PEF 3307

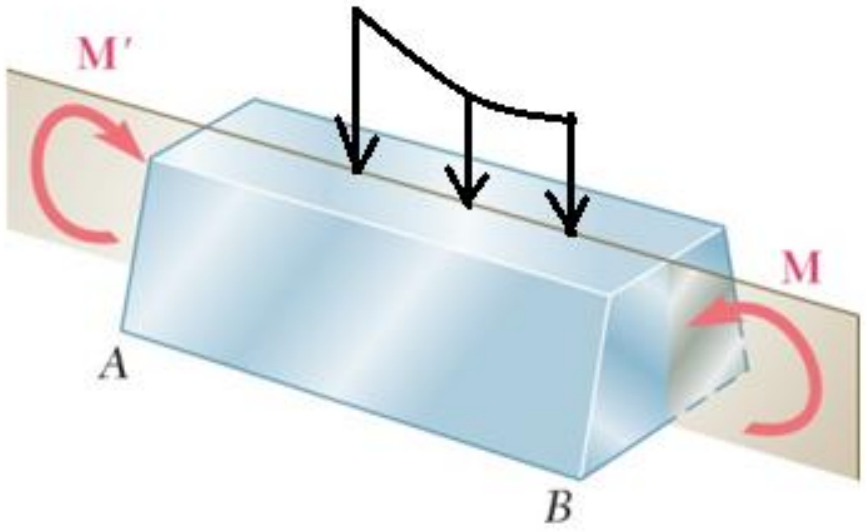
FLEXÃO PURA

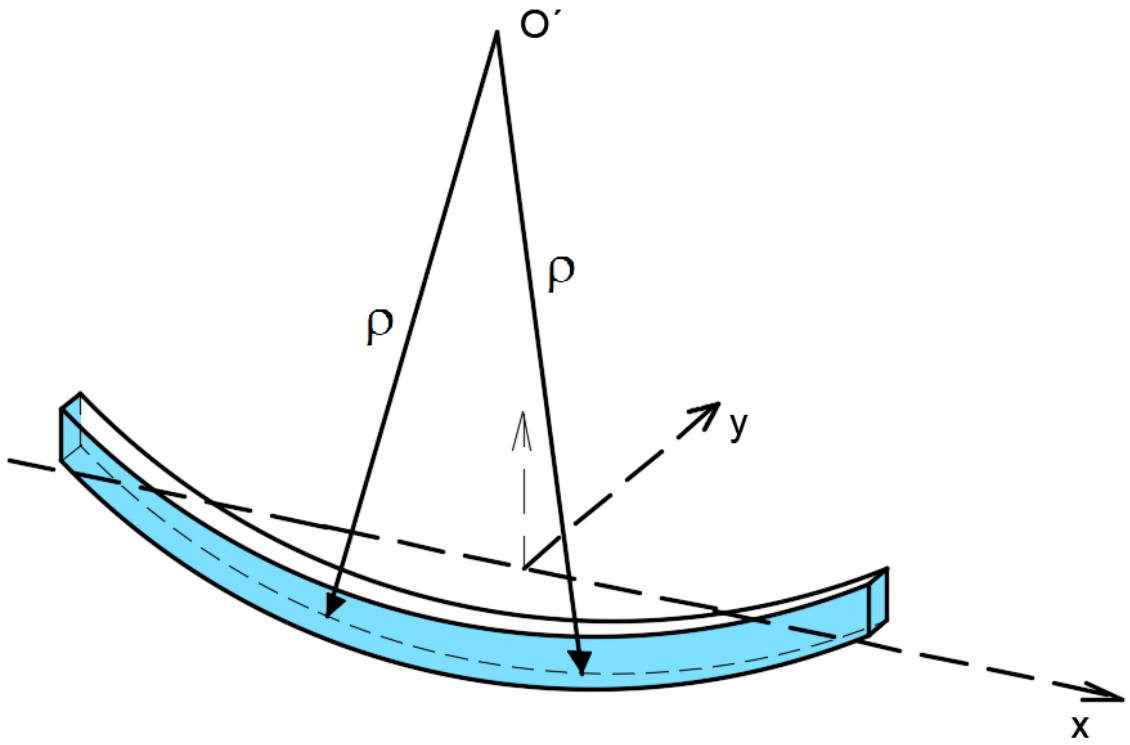
Teoria de vigas

Vigas: Elementos prismáticos

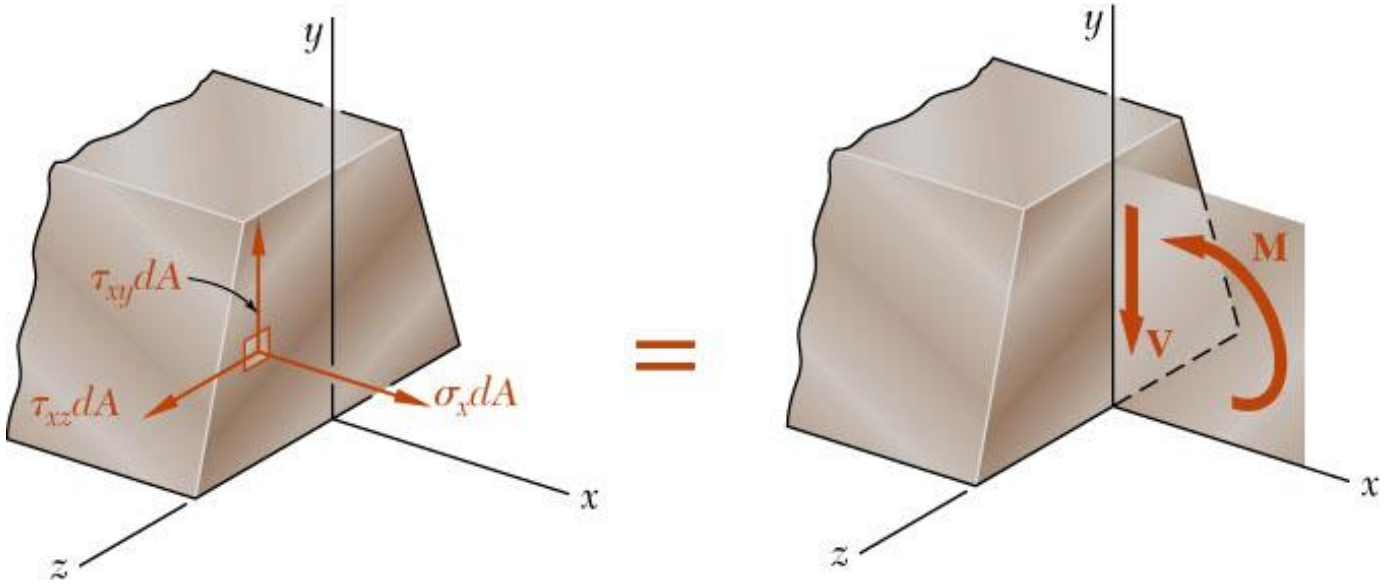
Sujeitos a carregamentos perpendiculares ao seu eixo. Flexão

Flexão: Mudança de curvatura ($\kappa = 1/\rho$) do eixo





Tipos de solicitações em barras



- **Flexão**

  Pura (normal, oblíqua)

  Simples

  Composta

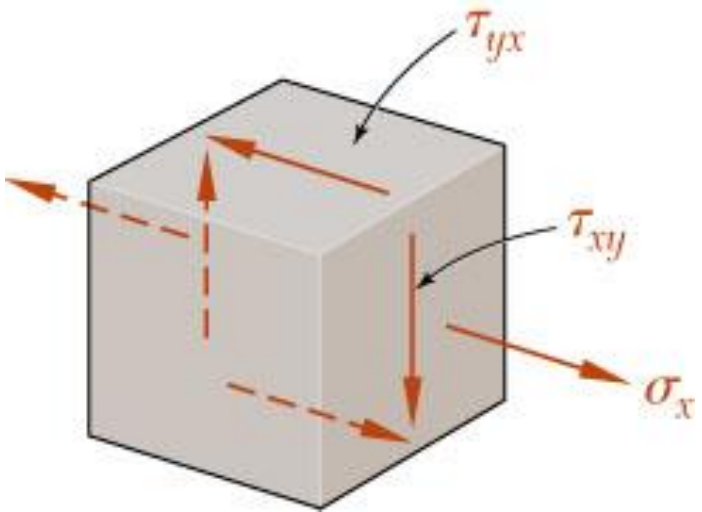
  Geral

Flexão simples:

$$F_x = \int \sigma_x dA = 0 \qquad M_x = \int \left(y\tau_{xz} - z\tau_{xy}\right) dA = 0$$

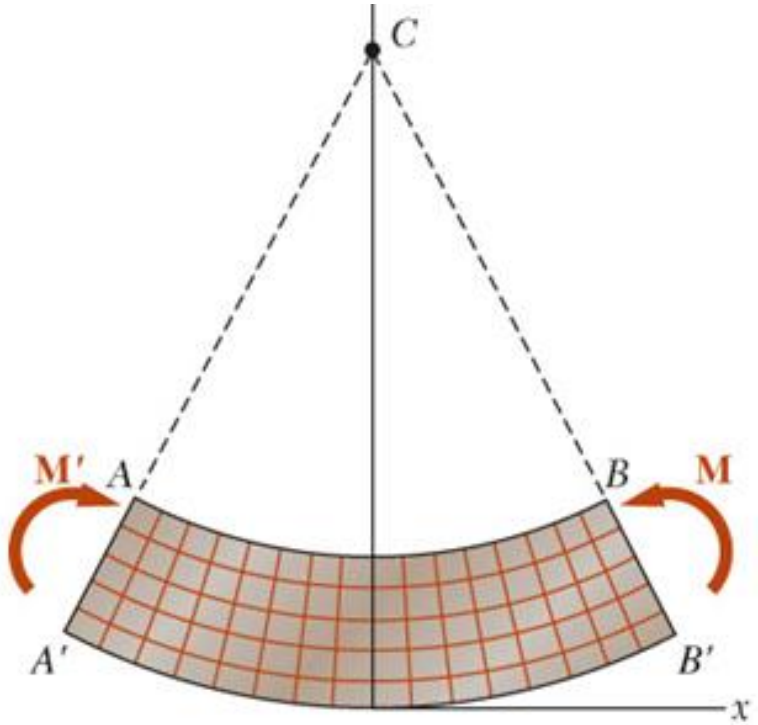
$$F_y = \int \tau_{xy} dA = -V \qquad M_y = \int z\sigma_x dA = 0$$

$$F_z = \int \tau_{xz} dA = 0 \qquad M_z = \int \left(-y\sigma_x\right) = M$$

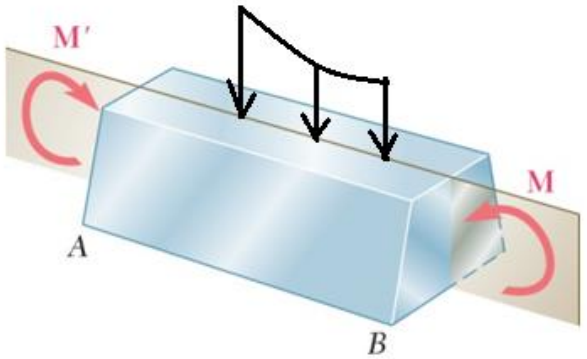


Teoria de vigas - Hipóteses

- Carregamentos estaticamente aplicados;
- Conservação da planicidade original das ST (durante o processo de deformação);

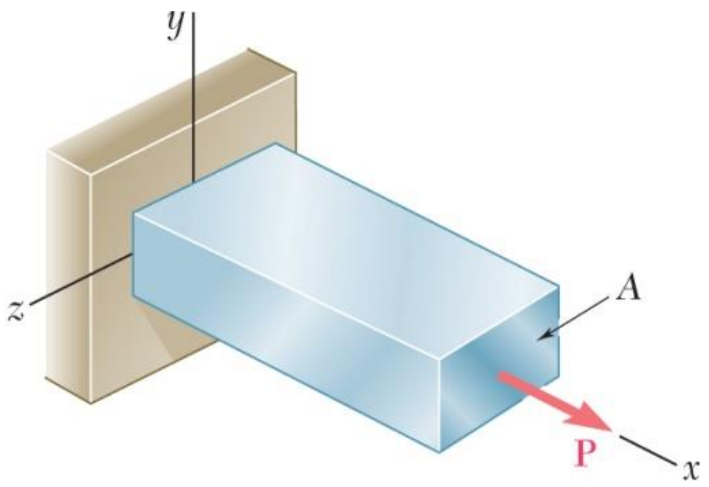


- Campos pequenos (suaves) de deslocamentos e deformações;
- Flexão em um dos eixos principais de inércia.

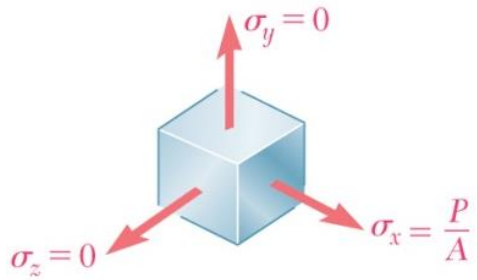


*ST: seção transversal

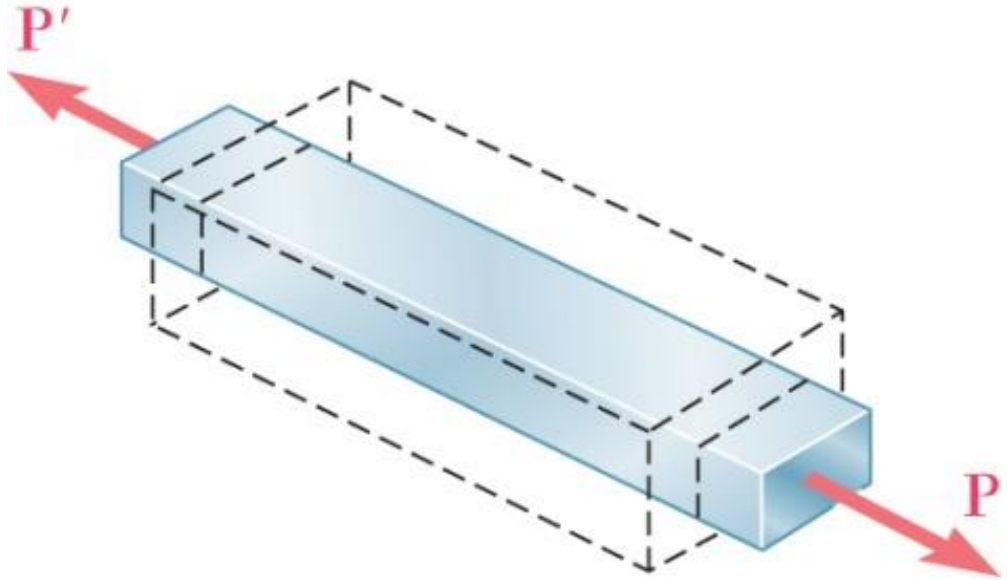
Coeficiente de Poisson



Para o corpo sujeito a força axial em x: $\varepsilon_x = \dfrac{\sigma_x}{E} \quad \sigma_y = \sigma_z = 0$



Mede-se que: $(\varepsilon_y = \varepsilon_z) \neq 0$



Coeficiente de Poisson (ν):

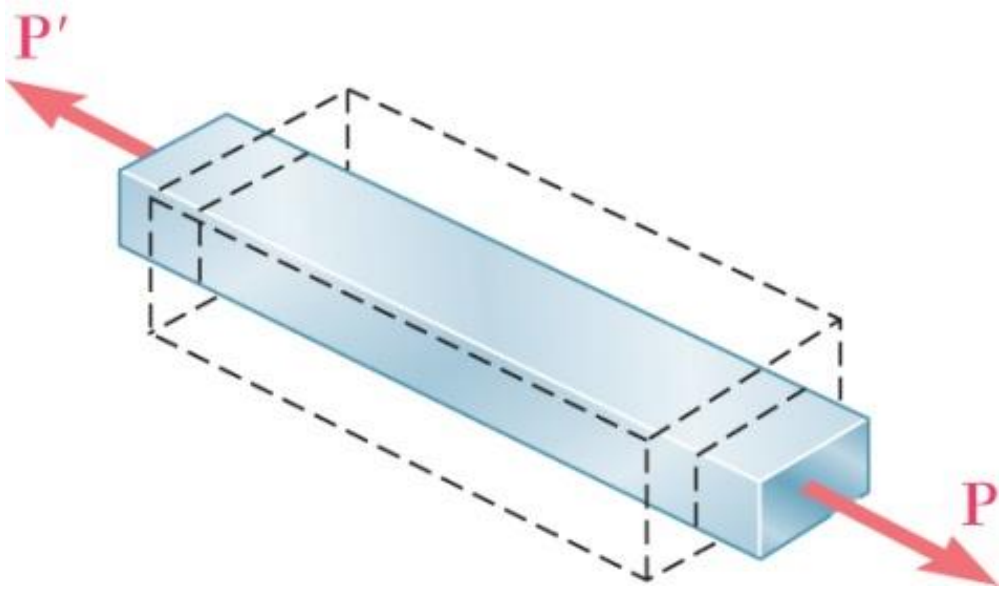
$$\nu = \left| \frac{\text{deformacao especifica lateral}}{\text{deformacao especifica axial}} \right| = -\frac{\varepsilon_y}{\varepsilon_x} = -\frac{\varepsilon_z}{\varepsilon_x}$$

Por exemplo: $\nu = 0{,}2$

Teoria de vigas - Hipóteses

- Deformações transversais da ST desprezados

(supressão do efeito de Poisson);



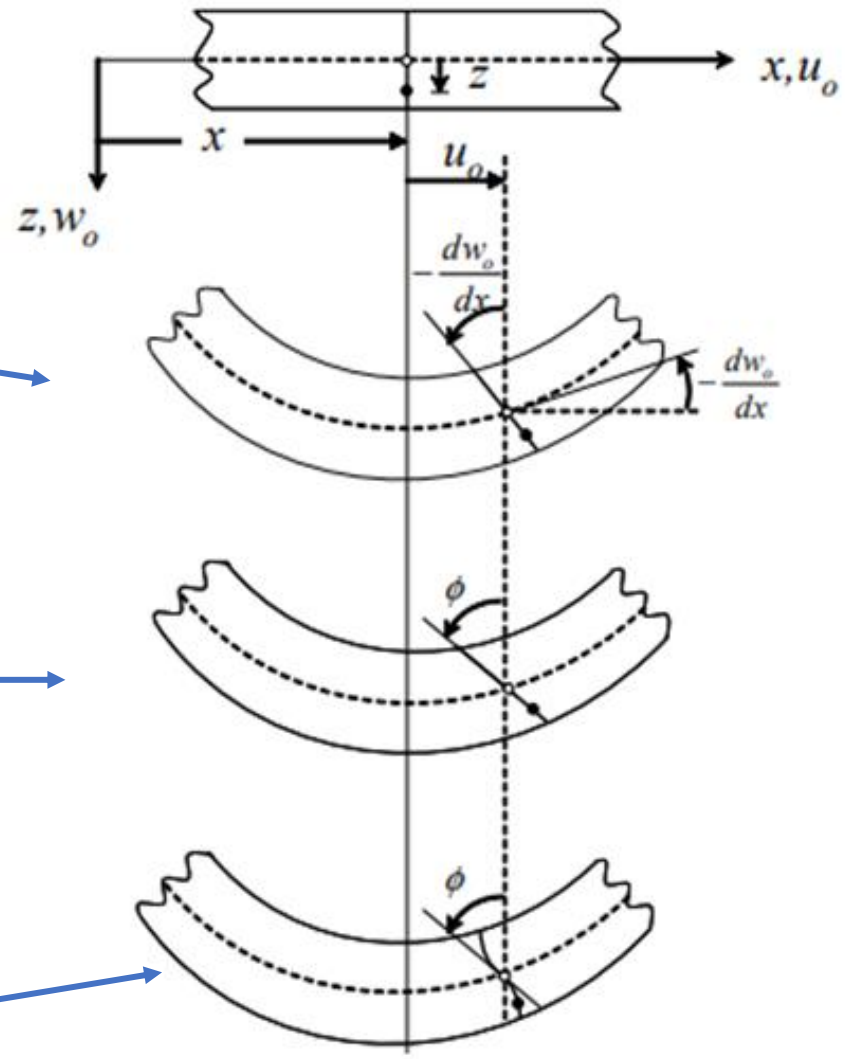
$$Considera-se, por\ hipótese:\ \nu = 0$$

Teoria de vigas

- **Euler-Bernoulli**
  ST mantem ortogonal ao eixo neutro durante o processo de flexão. Rotação é a derivada do deslocamento.
  Negligencia efeito cortante. Adequado para vigas esbeltas (h/L<0,1)

- **Timoshenko**
  C*onsidera* deformação por cisalhamento. ST permanece plana. Rotação é independente do deslocamento da viga. Adequado para vigas espessas (h/L>0,1).

- **Reddy**
  C*onsidera* deformação por cisalhamento. ST não permanec plana. Modelo mais preciso. Adequado para vigas espessas (h/L>0,1).



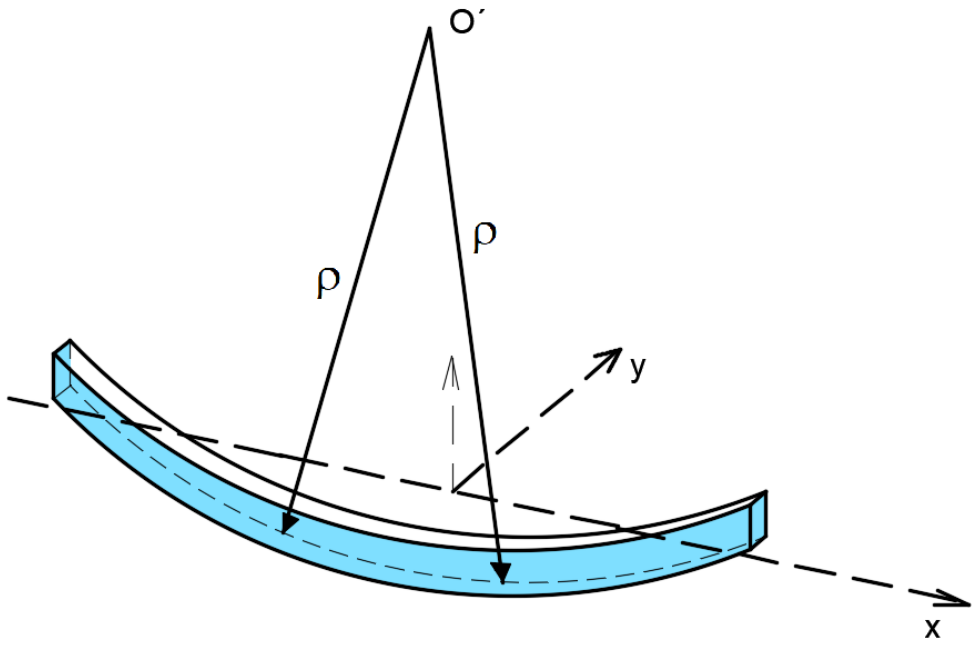
ST: seção transversal

Viga de Euler-Bernoulli - Cinemática

Curvatura e deflexão: $\kappa = \dfrac{d\theta/dx}{(1+\theta^2)^{3/2}}$

Pequenas rotações:

$\kappa = 1/\rho$ $\qquad \kappa = \dfrac{d\theta}{dx}$



A distorção é dada por:

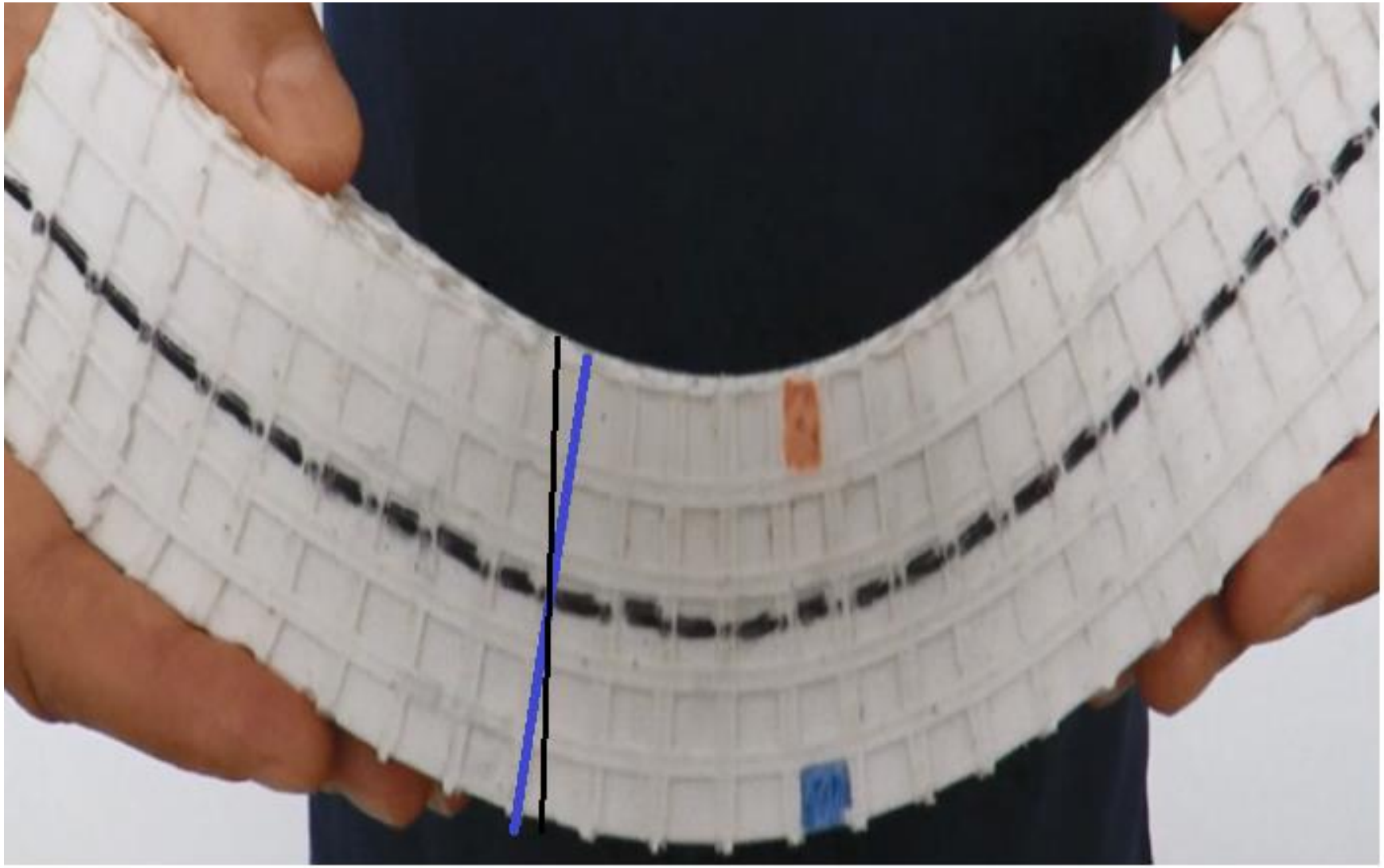
$$\gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = \theta + \frac{\partial v}{\partial x} = \gamma_{xy}$$

Negligenciando cisalhamento, ou seja, a distorção:

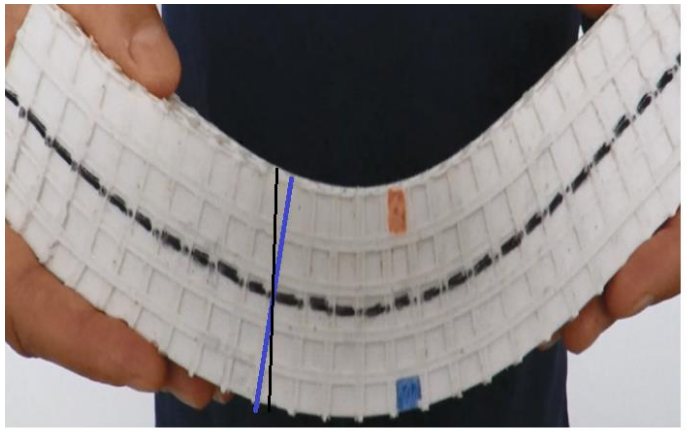
$$\gamma_{xy} = 0$$

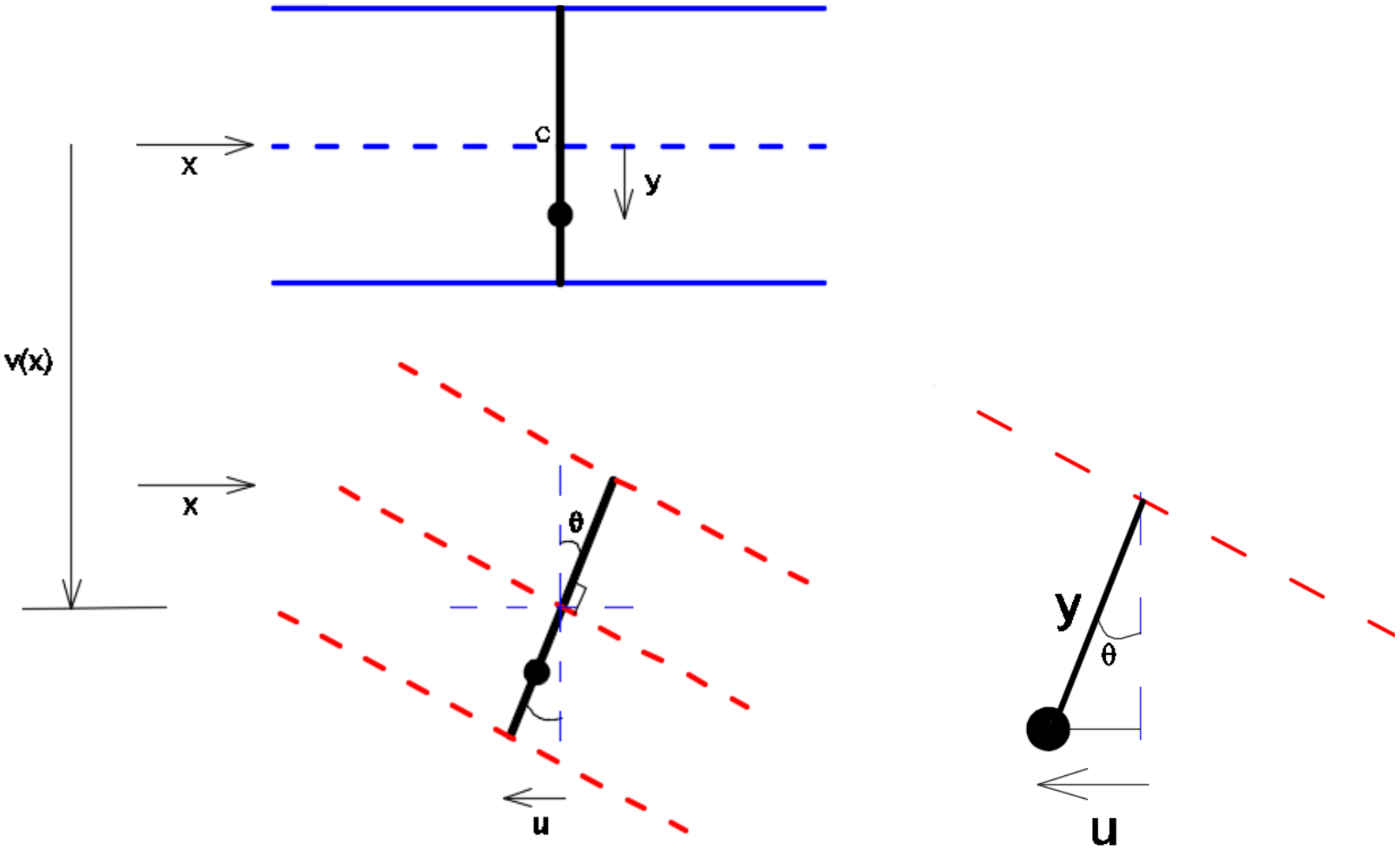
$$\theta = -v' = -\frac{dv}{dx}$$

Viga de Euler-Bernoulli - Cinemática



Viga de Euler-Bernoulli - Cinemática





$$u(x) = -y \cdot \frac{dv(x)}{dx} = -y \cdot v'(x)$$

$$\varepsilon(x) = \frac{\partial u}{\partial x}$$

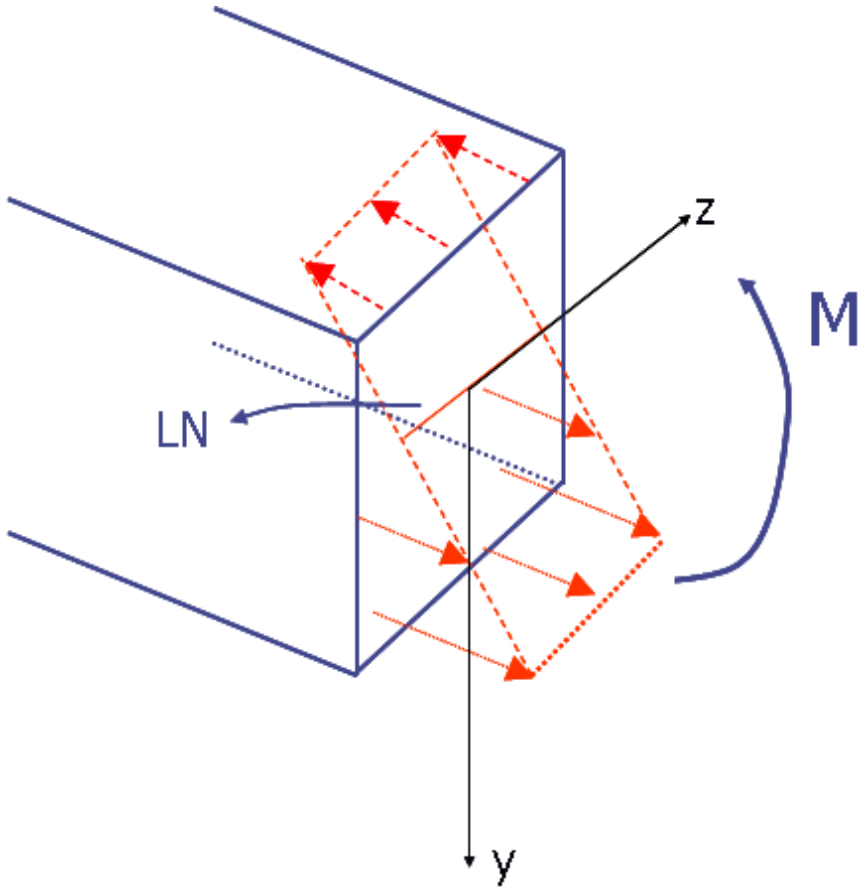
$$\varepsilon(x) = -y.\frac{\partial u}{\partial x} = -y.v''(x)$$

$$\sigma = E \cdot \varepsilon$$

$$\sigma_x(x) = \left[-E \cdot v''(x)\right] \cdot y$$

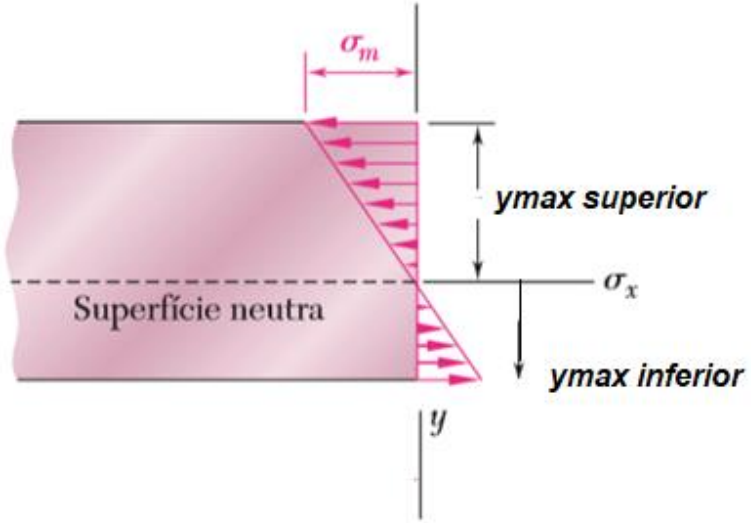
$$\theta = -v'(x)$$

Distribuição de tensão na flexão pura



- Variação linear da tensão normal (em y);
- A tensão normal independe de z;
- $y = 0 \rightarrow \sigma_x = 0$: **Linha Neutra (LN)**, tensões nulas no CG da ST;

$$\sigma_x(x) = \left[-E \cdot v''(x)\right] \cdot y$$



Fórmula da Flexão Pura

$$M_z = \int_A \sigma \cdot y \, dA$$

Relação de Equilíbrio

$$\sigma_x(x) = \left[-E \cdot v''(x)\right] \cdot y$$

$$M_z = \int_A \left\{\left[-E \cdot v''(x)\right] \cdot y\right\} \cdot y \, dA$$

$$M_z = \left[-E \cdot v''(x)\right] \cdot \int_A y^2 \, dA$$

$$I_z = \int_A y^2 \cdot dA \ (momento\ de\ inércia)$$

$$M_z = \left[-E \cdot v''(x)\right] \cdot I_z$$

$$\sigma_x = \frac{M_z}{I_z} \cdot y$$

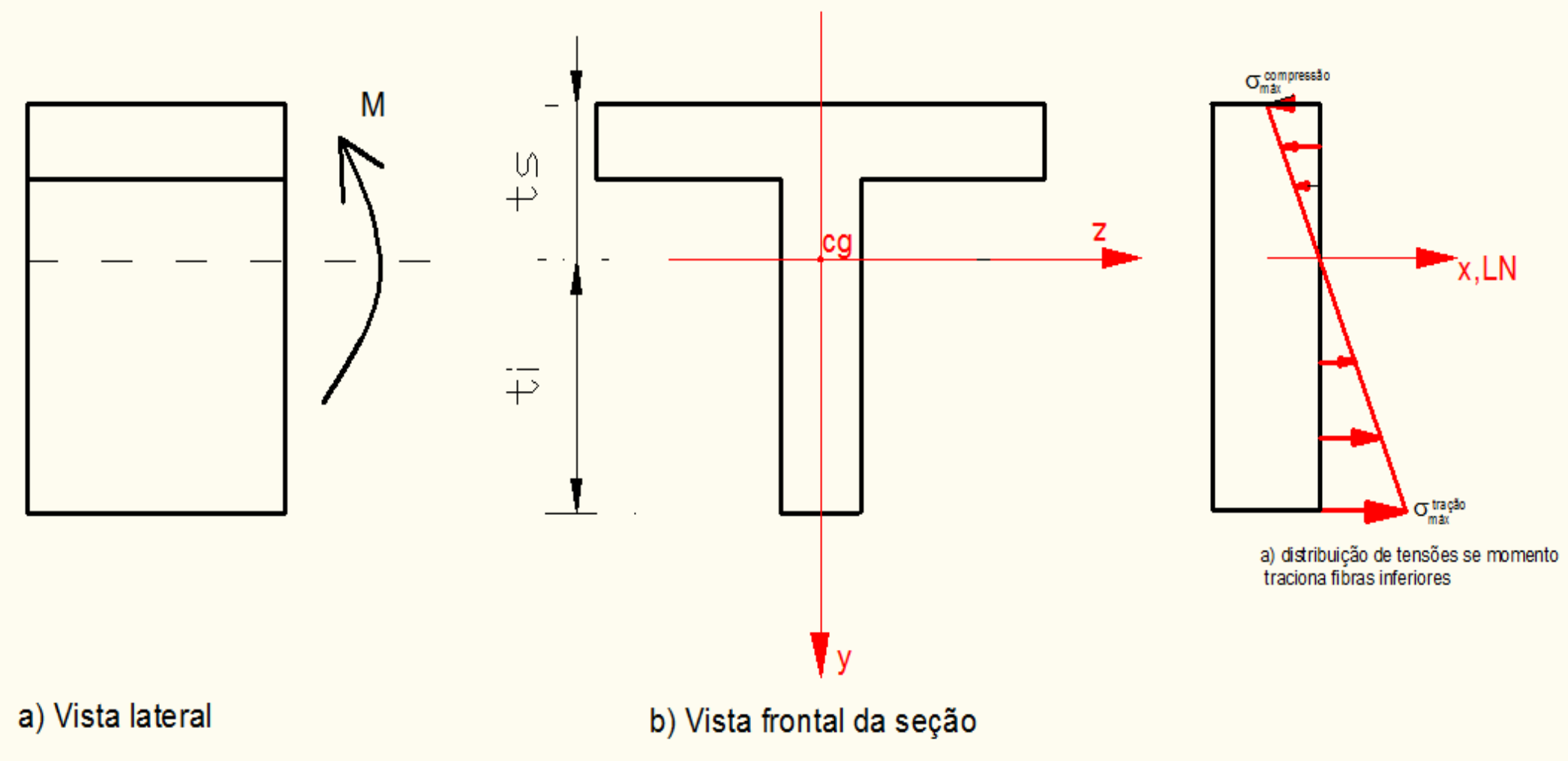
$$\sigma = \frac{M_z}{I_z} \cdot y$$

Fórmula da Flexão Pura

Flexão Pura

$$\sigma = \frac{M_z}{I_z} \cdot y$$

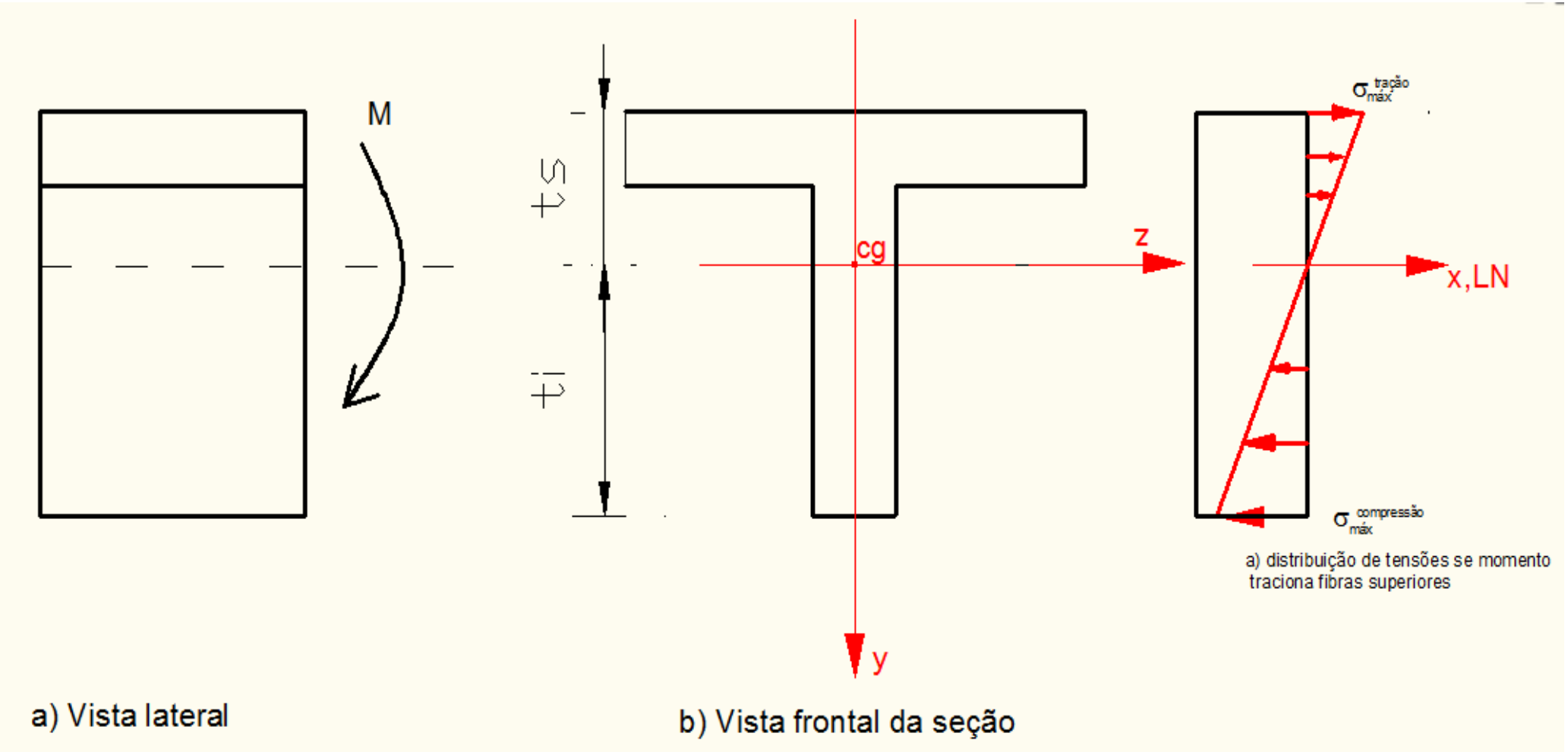
Tração fibras inferiores ao CG

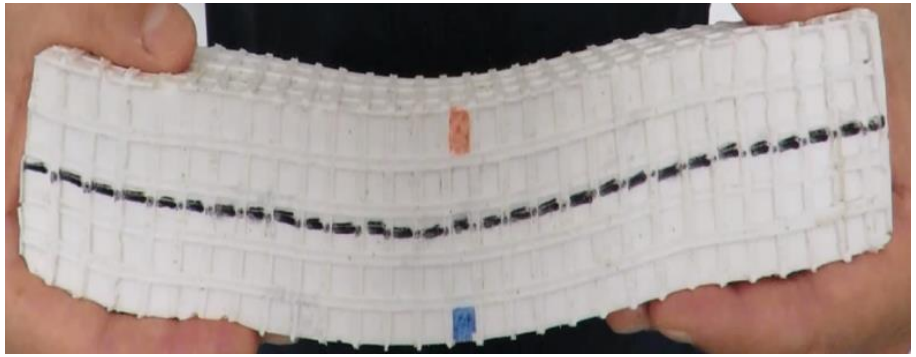


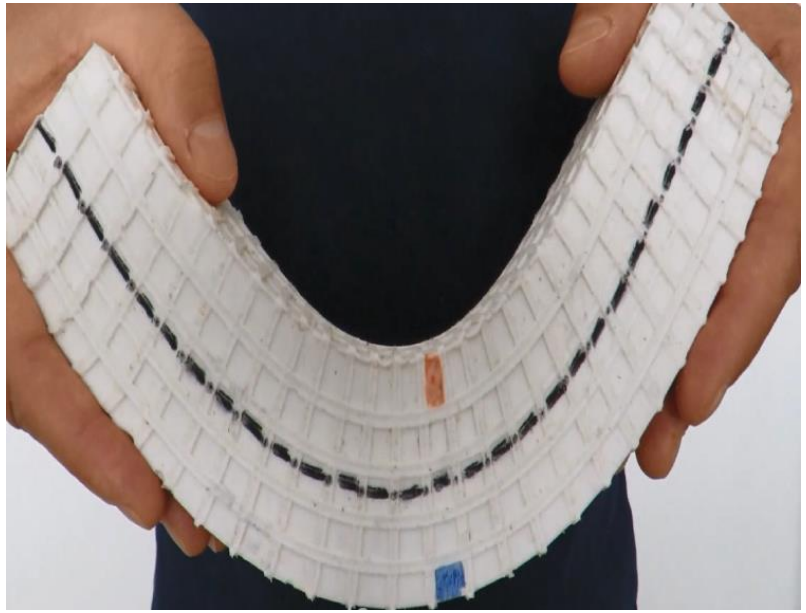
Flexão Pura

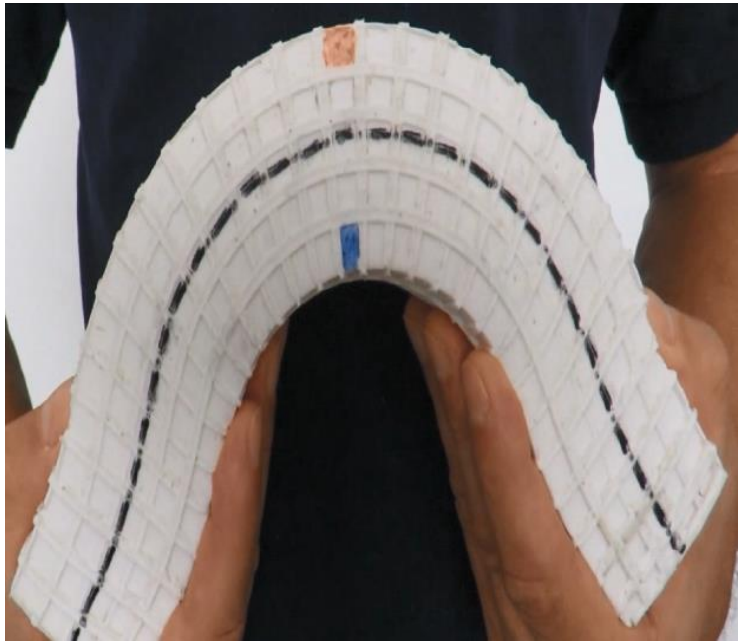
$$\sigma = \frac{M_z}{I_z} \cdot y$$

Tração fibras superiores ao CG





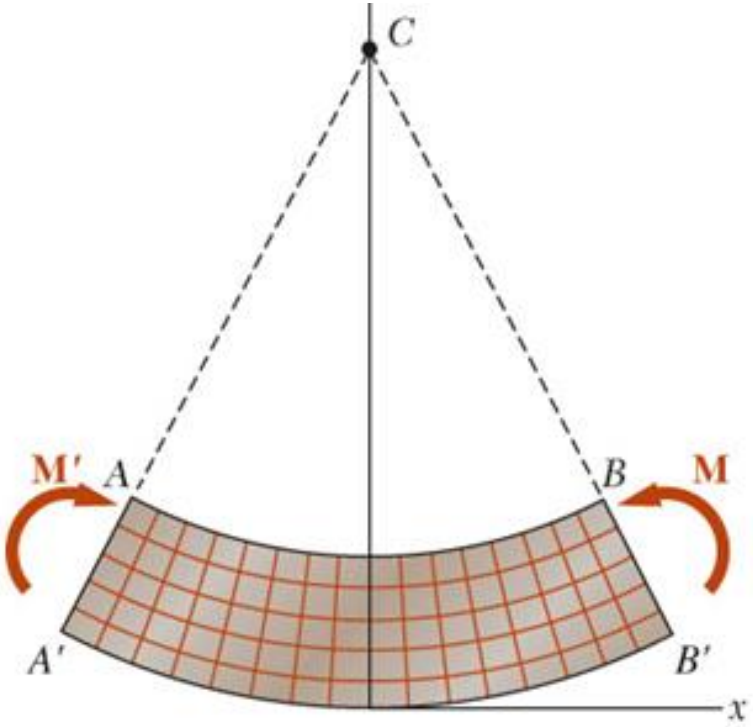


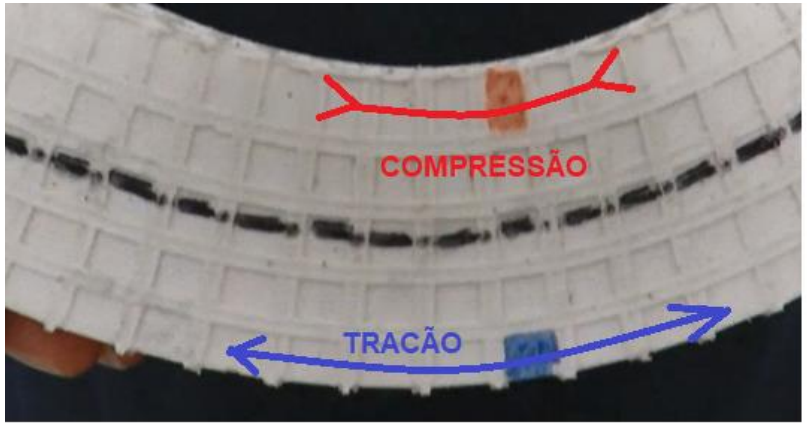


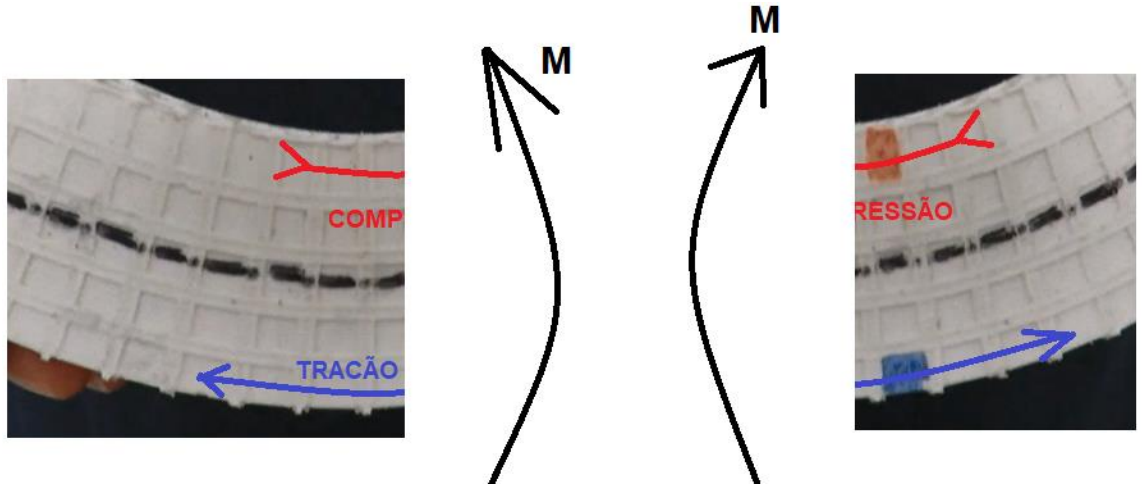
Flexão Pura

- Se M > 0 a linha AB diminui o comprimento enquanto A'B' aumenta o comprimento.
- Tensões e deformações são negativas (compressão) acima do plano neutro e positivas (tração) abaixo.

$$\sigma = \frac{M_z}{I_z} \cdot y$$







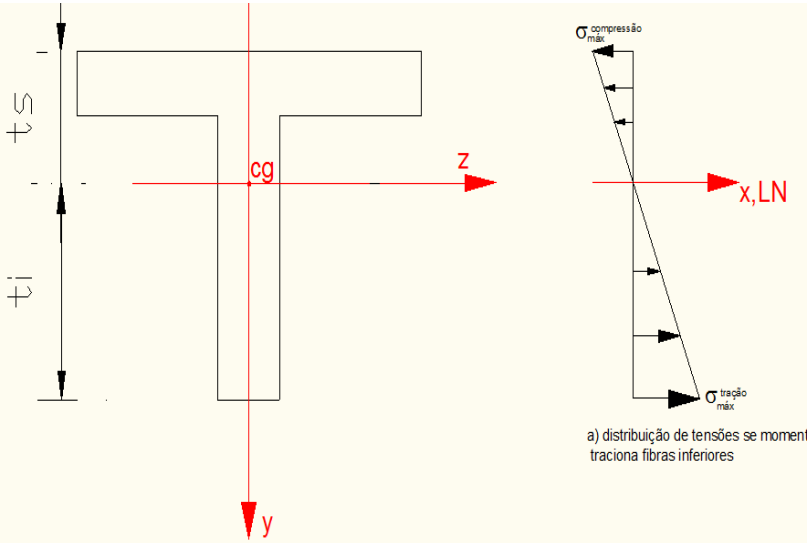
Verificação ou Dimensionamento

- Dimensionamento da peça deve ser feito avaliando as tensões normais devido à flexão na seção critica
- Há dois extremos a serem verificados em cada seção: máximo positivo e negativo, onde representam, respectivamente, a tensão máxima de tração e compressão.
- Compara-se então com as tensões admissíveis limites do material ($\overline{\sigma}$), ou seja:

$$Calcular:$$

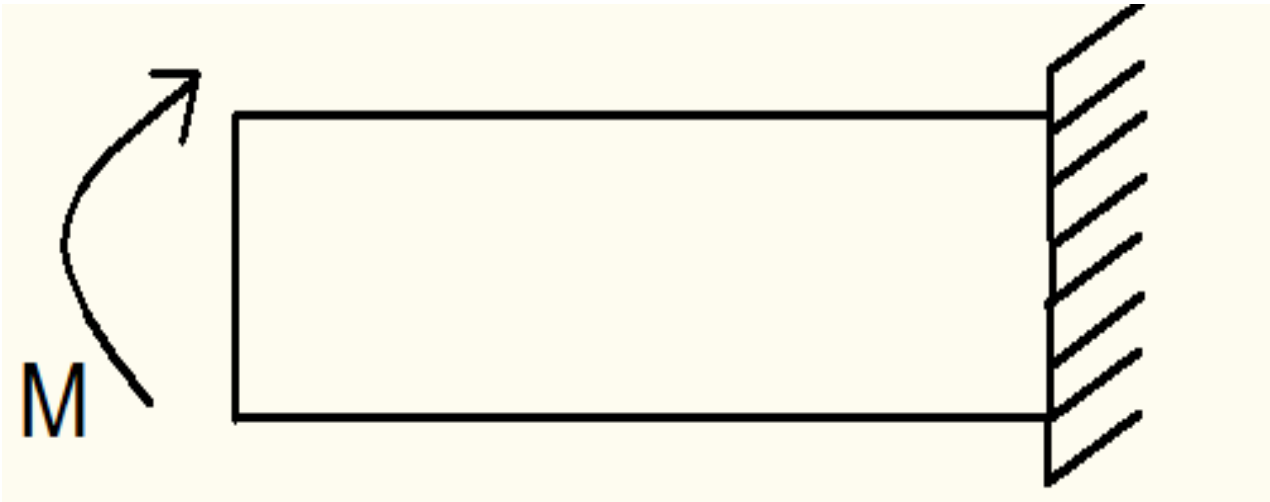
$$\sigma = \frac{M \cdot t_i}{I_z} \longrightarrow \left\{ \begin{array}{ll} Se & \sigma \geq 0 \longrightarrow \sigma \leq \overline{\sigma}_{tração} \\ Se & \sigma \leq 0 \longrightarrow \sigma \geq -\overline{\sigma}_{compressão} \end{array} \right\}$$

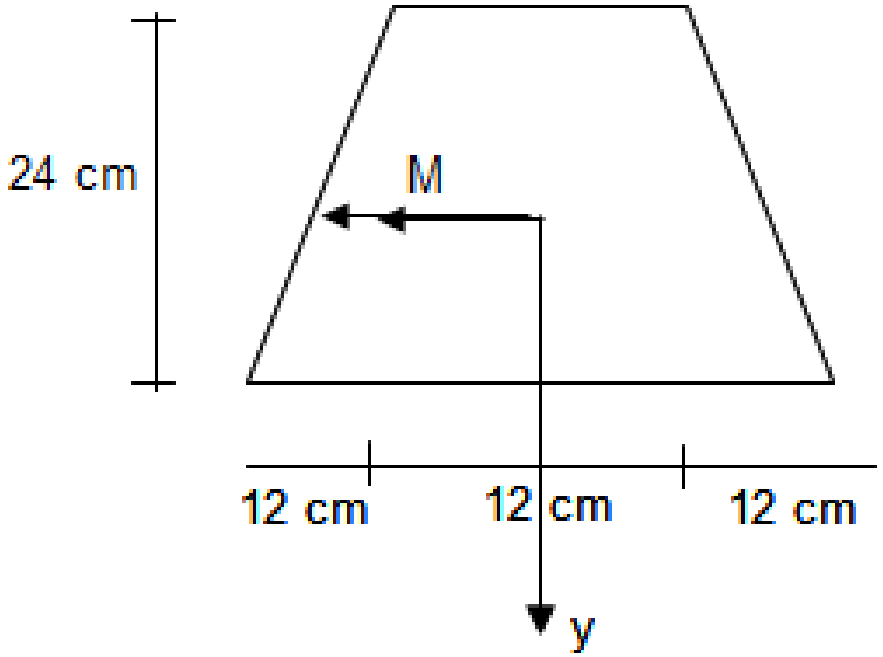
$$\sigma = \frac{M \cdot t_s}{I_z} \longrightarrow \left\{ \begin{array}{ll} Se & \sigma \geq 0 \longrightarrow \sigma \leq \overline{\sigma}_{tração} \\ Se & \sigma \leq 0 \longrightarrow \sigma \geq -\overline{\sigma}_{compressão} \end{array} \right\}$$



EXEMPLO 1

A viga tem seção transversal trapezoidal. Determinar o maior valor do momento fletor (**M**) que pode ser aplicado para que a tensão normal em módulo não exceda 5,0 kN/cm^2.

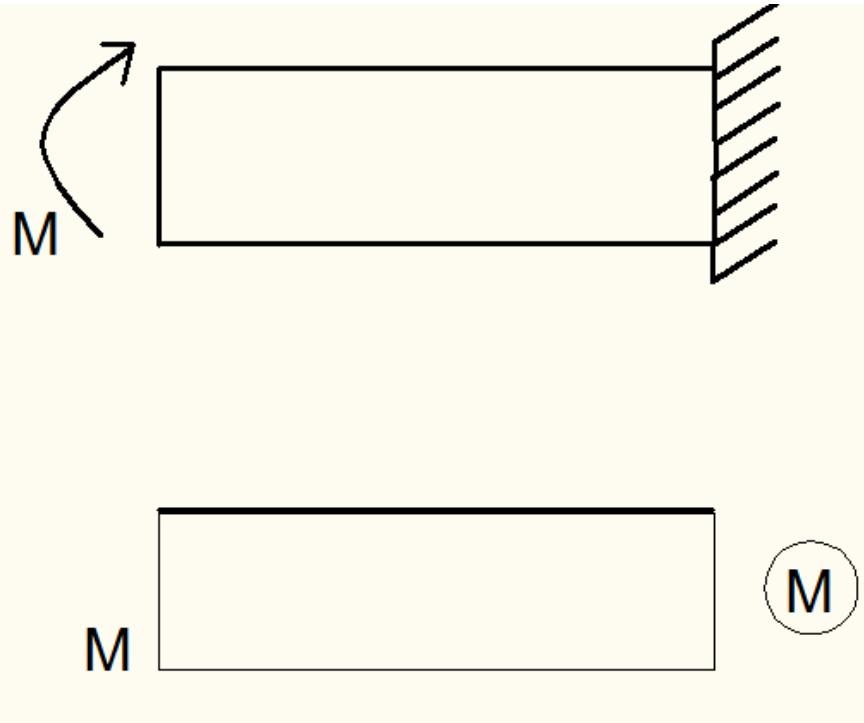




Seção Transversal (ST)

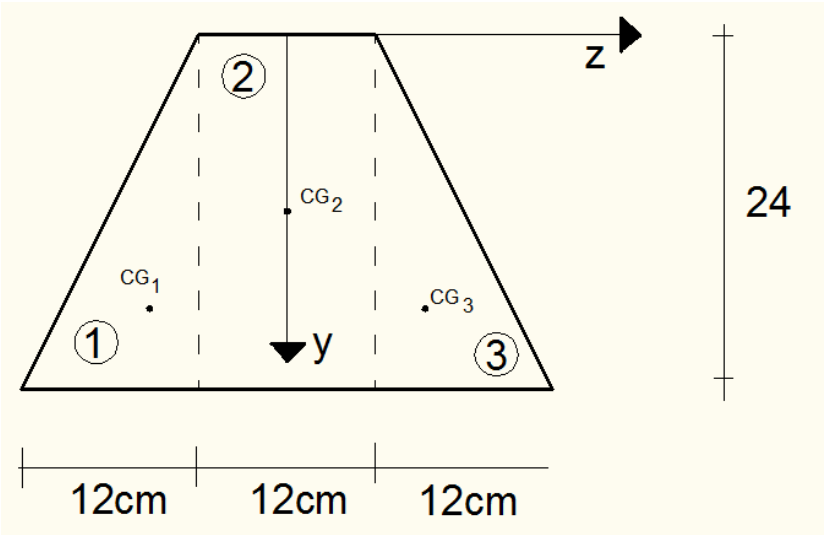
EXEMPLO 1

a) Calcular diagrama de Momento Fletor



b) Obter CG e Iz da ST

Dividir em geometrias básicas: n = 3



Região 1= Região 3:

$$(y_{CG})_1 = (y_{CG})_3 = 16 \ \ cm; \ A_1 = A_3 = 144 \ \ cm^2$$

Região 2:

$$(y_{CG})_2 = 12 \ \ cm; \ A_2 = 288 \ \ cm^2$$

$$y_{CG} = \frac{2 \cdot (y_{CG})_1 \cdot A_1 + (y_{CG})_2 \cdot A_2}{2 \cdot A_1 + A_2} = \frac{2 \cdot 16 \cdot 144 + 12 \cdot 288}{2 \cdot 144 + 288} = 14 \ \ cm$$

EXEMPLO 1 b) Obter CG e Iz da ST

$$I_z = \sum_{i=1}^{n} \left(I_{z_{CG}} + (\bar{y})^2 \cdot A \right)_i$$

Região 1= Região 3:

$$\bar{y}_1 = \bar{y}_3 = 2 \ cm \ ;$$

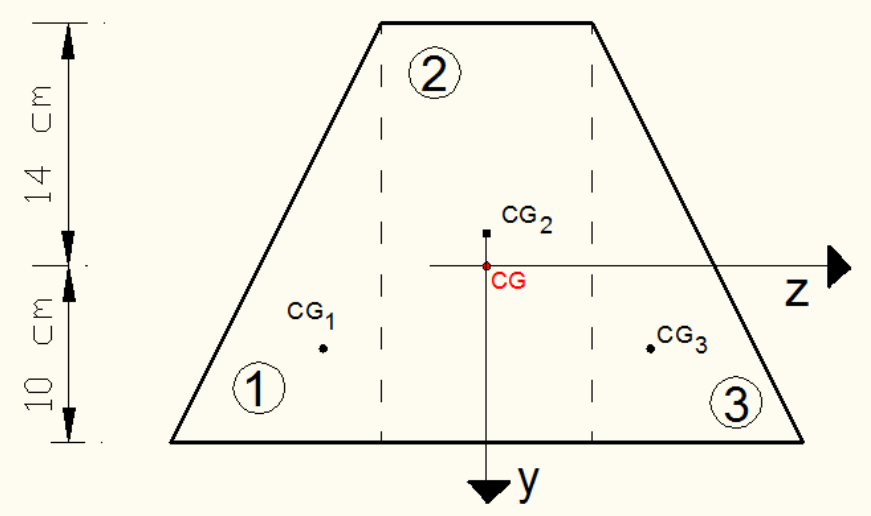
$$I_{z_{CG1}} = I_{z_{CG3}} = \frac{12.24^3}{36} = 4.608 \ cm^4;$$

Região 2:

$$\bar{y}_2 = -2 \ cm \ ;$$

$$I_{z_{CG1}} = \frac{12.24^3}{12} = 13.824 \ cm^4;$$

$$(I_z)_{CG} = 2 \cdot \left[4.608 + (2)^2 .144 \right] + \left[13.824 + (-2)^2 .288 \right] = 25.344 \ cm^4$$



c) Análise de tensões:

No diagrama, identificar seção com M máximo

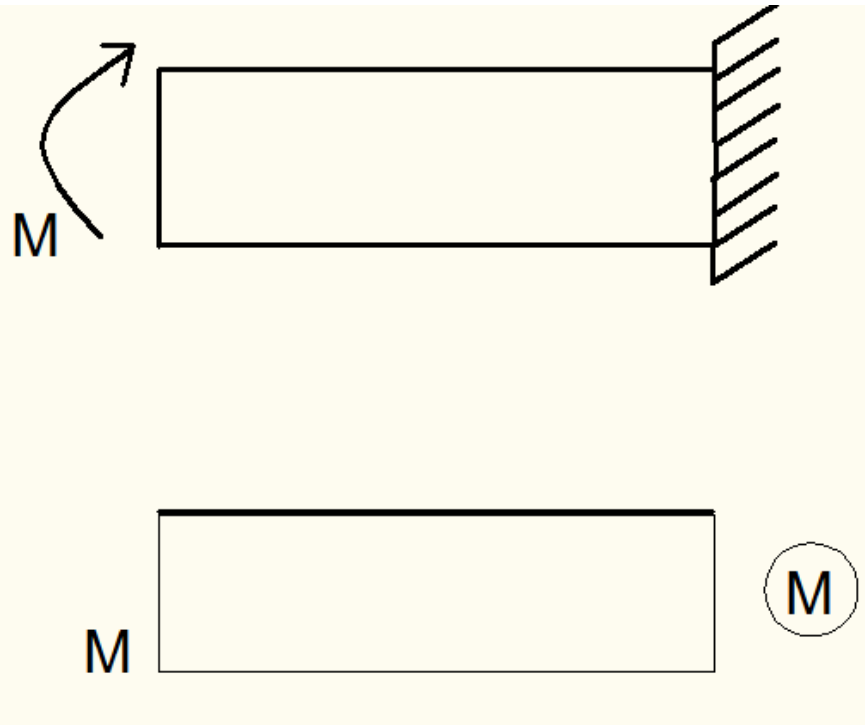
$$\sigma_{inf} = \frac{M \cdot y_{inf}}{I_z} = \frac{M \cdot 10}{25.344} \leq \sigma_{tração} \rightarrow \frac{M \cdot 10}{25.344} \leq 5{,}0 \rightarrow M \leq 12.672 \ kNcm$$

$$\sigma_{sup} = \frac{M \cdot y_{sup}}{I_z} = \frac{M \cdot (-14)}{25.344} (compressão) \rightarrow$$

$$\left| \frac{M \cdot (-14)}{25.344} \right| \leq \sigma_{compressão} \rightarrow \frac{M \cdot 14}{25.344} \leq 5{,}0 \rightarrow M \leq 9.051 \ kNcm$$

$$M_{max} = 9.051 \ kNcm$$

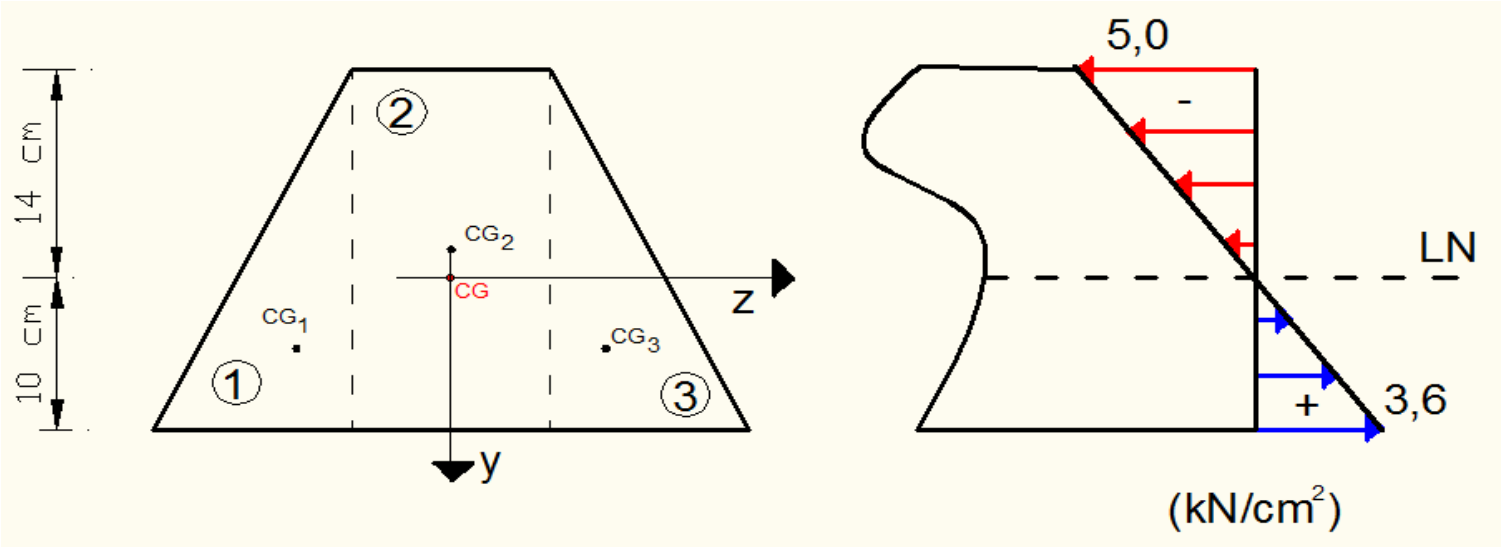
EXEMPLO 1



$$\sigma_{inf} = \frac{M \cdot y_{inf}}{I_z} = \frac{9051 \cdot 10}{25.344} = 3{,}6 \ \ kN/cm^2$$

$$\sigma_{sup} = \frac{M \cdot y_{sup}}{I_z} = \frac{9051 \cdot (-14)}{25.344} = -5 \ \ kN/cm^2$$

$$M_{max} = 9.051 \ kNcm$$

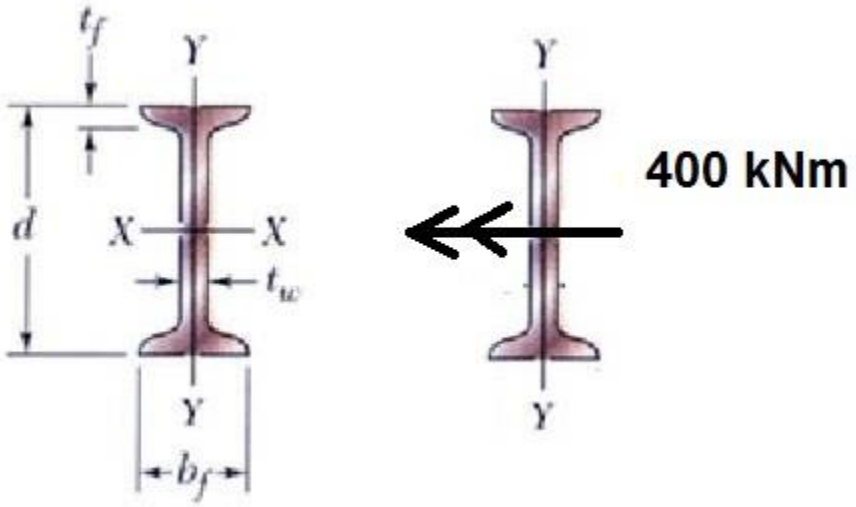


EXEMPLO 2

Para uma viga com momento máximo de 400 kNm, formada por um perfil I de aço laminado, da tabela anexo, determine um perfil de modo que suas tensões solicitantes não superem a tensão admissível do material que é de 150 MPa.

$$(\sigma_x)_{\max} = \frac{M_z}{I_z} \cdot y_{\max} = \frac{M_z}{W_z}$$

$$W_z = \frac{I_z}{y_{\max}}$$



W: módulo de resistência (depende da geometria)
unidade L^3

Alguns livros usam o eixo horizontal sendo x, assim, $W_x = \frac{I_x}{y_{max}}$

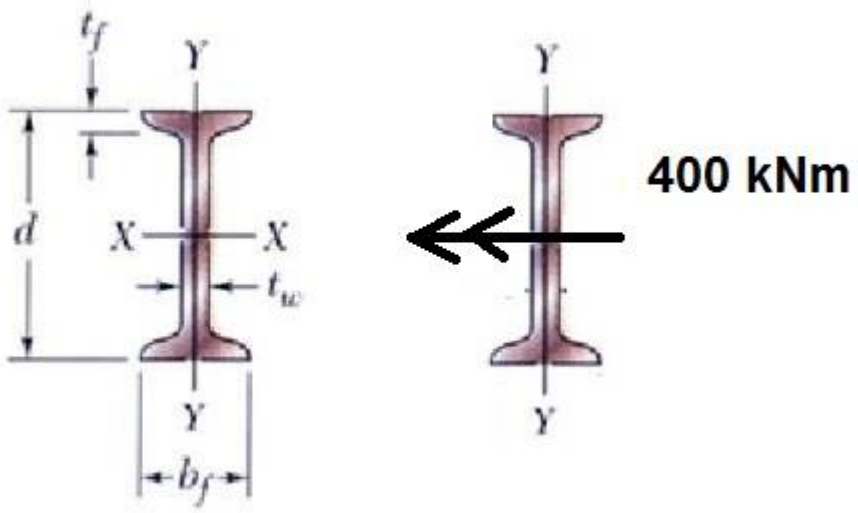
EXEMPLO 2

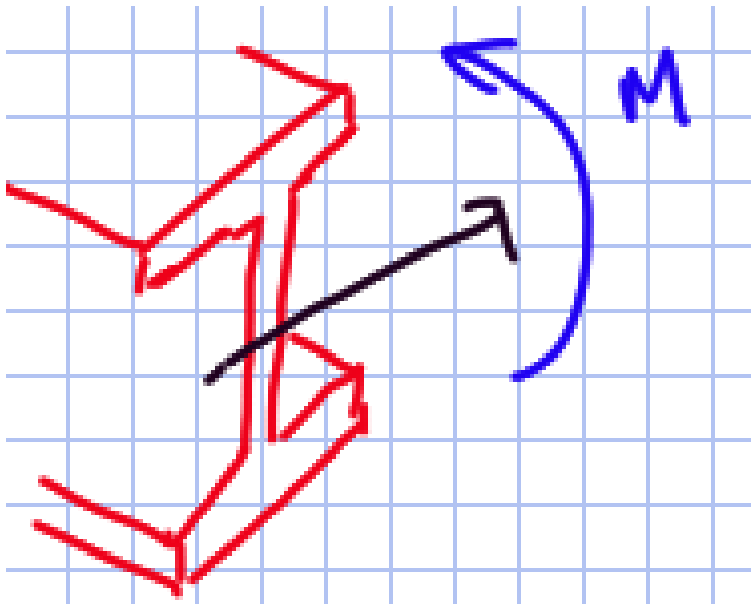
$$(\sigma_x)_{\max} = \frac{M_z}{I_z} \cdot y_{\max} = \frac{M_z}{W_z}$$

$$W_z = \frac{I_z}{y_{\max}}$$

$$(\sigma_x)_{\max} = \frac{M_z}{W} = \frac{400}{W} \leq 150.10^3 \ (kPa)$$

$$W \geq 2{,}67.10^{-3} m^3 \rightarrow W \geq (2.670).10^3 mm^3$$



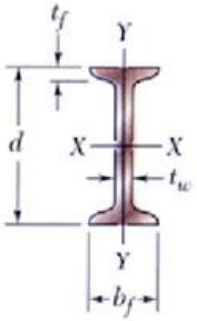


Wx = Wz (pois eixo Z é X, no exemplo)

Propriedades dos perfis de padrão americano

Apêndice C. Propriedades de perfis de aço laminado
(Unidades SI)

Perfis I
(Perfis de padrão americano)



Designação	Área A, mm²	Altura d, mm	Mesa: Largura b_f, mm	Mesa: Espessura t_f, mm	Espessura da alma t_w, mm	Eixos X-X: I_x 10^6 mm⁴	Eixos X-X: W_x 10^3 mm³	Eixos X-X: r_x mm	Eixos Y-Y: I_y 10^6 mm⁴	Eixos Y-Y: W_y 10^3 mm³	Eixos Y-Y: r_y mm
I 610 × 180	22.900	622	204	27,7	20,3	1.320	4.200	240	34,9	341	39,0
158	20.100	622	200	27,7	15,7	1.230	3.950	247	32,5	321	39,9
149	19.000	610	184	22,1	18,9	995	3.260	229	20,2	215	32,3
134	17.100	610	181	22,1	15,9	938	3.080	234	19,0	206	33,0
119	15.200	610	178	22,1	12,7	878	2.880	240	17,9	198	34,0
I 510 × 143	18.200	516	183	23,4	20,3	700	2.710	196	21,3	228	33,9
128	16.400	516	179	23,4	16,8	658	2.550	200	19,7	216	34,4
112	14.200	508	162	20,2	16,1	530	2.090	193	12,6	152	29,5
98,3	12.500	508	159	20,2	12,8	495	1.950	199	11,8	145	30,4
I 460 × 104	13.300	457	159	17,6	18,1	385	1.685	170	10,4	127	27,5
81,4	10.400	457	152	17,6	11,7	333	1.460	179	8,83	113	28,8
I 380 × 74	9.500	381	143	15,6	14,0	201	1.060	145	6,65	90,8	26,1
64	8.150	381	140	15,8	10,4	185	971	151	6,15	85,7	27,1

$$W \geq (2.670).10^3\, mm^3$$

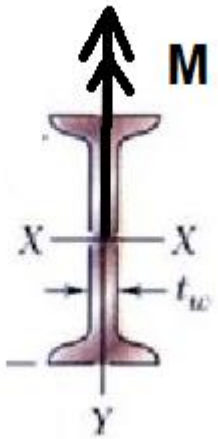
Perfil Escolhido:

I 510x143

•Copyright © The McGraw-Hill Companies, Inc. Permission required for reproduction or display.

grupo a
Conhecimento que transforma.

EXEMPLO 2



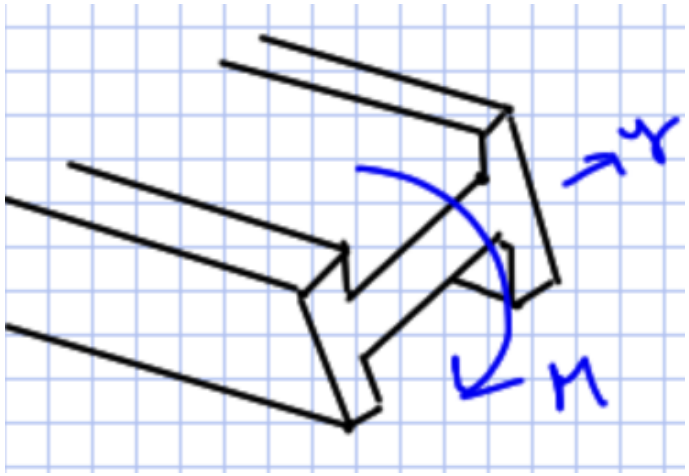
$$\sigma_x = \frac{M_y}{I_y} x_{max}$$

$$\sigma_x = \frac{M_y}{W_y}$$

M = 400 kNm

$$150.10^3 \geq \frac{400}{W_y}$$

$$W_y \geq 2670.10^3\, mm^3$$



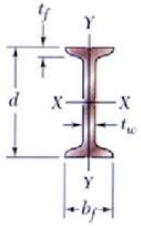
ESTÁTICA E MECÂNICA DOS MATERIAIS

Beer | Johnston | DeWolf | Mazurek

Propriedades dos perfis de padrão americano

Apêndice C. Propriedades de perfis de aço laminado
(Unidades SI)

Perfis I
(Perfis de padrão americano)



Designação	Área A, mm²	Altura d, mm	Mesa: Largura b_f, mm	Mesa: Espessura t_f, mm	Espessura da alma t_w, mm	Eixos X-X: I_x 10^6 mm⁴	Eixos X-X: W_x 10^3 mm³	Eixos X-X: r_x mm	Eixos Y-Y: I_y 10^6 mm	Eixos Y-Y: W_y 10^3 mm³	Eixos Y-Y: r_y mm
I 610 × 180	22.900	622	204	27,7	20,3	1.320	4.200	240	34,9	341	39,0
158	20.100	622	200	27,7	15,7	1.230	3.950	247	32,5	321	39,9
149	19.000	610	184	22,1	18,9	995	3.260	229	20,2	215	32,3
134	17.100	610	181	22,1	15,9	938	3.080	234	19,0	206	33,0
119	15.200	610	178	22,1	12,7	878	2.880	240	17,9	198	34,0
I 510 × 143	18.200	516	183	23,4	20,3	700	2.710	196	21,3	228	33,9
128	16.400	516	179	23,4	16,8	658	2.550	200	19,7	216	34,4
112	14.200	508	162	20,2	16,1	530	2.090	193	12,6	152	29,5
98,3	12.500	508	159	20,2	12,8	495	1.950	199	11,8	145	30,4
I 460 × 104	13.300	457	159	17,6	18,1	385	1.685	170	10,4	127	27,5
81,4	10.400	457	152	17,6	11,7	333	1.460	179	8,83	113	28,8
I 380 × 74	9.500	381	143	15,6	14,0	201	1.060	145	6,65	90,8	26,1
64	8.150	381	140	15,8	10,4	185	971	151	6,15	85,7	27,1

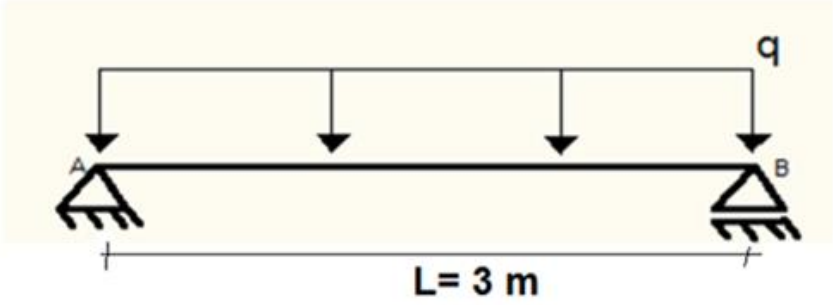
•Copyright © The McGraw-Hill Companies, Inc. Permission required for reproduction or display.

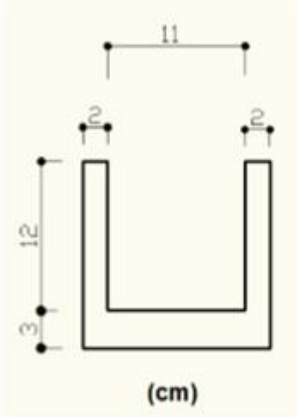
Não possível esse perfil

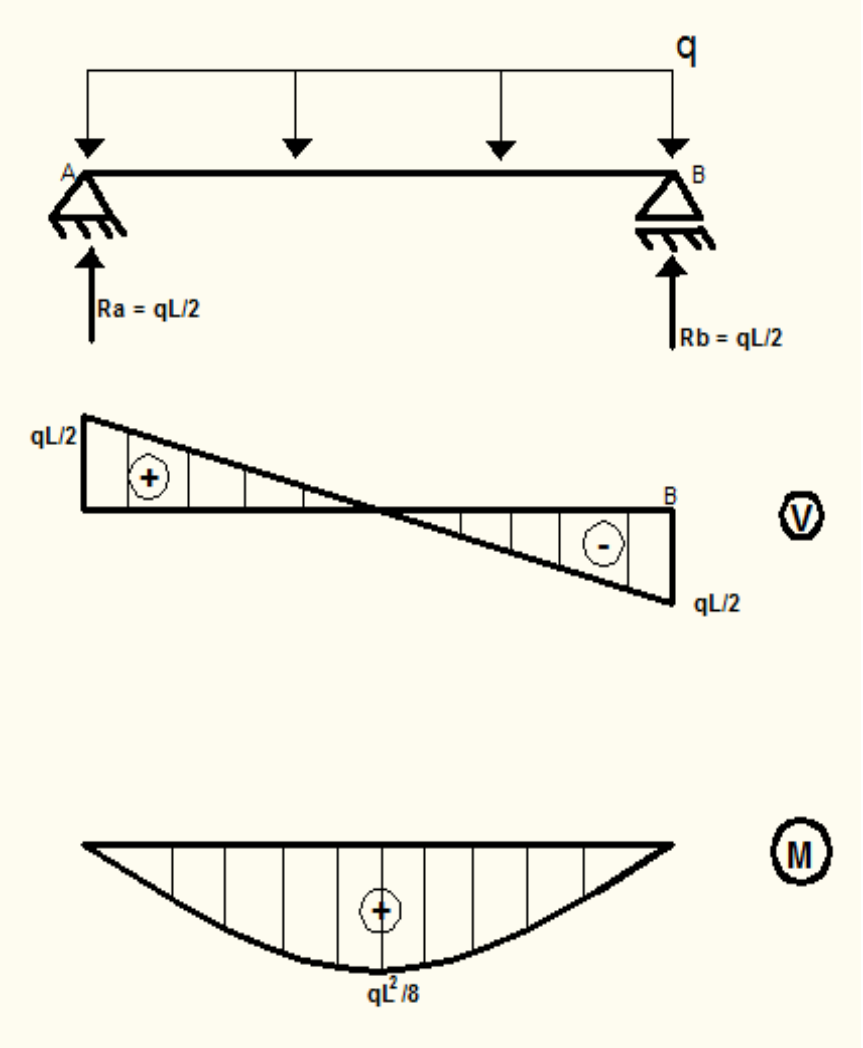
Para esse M, nenhum perfil seria possível

EXEMPLO 3

Para a viga bi-apoiada a seguir com material que possui tensão admissível de 60 MPa para tração e 150 MPa para compressão, calcule o máximo valor da carga distribuída "*q*", nas unidades de kN/m. A sua seção transversal é um perfil U, conforme desenho.





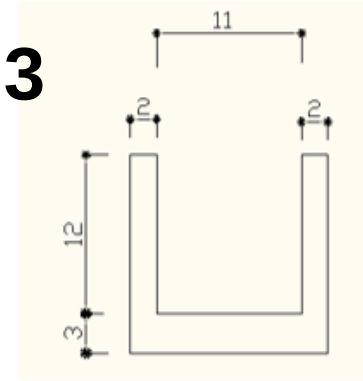


Resposta:

a) Determinar o diagrama de momento fletor:

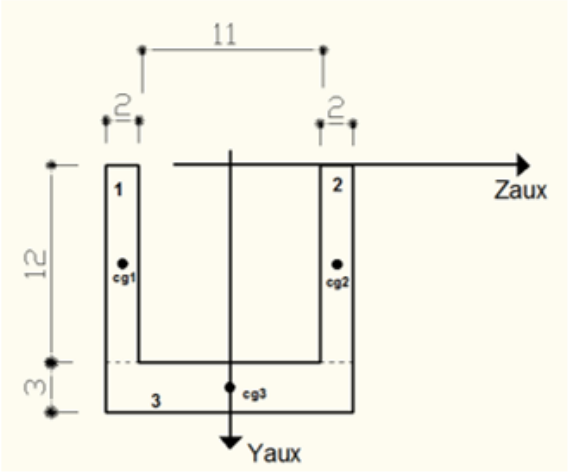
Momento máximo ocorre na seção central e de valor: $\mathbf{M_{max} = q.3^2/8 = 1{,}125.q}$

EXEMPLO 3



Resposta:

a) Dividir em trechos de geometria básica e estabelecer sistema auxiliar, ver desenho:



Região 1 = Região 2

$(y_{CG})_1 = 6\ cm;\ A_1 = 24\ cm^2$

Região 3:

$(y_{CG})_2 = 13{,}5\ cm;\ A_2 = 45\ cm^2$

$$y_{CG} = \frac{2\cdot(y_{CG})_1\cdot A_1 + (y_{CG})_2\cdot A_2}{2.A_1 + A_2} = \frac{2.6.24\cdot + 13{,}5.45}{2.24 + 45} = 9{,}63\ cm$$

Região 1= Região 2:

$\bar{y}_1 = -3{,}63\ cm\ ;$

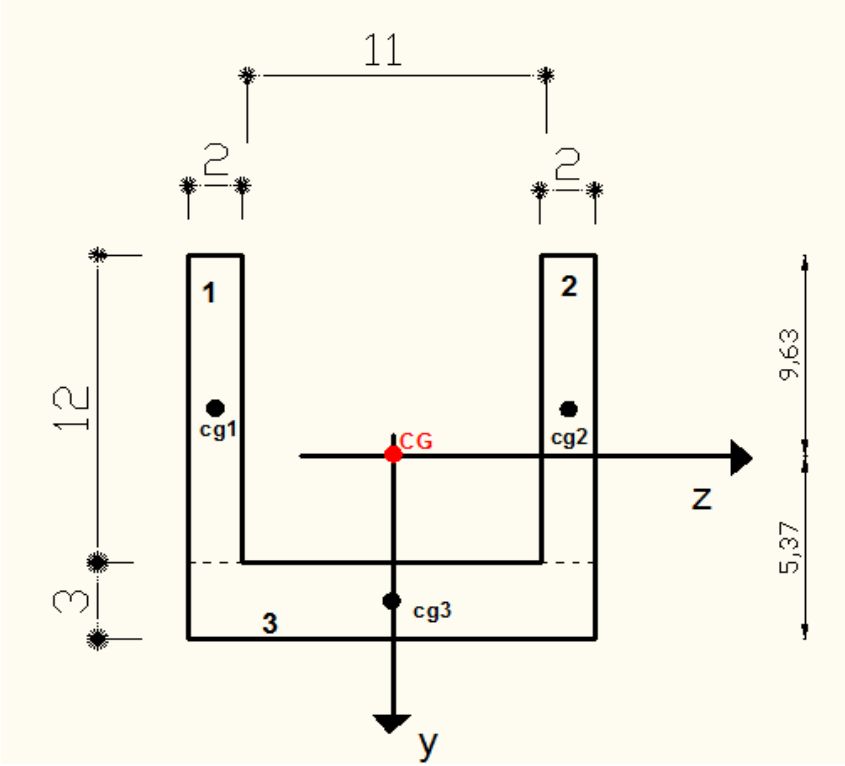
$$I_{z_{CG1}} = \frac{2.12^3}{12} = 288\ cm^4;$$

Região 3:

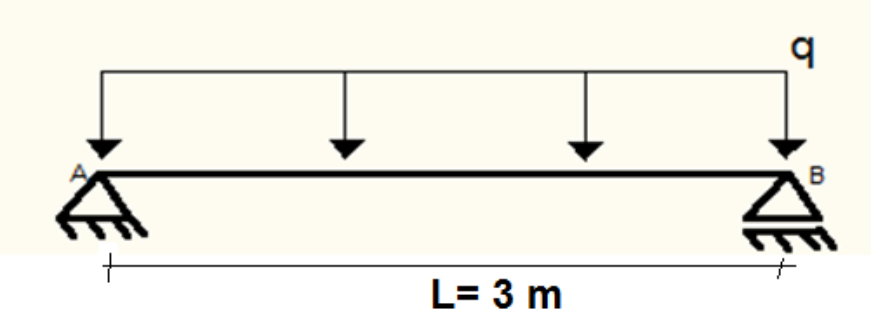
$\bar{y}_2 = 3{,}87\ cm\ ;$

$$I_{z_{CG2}} = \frac{15.3^3}{12} = 33{,}75\ cm^4;$$

$$(I_z)_{CG} = 2.\left[288 + (-3{,}63)^2.24\right] + \left[33{,}75 + (3{,}87)^2.45\right] = 1916{,}2\ cm^4$$



EXEMPLO 3



$$(\sigma_x)_{\max} = \frac{M_z}{I_z} \cdot y_{\max}$$

$$\sigma_{\inf} = \frac{M \cdot y_{\inf}}{I_z} = \frac{1{,}125q \cdot (0{,}0537)}{1916{,}2.10^{-8}} (tração) \rightarrow \frac{1{,}125q \cdot (0{,}0537)}{1916{,}2.10^{-8}} \leq \sigma_{tração} = 60.10^3 \ \ (kPa)$$

$$\rightarrow q \leq 19{,}0 \ \ (kN/m)$$

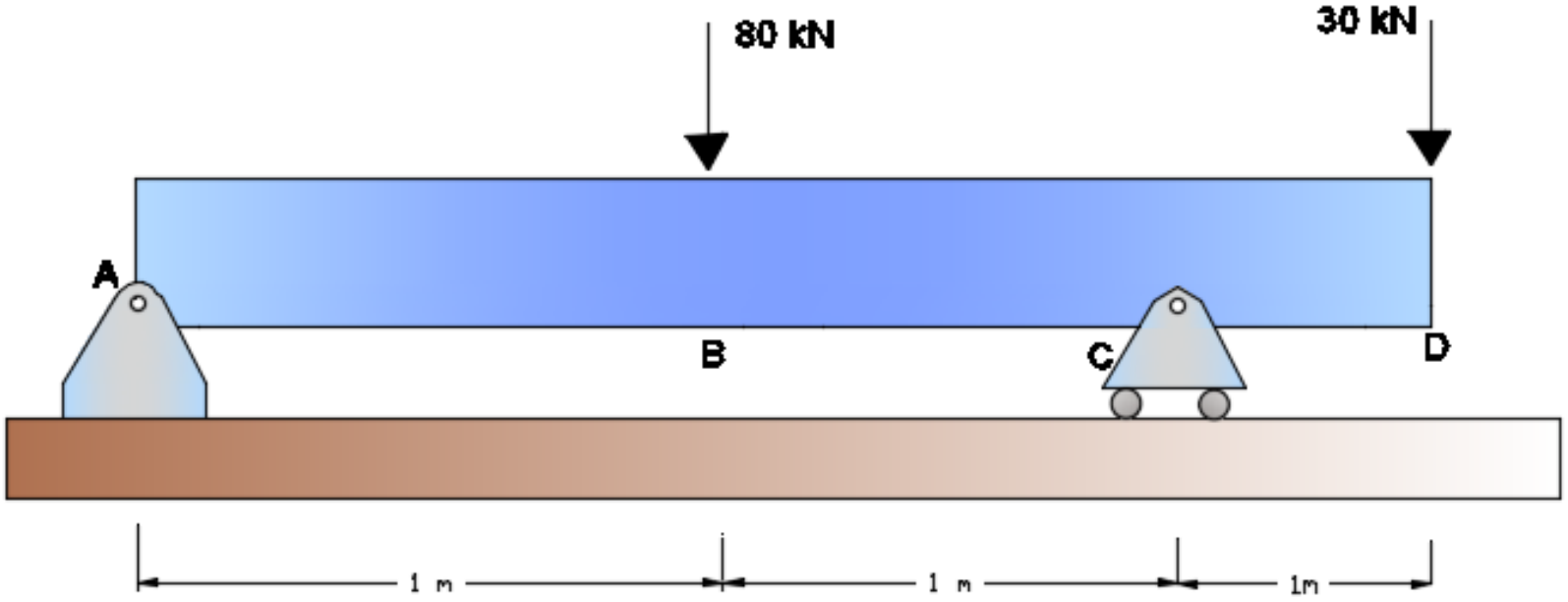
$$\sigma_{\sup} = \frac{M \cdot y_{\sup}}{I_z} = \frac{1{,}125q \cdot (-0{,}0963)}{1916{,}2.10^{-8}} (compressão) \rightarrow \left| \frac{1{,}125q \cdot (-0{,}0963)}{1916{,}2.10^{-8}} \right| \leq \sigma_{compressão} = 150.10^3 \ \ (kPa)$$

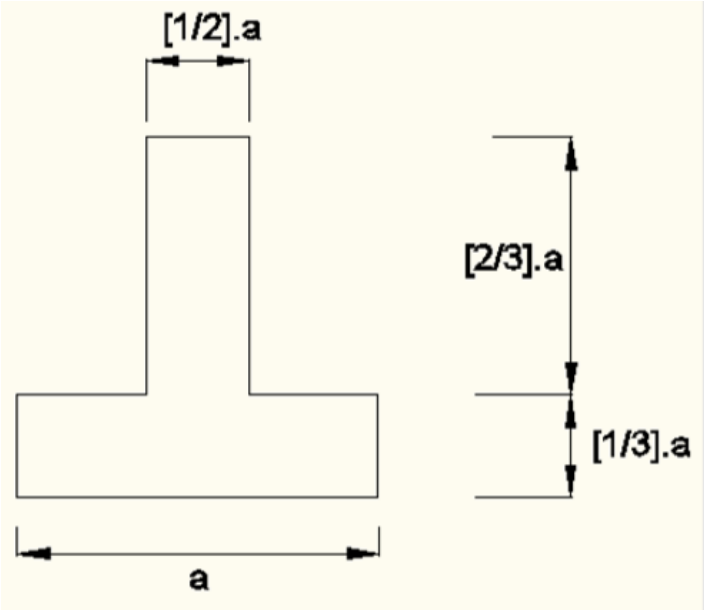
$$\rightarrow q \leq 26{,}5 \ \ (kN/m)$$

$$\therefore q_{\max} = 19 \ \ kN/m$$

EXEMPLO 4

A viga está sujeita aos carregamentos mostrado na figura. Determine a mínima dimensão **a** exigida para sua seção transversal se a tensão admissível a tração é de 150 MPa e compressão de 200 MPa.

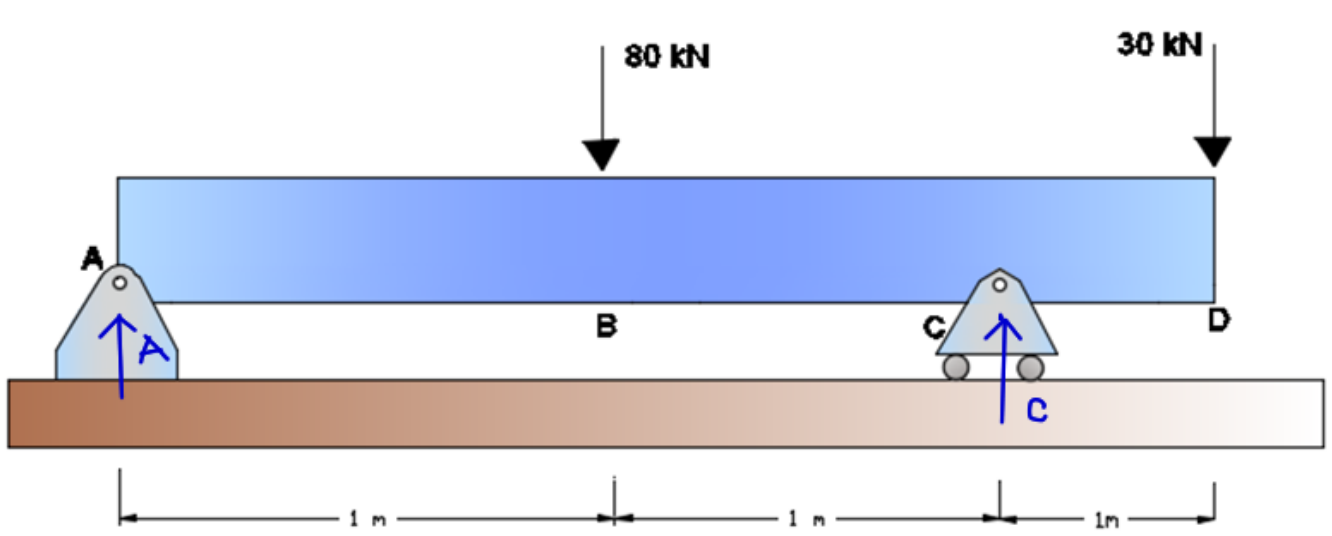




Seção transversal

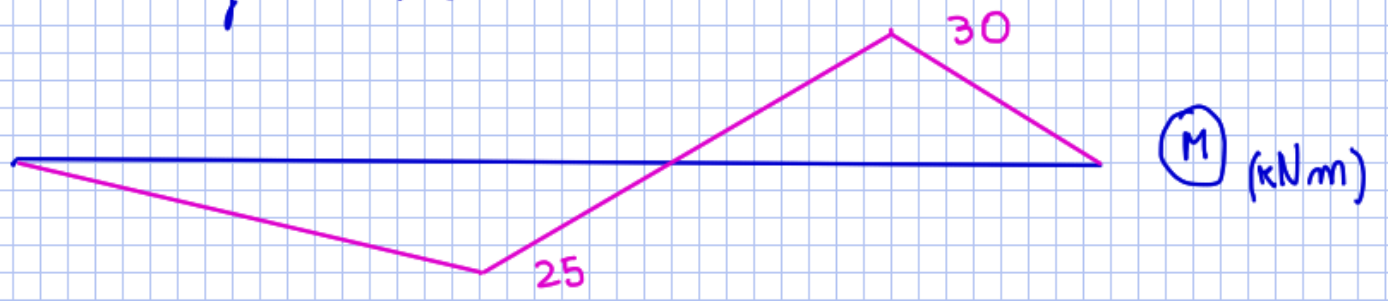
EXEMPLO 4

a) Diagrama de Momento fletor



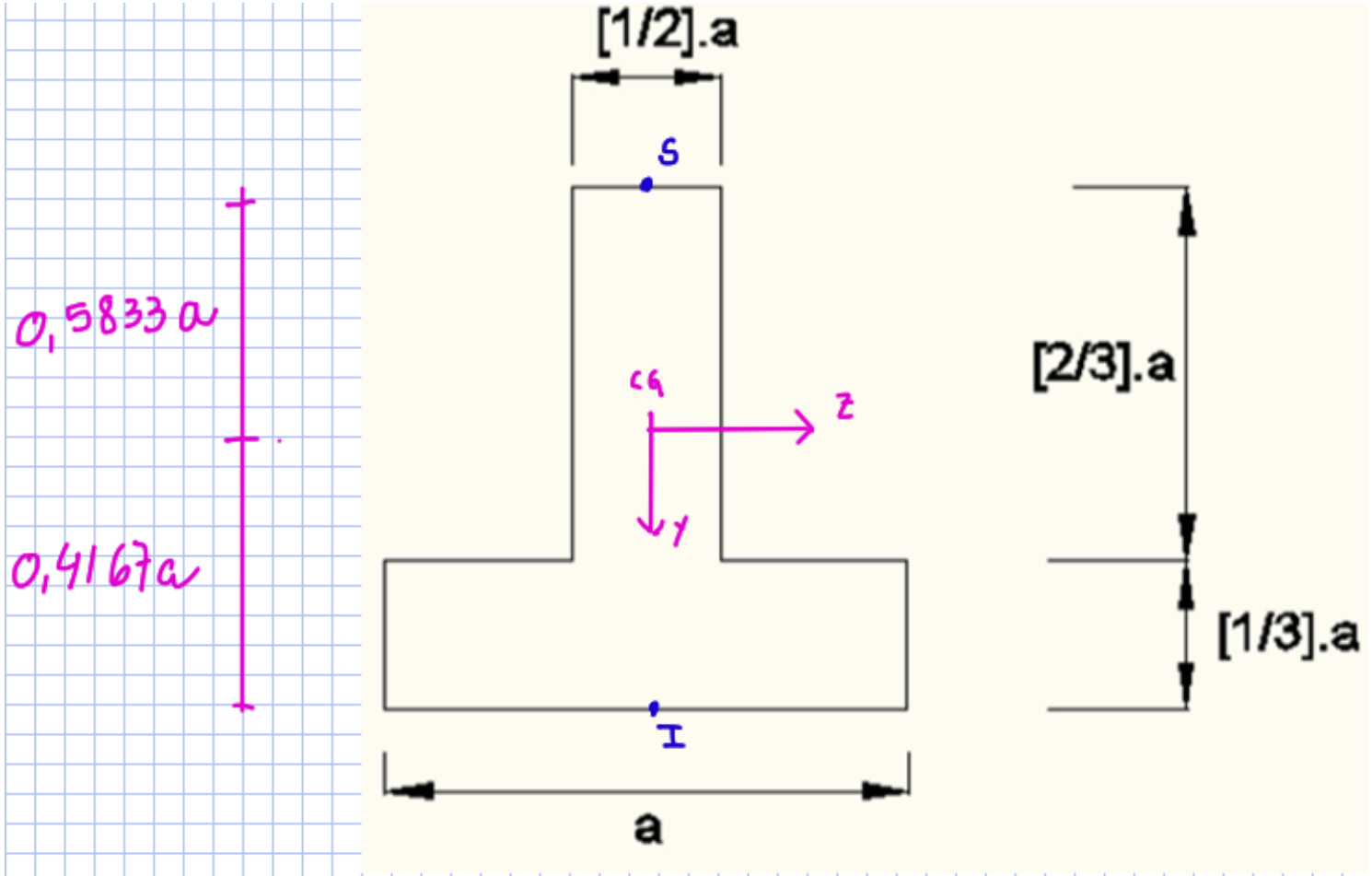
$$\Sigma M_A = 0: \quad 2 \cdot C = 80 \cdot 1 + 30 \cdot 3 \rightarrow C = 85\,kN$$

$$\Sigma F_y = 0: \quad A + C = 110 \rightarrow A = 25\,kN$$



EXEMPLO 4

b) Características geométricas



$$I_{z_{cg}} = \frac{37}{648} a^4$$

EXEMPLO 4

c) Análise de tensões

SEÇÃO B

$$(\sigma_{B_I})_t = \frac{25 \cdot 0{,}4167a}{\frac{37}{648}a^4} \leq \sigma_{adm_t} = 150 \cdot 10^3 \ (kPa)$$

$$a \geq 0{,}1067 \ m$$

$$(\sigma_{B_S})_c = \left| \frac{(25)(-0{,}5833a)}{\frac{37}{648}a^4} \right| \leq \sigma_{adm_c} = 200 \cdot 10^3$$

$$a \geq 0{,}1085 \ m$$

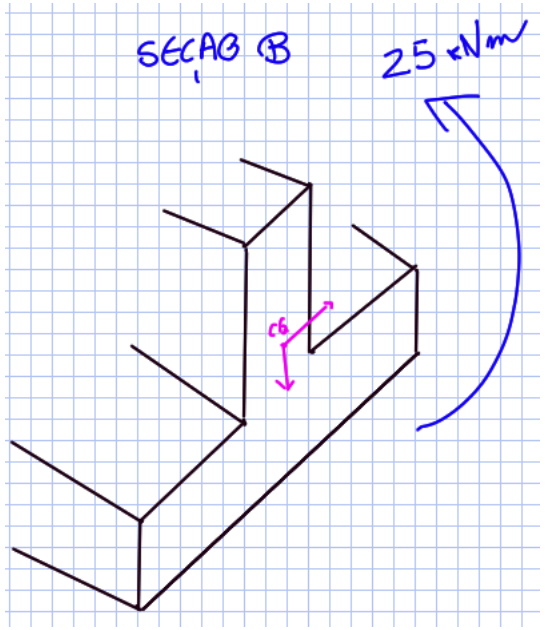
SEÇÃO C

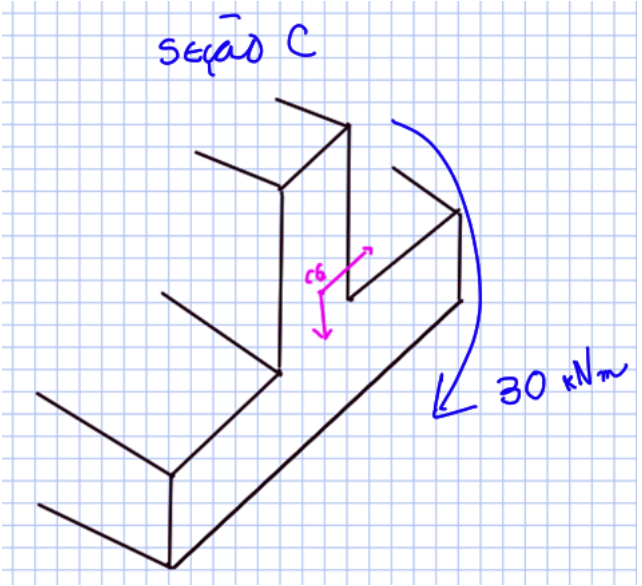
$$(\sigma_{C_I})_c = \left| \frac{(-30)(0{,}4167a)}{\frac{37}{648}a^4} \right| \leq 200 \cdot 10^3 \ (kPa) \quad \sigma_{adm_c}$$

$$a \geq 0{,}1031 \ m$$

$$(\sigma_{C_S})_t = \frac{(-30)(-0{,}5833a)}{37/648 \, a^4} \leq 150 \cdot 10^3 \quad \sigma_{adm_t}$$

$$a \geq 0{,}1269 \ m$$

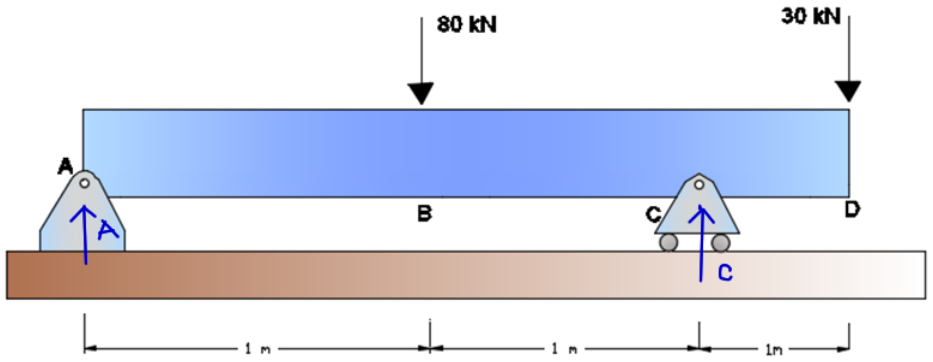




Sugestão:
Verifique a seção com máximo valor de M positivo e negativo

$$a_{mín} = 126{,}9 \ mm$$

EXEMPLO 4



P/ $a = 126{,}9\ mm$

Seção B:

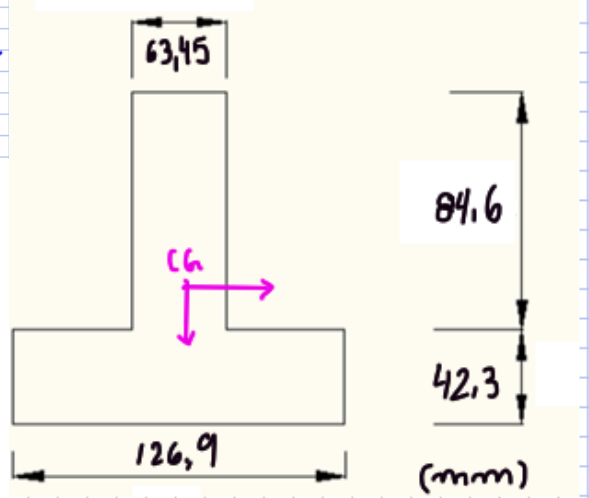
$$\sigma_I = \frac{25 \cdot 0{,}4167 \cdot 0{,}1269}{\frac{37}{648} \cdot (0{,}1269)^4} = 89{,}3\ MPa$$

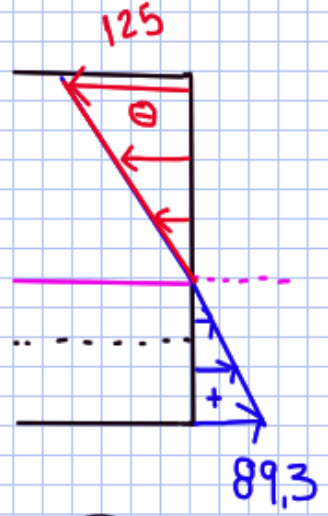
$$\sigma_S = \frac{25(-0{,}5833) \cdot 0{,}1269}{37/648 \cdot (0{,}1269)^4} = -125\ MPa$$

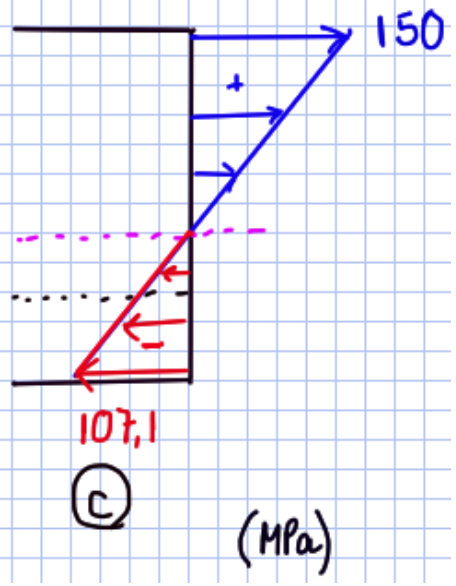
Seção C:

$$\sigma_I = \frac{(-30)(0{,}4167 \cdot 0{,}1269)}{37/648 \cdot (0{,}1269)^4} = -107{,}1\ MPa$$

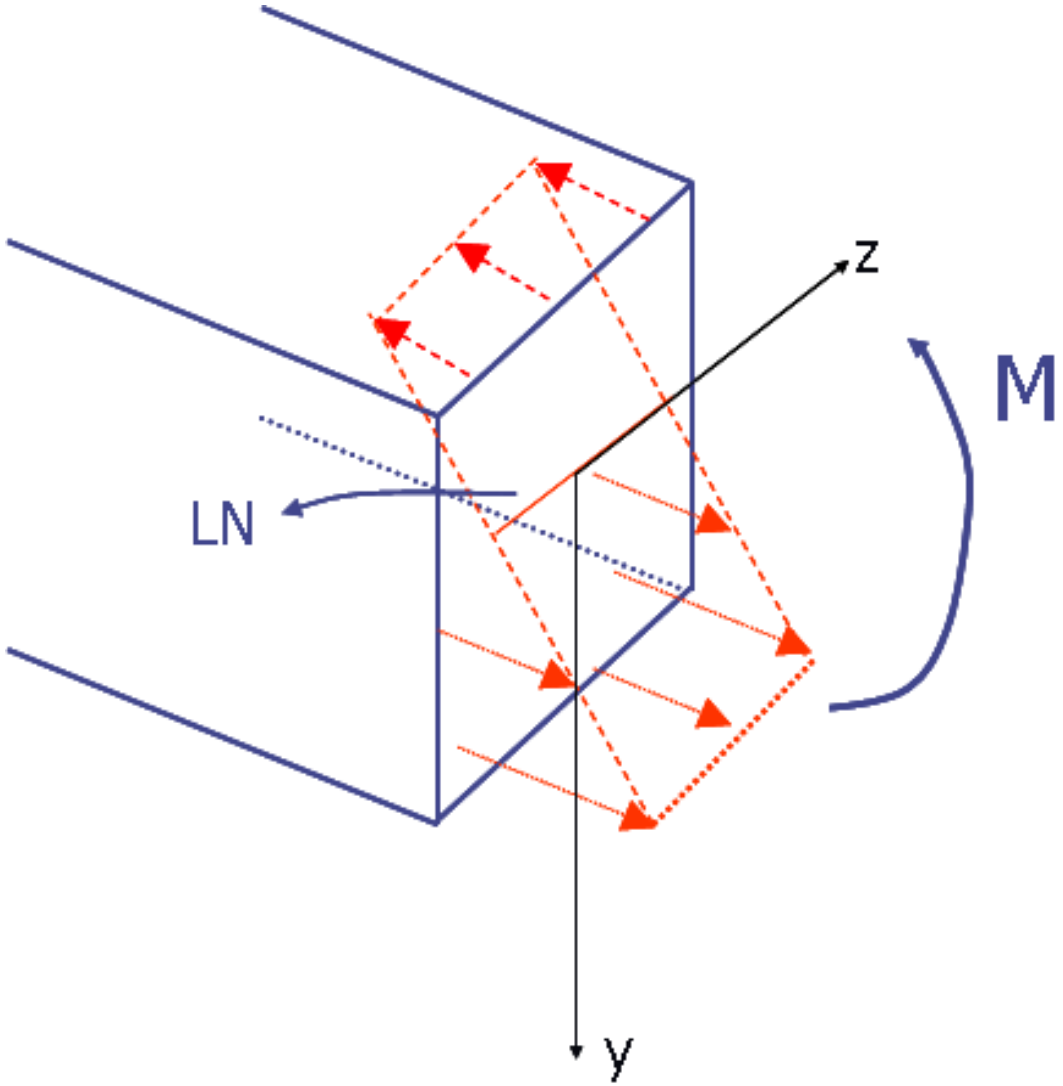
$$\sigma_S = \frac{(-30)(-0{,}5833 \cdot 0{,}1269)}{37/648\ (0{,}1269)^4} = 150\ MPa$$

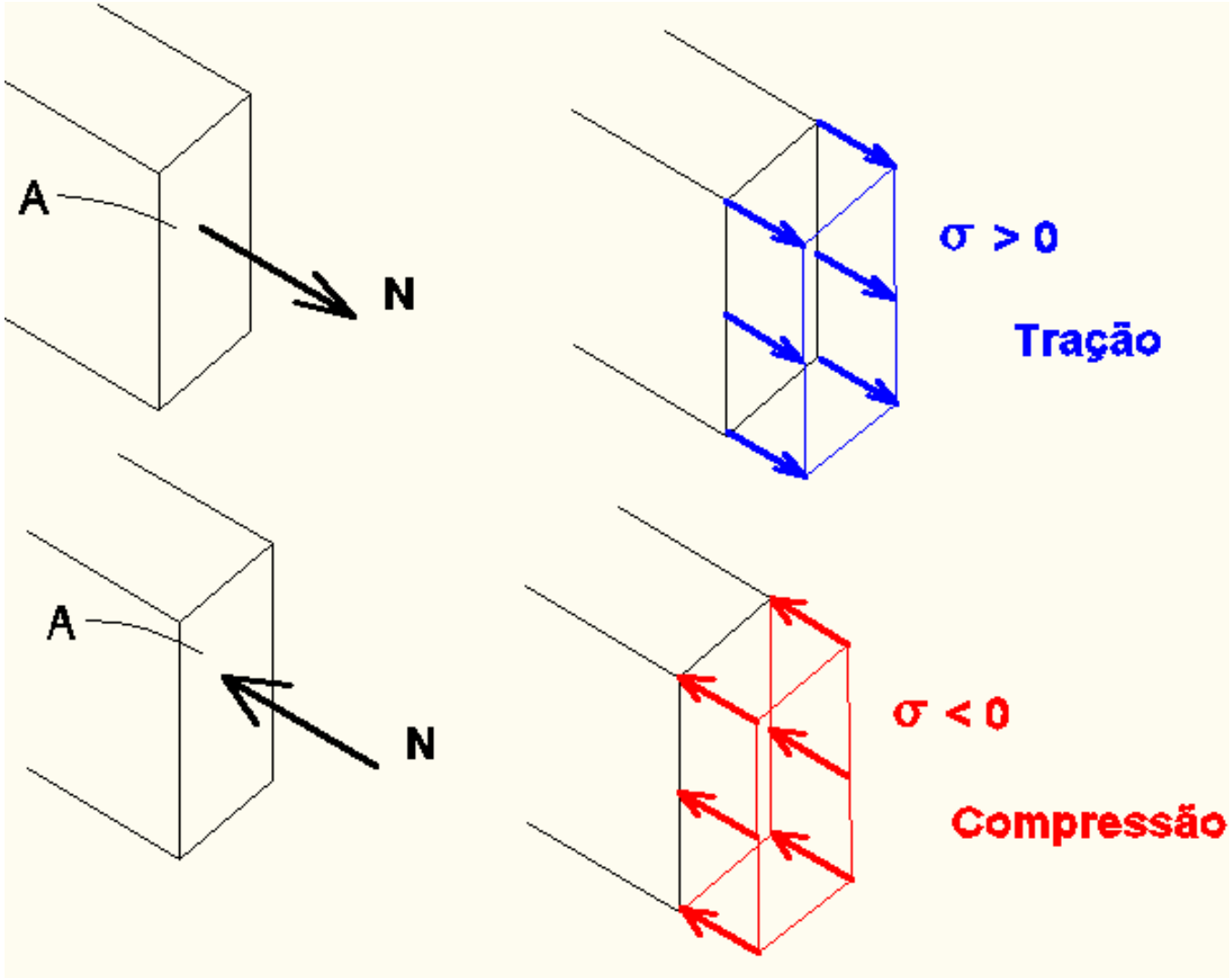






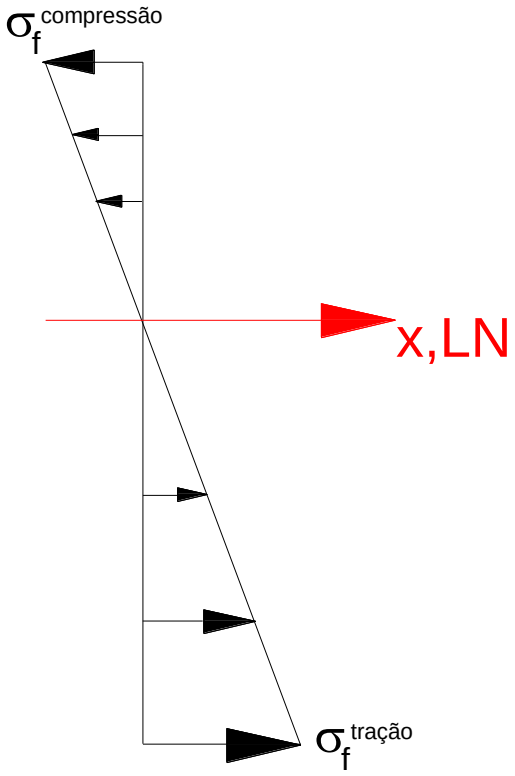
FLEXÃO COMPOSTA



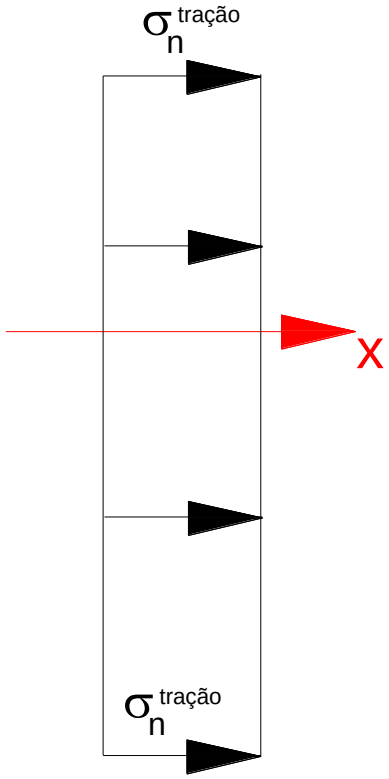


FLEXÃO PURA + ESFORÇO NORMAL

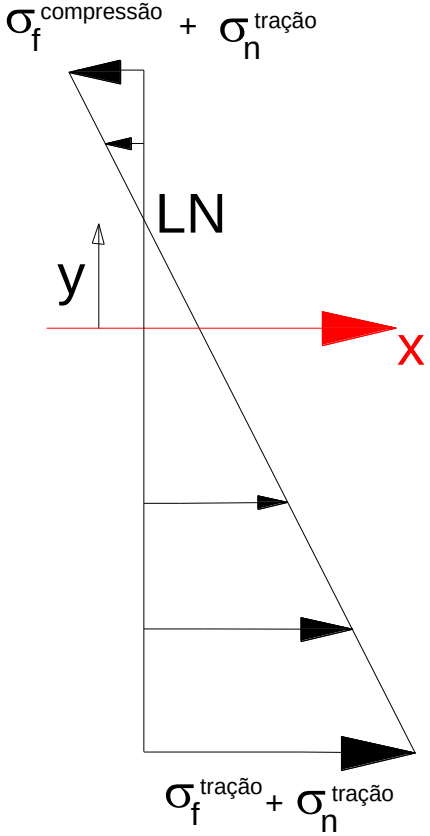
FLEXÃO COMPOSTA



a) distribuição de tensão
- efeito de flexão



b) distribuição de tensão - efeito de tração



c) distribuição de tensão
- efeito de flexão + tração

$$\sigma_x = \frac{M_z}{I_z} \cdot y + \frac{P}{A}$$

FLEXÃO COMPOSTA

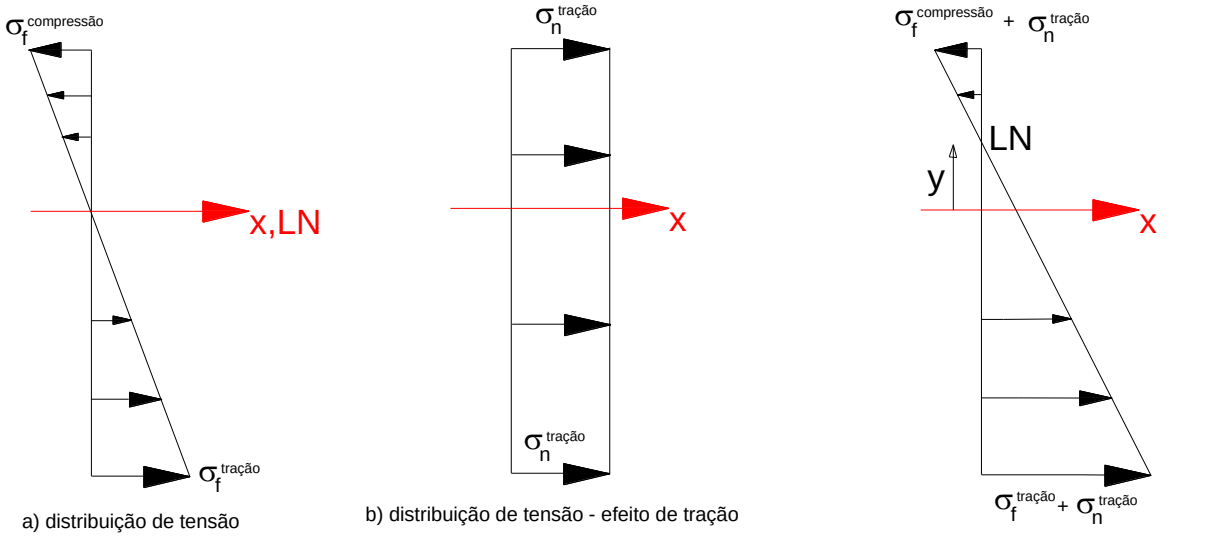
Duas observações podem ser feitas neste caso:

1. Podem-se ter seções totalmente tracionadas ou comprimidas;

2. A posição da LN é alterada, não passando mais pelo CG da seção.

Posição da LN:

$$\sigma_x = \frac{M_z}{I_z} \cdot y_{LN} + \frac{P}{A} = 0 \rightarrow y_{LN} = -\frac{P\,I_z}{M_z.A}$$



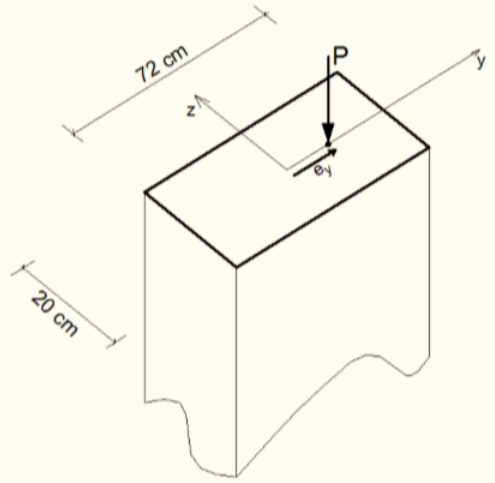
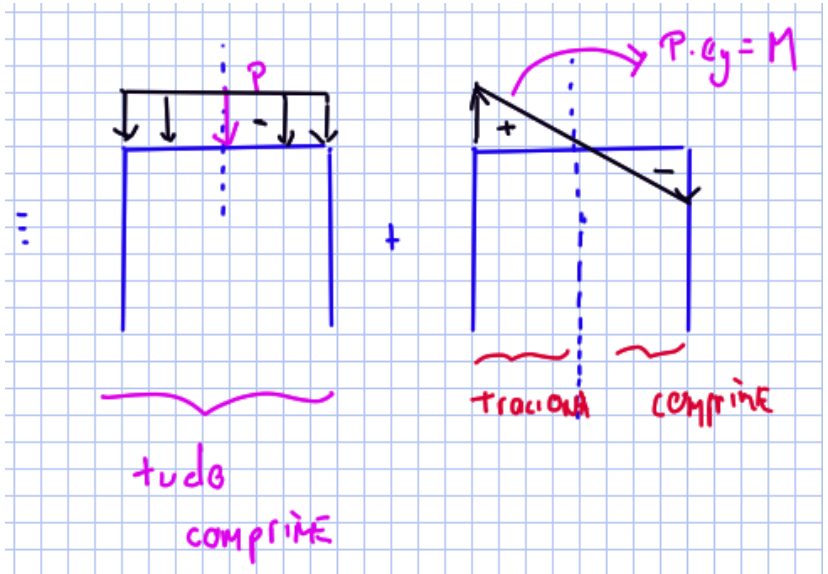
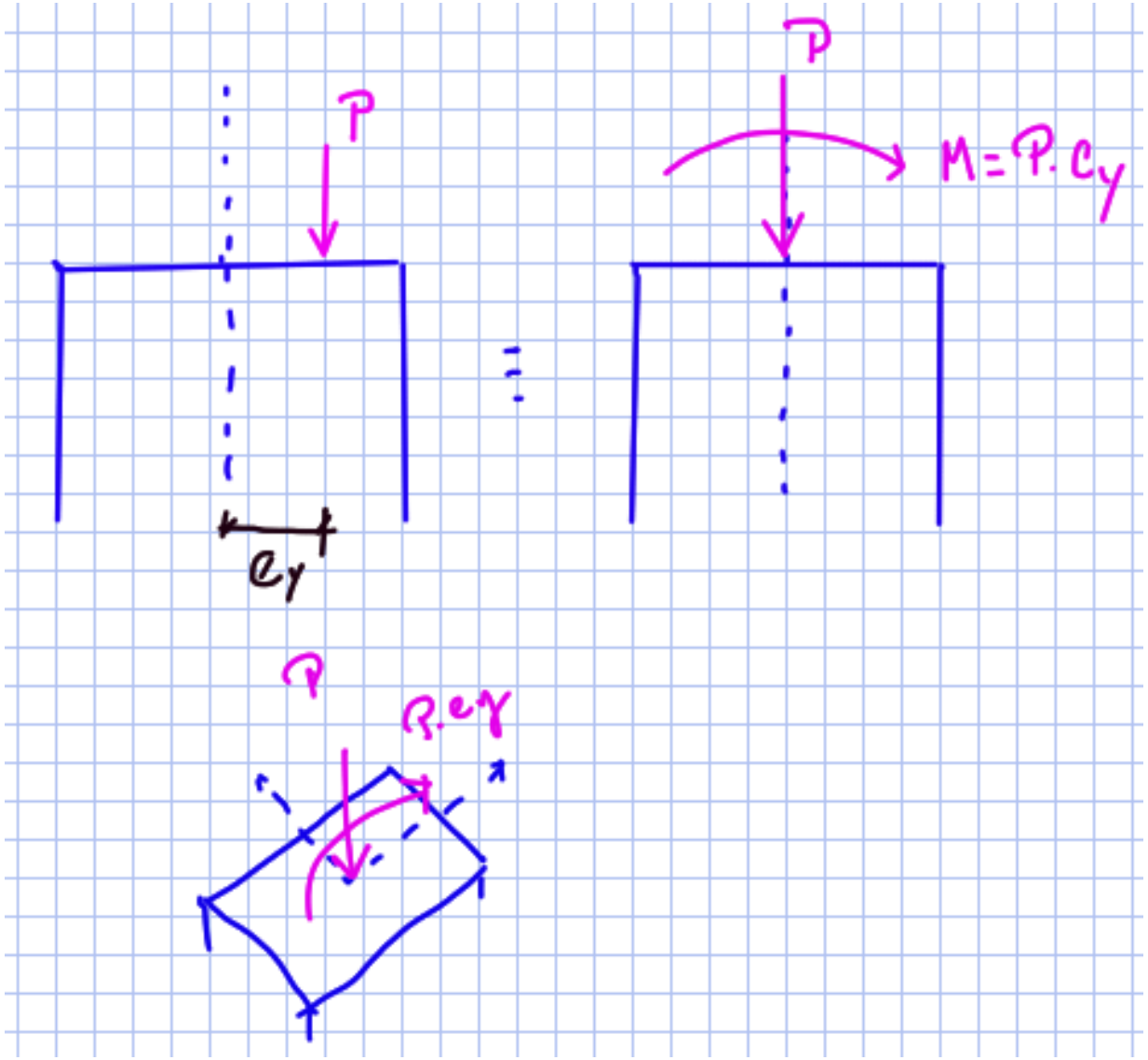
a) distribuição de tensão - efeito de flexão

b) distribuição de tensão - efeito de tração

c) distribuição de tensão - efeito de flexão + tração

EXEMPLO 5

6. Um bloco retangular tem o peso desprezível e está submetido a uma força vertical P = 420 kN e a excentricidade e_y = 20 cm, conforme desenho. Obter o máximo valor de tensão de tração.



Respostas: $\sigma_{tracao} = \dfrac{(-420).0{,}20 \cdot (-0{,}36)}{\dfrac{0{,}2.0{,}72^3}{12}} - \dfrac{420}{0{,}2.0{,}72} = 1.944{,}4 \;\; kN/m^2$