}) = 0$

$A_x = +40\text{ kN}$

$\xrightarrow{+} \Sigma F_x = 0:$ $\quad A_x + C_x = 0$

$C_x = -A_x \qquad C_x = -40\text{ kN}$

Equilíbrio nó B



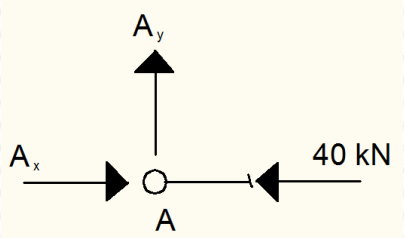
$$\sum F_y = 0:\ N_{CB} \cdot sen(g) - 30 = 0 \rightarrow N_{CB} = 30/0{,}6 = 50\ \ kN \text{ (tração)}$$

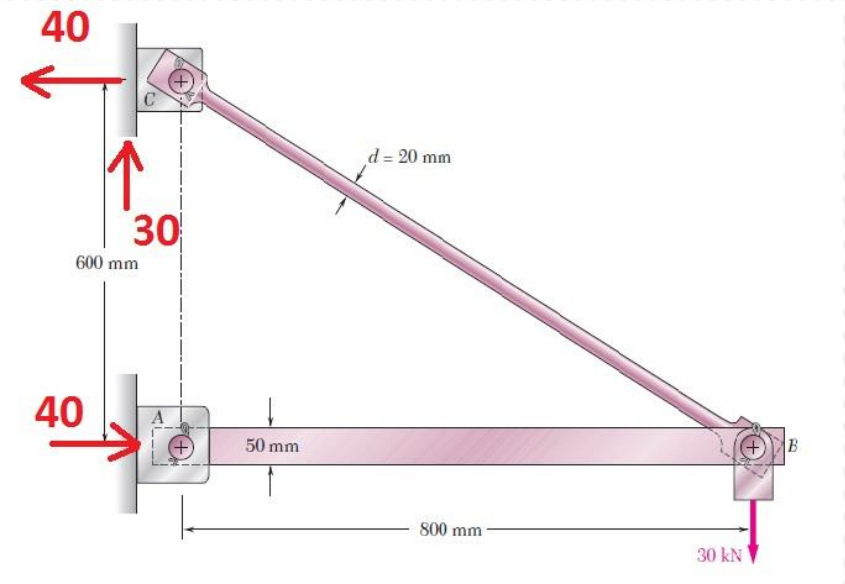
$$\sum F_x = 0:\ N_{AB} + N_{CB} \cdot \cos(g) = 0 \rightarrow N_{AB} = -40\ \ kN \text{ (compressão)}$$

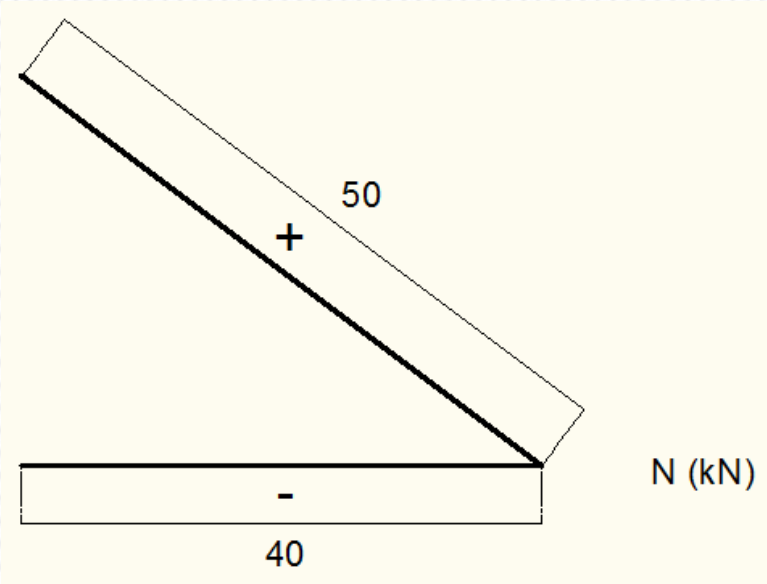
Exemplo 3)

Equilíbrio nó A

$$\sum F_y = 0 : A_y = 0 \rightarrow C_y = 30 \ kN$$





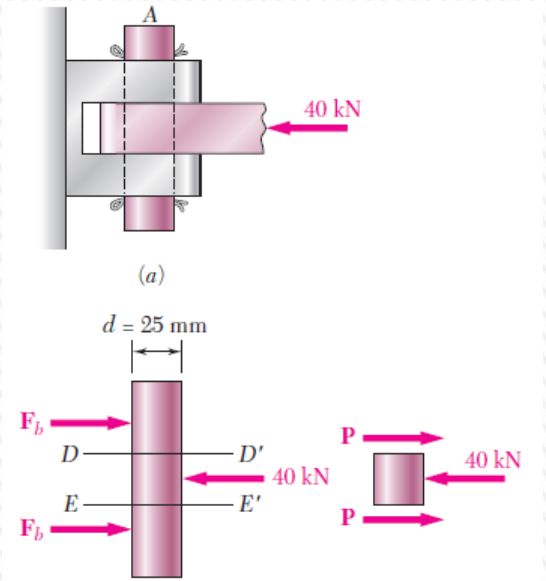


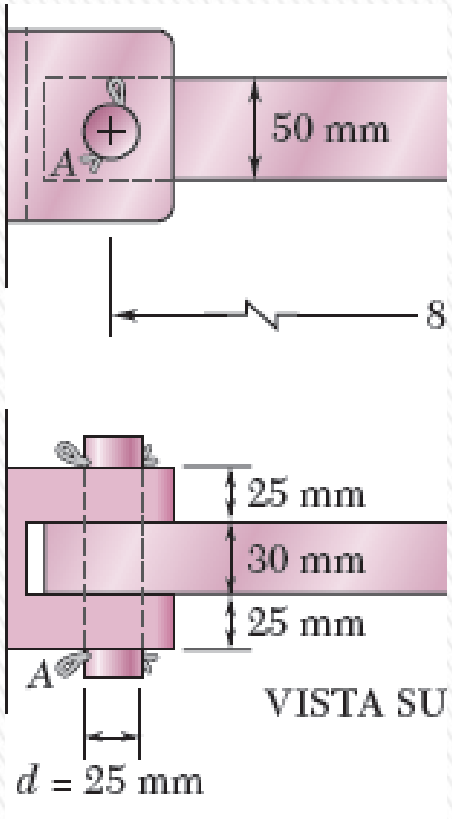
Exemplo 3)

b1) Tensão cisalhante na conexão em A

$$A = \pi r^2 = \pi\left(\frac{25\text{ mm}}{2}\right)^2 = \pi(12{,}5 \times 10^{-3}\text{ m})^2 = 491 \times 10^{-6}\text{ m}^2$$

$$\tau_{\text{méd}} = \frac{P}{A} = \frac{20\text{ kN}}{491 \times 10^{-6}\text{ m}^2} = 40{,}7\text{ MPa}$$

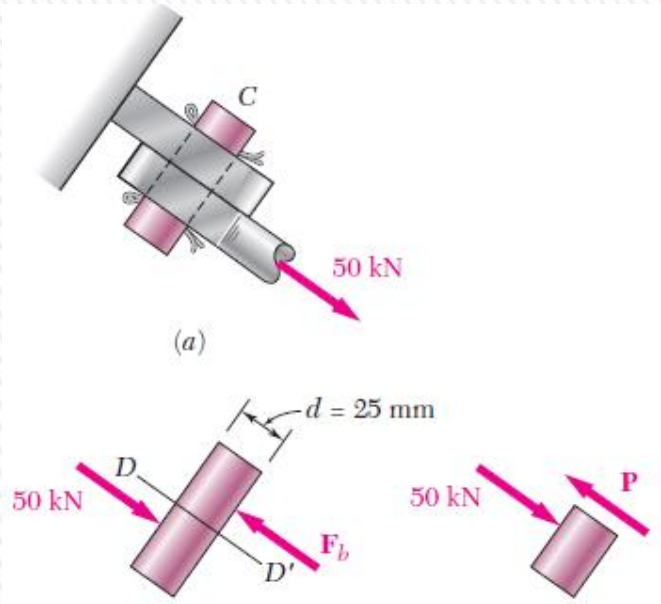


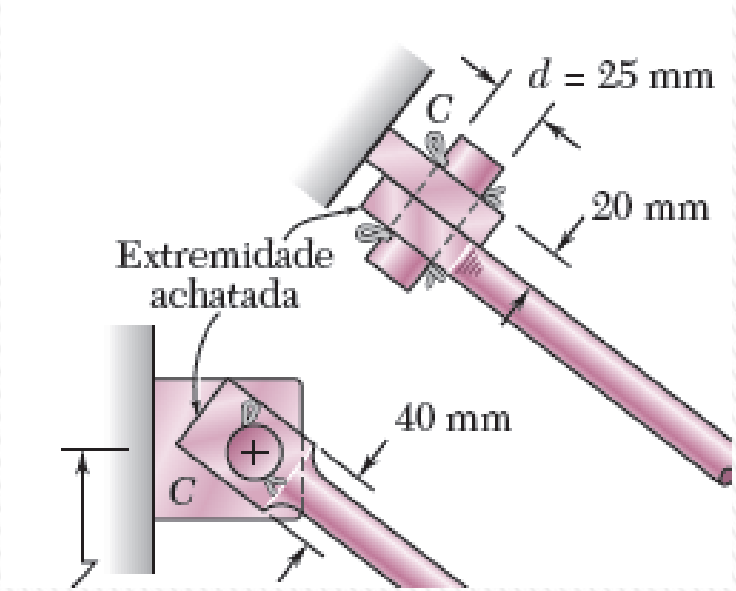


Exemplo 3)

b2) Tensão cisalhante na conexão em C

$$A = \pi r^2 = \pi\left(\frac{25\text{ mm}}{2}\right)^2 = \pi(12{,}5 \times 10^{-3}\text{ m})^2 = 491 \times 10^{-6}\text{ m}^2$$





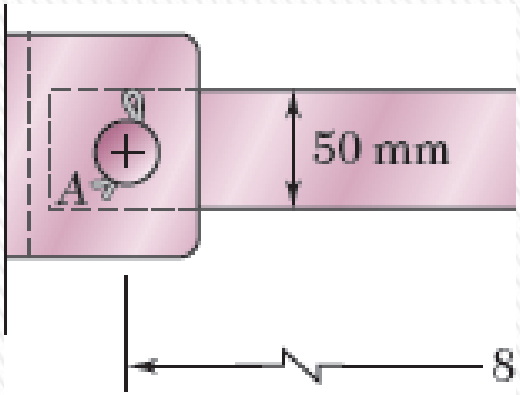
$$\tau_{\text{méd}} = \frac{P}{A} = \frac{50 \times 10^3\text{ N}}{491 \times 10^{-6}\text{ m}^2} = 102{,}0\text{ MPa}$$

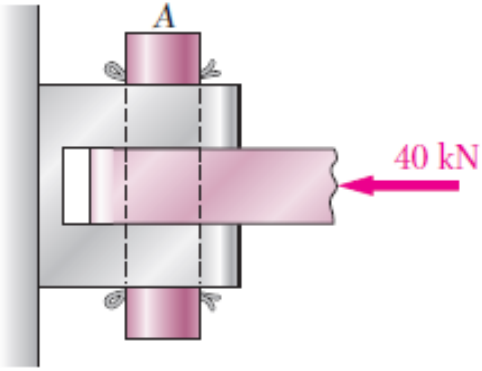
Exemplo 3)

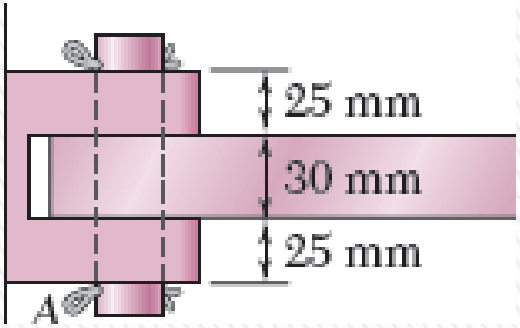
c1) Tensão normal na barra AB

$$A_{AB} = 30 \cdot 50 = 1500 \ mm^2 = 1{,}5.10^{-3} \, m^2$$

$$\sigma_{AB} = -\frac{40 \times 10^3 \text{ N}}{1{,}5 \times 10^{-3} \text{ m}^2} = -26{,}7 \times 10^6 \text{ Pa} = -26{,}7 \text{ MPa}$$

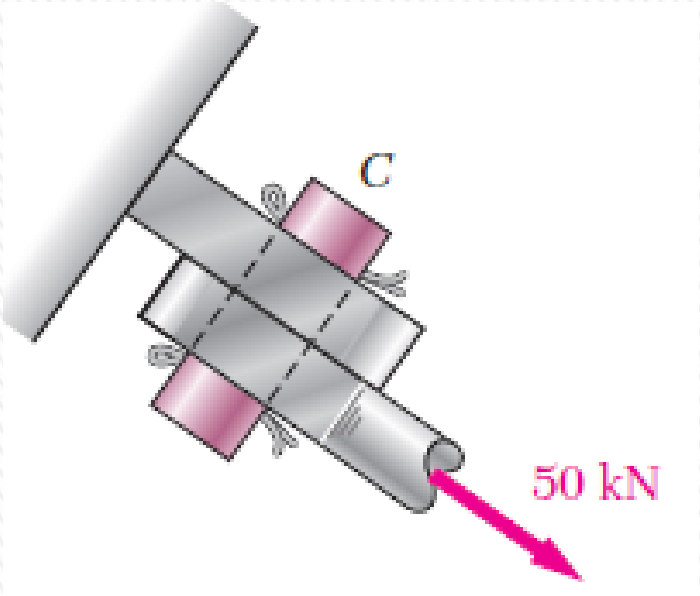
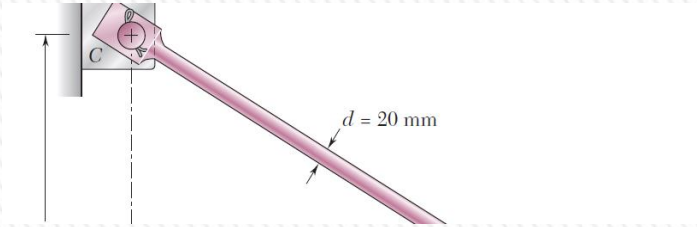






Exemplo 3)

c2) Tensão normal na barra BC

$$A_{BC} = \pi \cdot \left(\frac{20}{2}\right)^2 = 314{,}16\ mm^2 = 3{,}14.10^{-4}\, m^2$$

$$\sigma_{BC} = \frac{50\ kN}{3{,}14.10^{-4}\, m^2} = 159.154{,}6\ kPa = 159{,}1\ MPa$$