PCS 3528-PCS 3828

Exercício 11

Uma empresa possui três máquinas. Em um dia, cada máquina que se encontra funcionando pode quebrar com probabilidade **p**, independente das outras máquinas. No final de cada dia, as máquinas que quebraram são enviadas para reparo. Elas são reparadas uma a uma. Quando o reparador possui uma ou mais máquinas para reparar, ele consegue colocar em funcionamento uma única máquina ao término desse dia com probabilidade **q**. Seja Xn o número de máquinas funcionando ao final do dia n, depois que todas as quebras e reparos tenham ocorrido.

a) Montar o Modelo de Markov de tempo discreto

Nas próximas questões considerar **p = 0.1 e q = 1.**

b) Qual a fração de dias que começam com j máquinas em funcionamento, j = 0, 1,2,3 ?
c) Qual é o número médio de máquinas em funcionamento no início de um dia?
d) Qual o tempo de permanência médio em cada estado?

Exercício 12

Uma empresa possui três máquinas. Cada máquina apresenta taxa de falha **λ** e falha de forma independente das outras máquinas. Quando cada máquina falha é reparada com uma taxa de reparo **μ**. Seja Xn o número de máquinas funcionando num determinado instante de tempo.

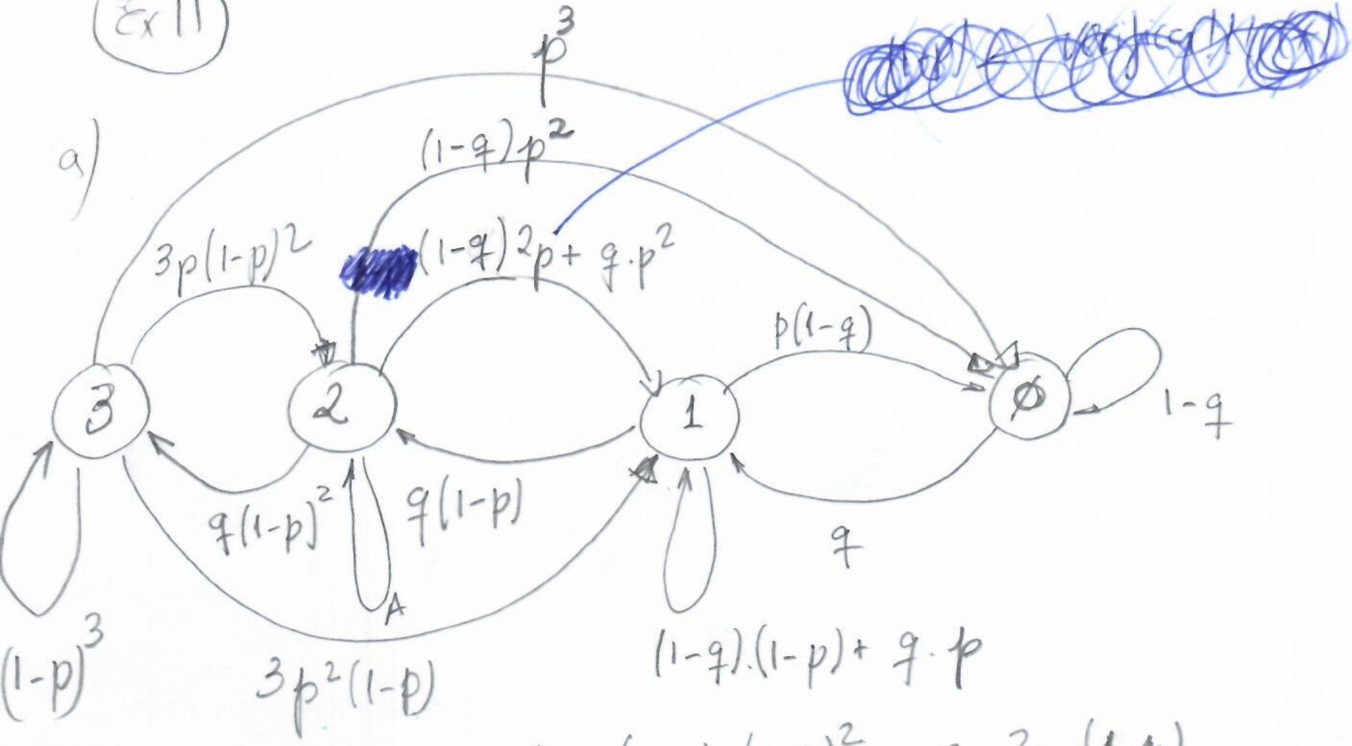
a) Montar o Modelo de Markov de tempo contínuo

Nas próximas questões considerar **λ = 0.1 falhas/dia e μ = 1 reparo/dia.**

b) Qual a fração de dias que começam com j máquinas em funcionamento, j = 0, 1,2,3 ?
c) Qual é o número médio de máquinas em funcionamento?
d) Qual o tempo de permanência médio em cada estado?

Ex 11

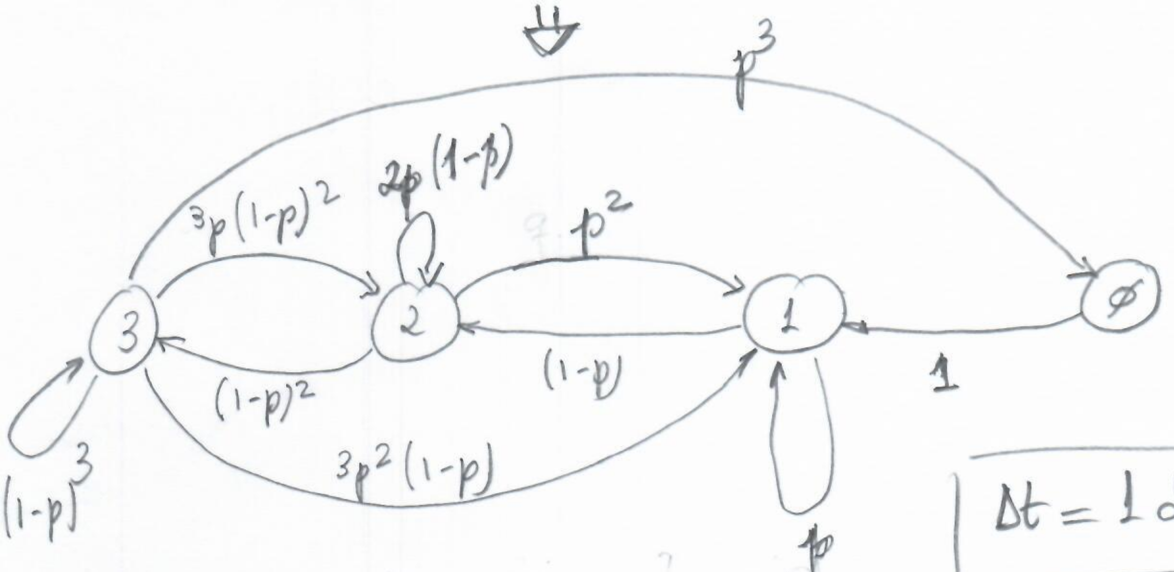
a)



$$A = (1-q).(1-p)^2 + q.2p.(1-p)$$

$p = 0{,}1$ e $q = 1$

$\Downarrow$



$\boxed{\Delta t = 1 \text{ dia}}$

b)

$$\Pi_3(t+\Delta t) = \Pi_3(t)(1-p)^3 + \Pi_2(t)(1-p)^2$$

$$\Pi_2(t+\Delta t) = \Pi_3(t)\,3p(1-p)^2 + \Pi_2(t).\,2p(1-p) + \Pi_1(t)(1-p)$$

$$\Pi_1(t+\Delta t) = \Pi_3(t)\,3p^2(1-p) + \Pi_2(t).\,p^2 + \Pi_1(t).\,p + \Pi(\varnothing)$$

$$\Pi_0(t+\Delta t) = \Pi_3(t).\,p^3$$

Em regime permanente:

$$\begin{cases} \pi_3 = (1-p)^3 \pi_3 + (1-p)^2 \pi_2 \\ \pi_2 = 3p(1-p)^2 \pi_3 + 2p(1-p)\pi_2 + (1-p)\pi_1 \\ \pi_1 = 3p^2(1-p)\pi_3 + p^2 \pi_2 + p \cdot \pi_1 + \pi_0 \\ \pi_0 = p^3 \cdot \pi_3 \end{cases}$$

$p = 0{,}1$

$$\begin{cases} \pi_3 = 0{,}729 \cdot \pi_3 + 0{,}81\,\pi_2 \\ \pi_2 = 0{,}243\,\pi_3 + 0{,}18\,\pi_2 + 0{,}9\,\pi_1 \\ \pi_1 = 0{,}027\,\pi_3 + 0{,}01\,\pi_2 + 0{,}1\,\pi_1 + \pi_0 \\ \boxed{\pi_0 = 0{,}001\,\pi_3} \end{cases}$$

$\pi_0 + \pi_1 + \pi_2 + \pi_3 = 1$

$0{,}271\,\pi_3 = 0{,}81 \cdot \pi_2 \longrightarrow \pi_2 = \dfrac{0{,}271}{0{,}81} \cdot \pi_3$

$$\boxed{\pi_2 = 0{,}33457\,\pi_3}$$

$0{,}82\,\pi_2 = 0{,}243\,\pi_3 + 0{,}9\,\pi_1$

$\pi_2 = 0{,}2963\,\pi_3 + 1{,}09756\,\pi_1$

$0{,}33457\,\pi_3 = 0{,}2963\,\pi_3 + 1{,}09756\,\pi_1$

$0{,}03827\,\pi_3 = 1{,}09756\,\pi_1 \Rightarrow \boxed{\pi_1 = 0{,}0348686\,\pi_3}$

$$0{,}0001\,\pi_3 + 0{,}0347986\,\pi_3 + 0{,}33457\,\pi_3 + \pi_3 = 1$$

$$\pi_3 \cdot 1{,}3694686 = 1 \qquad \boxed{\pi_3 = 0{,}73021}$$

$$\boxed{\pi_2 = 0{,}2443}$$

$$\boxed{\pi_1 = 0{,}02541} \qquad \boxed{\pi_0 = 0{,}00073021}$$

c)

$$\text{Nº Medio} = 3 \cdot 0{,}73021 + 2 \cdot 0{,}2443 + 1 \cdot 0{,}02541 + 0$$

$$\boxed{\text{Nº Medio} = 2{,}70464}$$

d)

$$T_{medio_3} = \frac{1}{p_{saida}} = \frac{1}{p^3 + 3p^2(1-p) + 3p(1-p)^2}$$

$$T_{medio_3} = \frac{1}{0{,}001 + 0{,}027 + 0{,}243} = \underline{\underline{3{,}69 \text{ dias}}}$$

$$T_{medio_2} = \frac{1}{p_{saida}} = \frac{1}{p^2 + (1-p)^2} = \frac{1}{0{,}01 + 0{,}81} = \underline{\underline{1{,}219 \text{ dias}}}$$

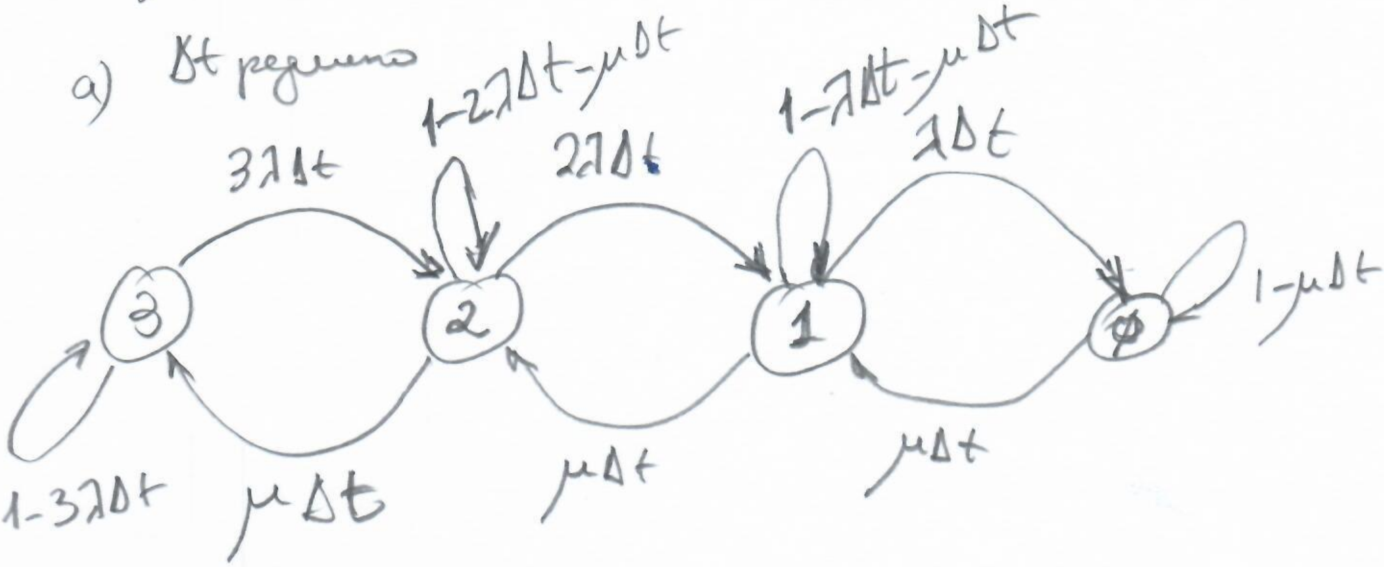
$$T_{medio_1} = \frac{1}{p_{saida}} = \frac{1}{(1-p)} = \frac{1}{0{,}9} = \underline{\underline{1{,}111 \text{ dias}}}$$

$$T_{medio_0} = \frac{1}{p_{saida}} = \frac{1}{1} = \underline{\underline{1 \text{ dia}}}$$

Exercício 12

λ, μ

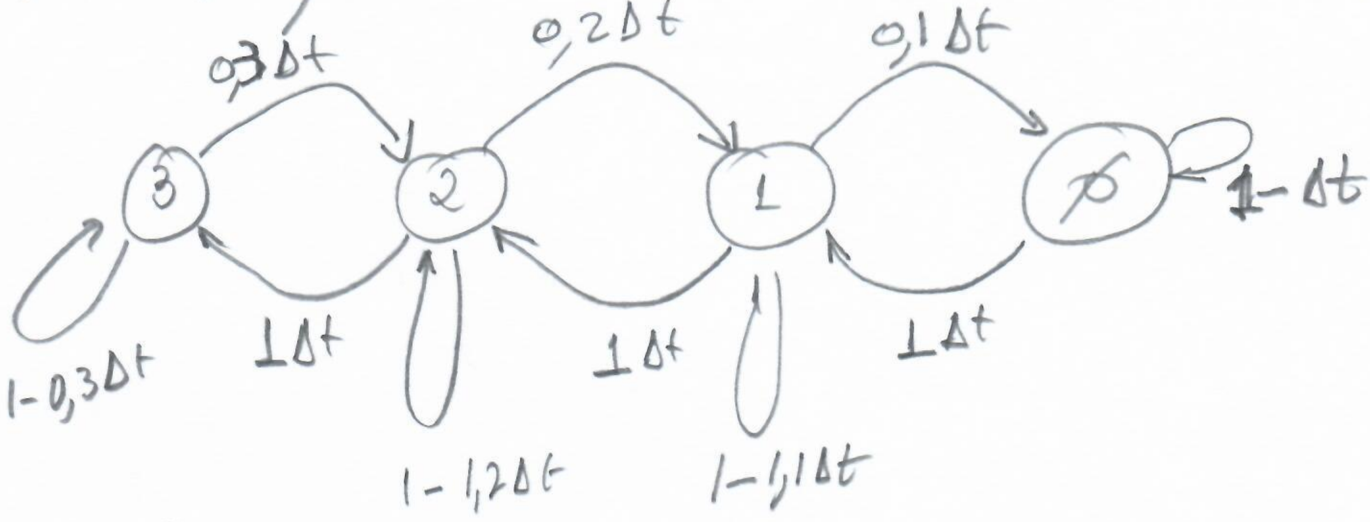
a) Δt pequeno



$$
\begin{cases}
p_3(t+\Delta t) = p_3(t)\,(1-3\lambda\Delta t) + p_2(t)\,\mu\Delta t \\
p_2(t+\Delta t) = p_3(t)\cdot 3\lambda\Delta t + p_2(t)\cdot(1-2\lambda\Delta t-\mu\Delta t) + p_1(t)\,\mu\Delta t \\
p_1(t+\Delta t) = p_2(t)\cdot 2\lambda\Delta t + p_1(t)\cdot(1-\lambda\Delta t-\mu\Delta t) + p_0(t)\cdot\mu\Delta t \\
p_0(t+\Delta t) = p_1(t)\cdot\lambda\Delta t + p_0(t)\cdot(1-\mu\Delta t)
\end{cases}
$$

$$
\begin{cases}
\dfrac{dp_3(t)}{dt} = -3\lambda\, p_3(t) + \mu\, p_2(t) \\[2ex]
\dfrac{dp_2(t)}{dt} = 3\lambda\, p_3(t) - (2\lambda+\mu)\, p_2(t) + \mu\, p_1(t) \\[2ex]
\dfrac{dp_1(t)}{dt} = 2\lambda\, p_2(t) - (\lambda+\mu)\, p_1(t) + \mu\, p_0(t) \\[2ex]
\dfrac{dp_0(t)}{dt} = \lambda\, p_1(t) - \mu\, p_0(t)
\end{cases}
$$

b) $\lambda = 0{,}1 \quad \mu = 1$



Em regime permanente:

$$\begin{cases} 0 = -0{,}3\,p_3 + p_2 \\ 0 = 0{,}3\,p_3 - 1{,}2\,p_2 + p_1 \\ 0 = 0{,}2\,p_2 - 1{,}1\,p_1 + p_0 \\ 0 = 0{,}1\,p_1 - p_0 \end{cases} \Rightarrow \underline{p_1 = 10\,p_0}$$

$$p_3 + p_2 + p_1 + p_0 = 1$$

$$0{,}2\,p_2 = +1{,}1\,p_1 - p_0$$

$$0{,}2\,p_2 = 11\,p_0 - p_0 = 10\,p_0$$

$$\underline{p_2 = 50\,p_0}$$

$$0{,}3\,p_3 = p_2 = 50\,p_0 \qquad p_3 = \frac{50}{0{,}3}\cdot p_0 \Rightarrow \boxed{p_3 = 166{,}67\,p_0}$$

$$(166{,}67 + 50 + 10 + 1)\,p_0 = 1$$

$$\Rightarrow \boxed{p_0 = 0{,}00439}$$

$$\boxed{p_1 = 0{,}0439}$$

$$\boxed{p_2 = 0{,}2196}$$

$$\boxed{p_3 = 0{,}7317}$$

c) $N_{médio} = 3 \cdot 0{,}7317 + 2 \cdot 0{,}2196 + 0{,}0439$

$$\boxed{N_{médio} = 3{,}678}$$

d) $T_{permanencia} = \dfrac{1}{\lambda_{saída}}$

$$T_{p_3} = \frac{1}{0{,}3} \Rightarrow \underline{3{,}33 \text{ dias}}$$

$$T_{p_2} = \frac{1}{1{,}2} = \underline{\underline{0{,}83 \text{ dias}}}$$

$$T_{p_1} = \frac{1}{1{,}1} = \underline{0{,}909 \text{ dias}}$$

$$T_{p_0} = \frac{1}{1} = \underline{\underline{1 \text{ dia}}}$$