Aula 5 - Cadeias de Markov

(Capítulo 7 - Cassandras)

Os Cadeias de Markov constituem um rico framework para estudar muitos Sistemas de Eventos Discretos de interesse como jogos, mercado de estoque, sistemas computacionais e redes de comunicação.

Função Básica: $P[X(t_{k+1}) = x' \mid X(t_k) = x]$;
dado o estado corrente $X(t_k)$ é possível calcular a probabilidade do próximo estado $X(t_{k+1})$ independente da memória passada.

Por meio dos Modelos de Markov podem ser estudados:

- → Cadeias de Markov de Tempo Discreto
- → Cadeias de Markov de Tempo Contínuo

Para resolver os Modelos de Markov podem ser resolvidos um sistema de Equações Diferenciais que podem dar subsídios para dois tipos de soluções:

- Soluções Transientes
- Soluções Estáveis/Estacionárias (steady-state/stationary).

Cadeias de Markov de Tempo Discreto

Instantes de Tempo: $0, 1, 2, \ldots k$
Eventos Estocásticos sequenciais: $\{x_1, x_2, \ldots\}$
Sem Memória: dado um estado corrente x_k, o valor do próximo estado depende apenas do estado x_k e não de qualquer evento passado.

Um dos principais objetivos é determinar a probabilidade (2)
de se localizar em vários estados em diferentes tempos.

Especificação do Modelo

Para especificar o Modelo de Markov vamos necessitar:

1. Espaço de Estados: $X = \{0, 1, 2, \ldots\}$
2. Probabilidade do Estado Inicial
3. Probabilidade de Transição $p(x', x)$ onde x é o estado corrente e x' o próximo estado.

$$p_{ij}(K) = P(X_{K+1} = j \mid X_K = i)$$

instante K

(probabilidade de transição num passo de tempo)

$$\sum_{\text{todo } j} p_{ij}(K) = 1$$

(soma de todas as transições a partir do estado i)

Quando p_{ij} é independente de K para todo $i, j \in X$, temos a denominada cadeia de Markov Homogênea:

$$p_{ij} = P[X_{K+1} = j \mid X_K = i],$$

ou seja, uma forma "estacionária" na transição.

3

A equação $p_{ij}(K) = P[X_{K+1}=j \mid X_K = i]$ se refere a transição de estados que ocorre em um passo de tempo.

Uma extensão natural é considerar a transição de estados que ocorre após n passos.

$$p_{ij}(K, K+n) = P[X_{K+n}=j \mid X_K = i]$$

Vamos condicionar o evento $[X_{K+n}=j \mid X_K=i]$ a um estado $[X_u = r]$ para u tal que $K < u \leq K+n$.

$$\Rightarrow p_{ij}(K, K+n) = \sum_{\text{todos } r} P[X_{K+n}=j \mid X_u = r, X_K = i] \cdot \underbrace{P[X_u = r \mid X_K = i]}_{p_{ir}(K,u)}$$

Pela propriedade de "sem memória"

$$P[X_{K+N}=j \mid X_u = r, X_K = i] = P[X_{K+N}=j \mid X_u = r] = p_{rj}(u, K+n)$$

$$\Rightarrow \boxed{p_{ij}(K, K+N) = \sum_{\text{todos } r} p_{ir}(K,u) \cdot p_{rj}(u, K+n)}$$

(Equação de Chapman-Kolmogorov)

Pode-se expressar na forma de Matriz.

$$H(K, K+n) \equiv [p_{ij}(K, K+N)] \quad i,j = 0,1,2,\dots$$

$$\Rightarrow \boxed{H(K, K+n) = H(K,u) \cdot H(u, K+n)}$$

Matriz Transição de Probabilidade

$$P = [p_{ij}] \quad i,j = 0,1,2,\ldots$$

Exemplo 1: Processo de Chamada Telefônica Simples

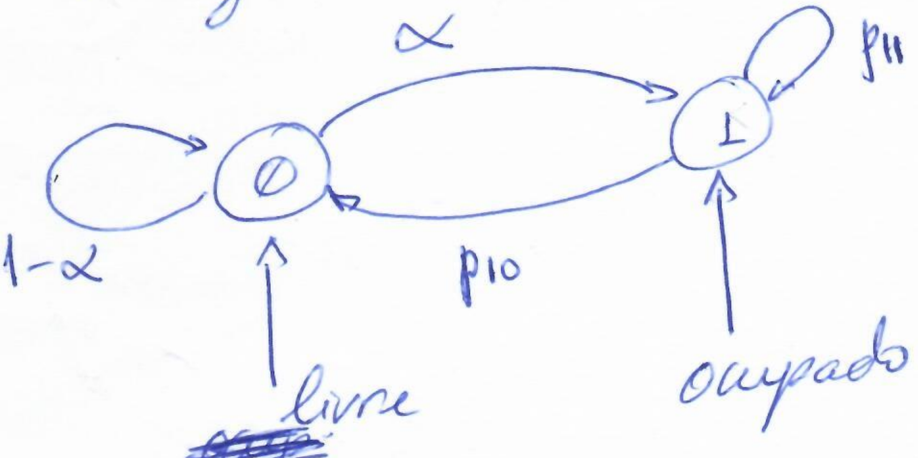
Vamos considerar a linha de tempo de pequenos intervalos, denominados "time-slot".

Seja:
- α – probabilidade de uma chamada ocorrer no time-slot
- β – probabilidade de uma chamada terminar no time-slot.

Se uma ~~chega~~ chamada chega e a linha está ocupada, a chamada é perdida.

Se uma chamada chega e a outra termina no mesmo time-slot, a nova chamada será processada.

O diagrama de transição de estado:



$$p_{10} = \beta \cdot (1-\alpha)$$

$$p_{11} = 1 - p_{10} = 1 - \beta(1-\alpha) = \overbrace{(1-\beta)}^{\text{chamada inicial não termina}} + \overbrace{\alpha\beta}^{\text{chamada inicial termina e chega outra}}$$

Portanto a matriz $\underline{P}$ é:

$$\underline{P} = \begin{array}{c|cc} & 0 & 1 \\ \hline 0 & 1-\alpha & \alpha \\ 1 & \beta(1-\alpha) & (1-\beta)+\alpha\beta \end{array}$$

← destino

→ soma "1"

→ soma "1"

ORIGEM

Pode-se obter essa matriz P das <u>equações de estado</u>:

$$p_0(\overset{k}{\cancel{t}}+1) = p_0(\overset{k}{\cancel{t}}).(1-\alpha) + p_1(\overset{k}{\cancel{t}}).p_{10}$$

$$p_1(\overset{k}{\cancel{t}}+1) = p_0(\overset{k}{\cancel{t}}).\alpha + p_1(\overset{k}{\cancel{t}}).p_{11}$$

passo de tempo

$$\underset{(2\times 1)}{\begin{bmatrix} p_0(\overset{k}{\cancel{t}}+1) \\ p_1(\overset{k}{\cancel{t}}+1) \end{bmatrix}} = \begin{array}{c} \\ 0 \\ 1 \end{array} \underset{(2\times 2)}{\overset{\begin{array}{cc} 0 & 1 \end{array}}{\begin{bmatrix} (1-\alpha) & \beta(1-\alpha) \\ \alpha & (1-\beta)+\alpha\beta \end{bmatrix}}} \underset{(2\times 1)}{\begin{bmatrix} p_0(\overset{k}{\cancel{t}}) \\ p_1(\overset{k}{\cancel{t}}) \end{bmatrix}}$$

destino

← origem

<u>ou</u>

destino

$$\boxed{\begin{bmatrix} p_0(t+1) & p_1(t+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p_0(t) & p_1(t) \end{bmatrix} \begin{array}{c|cc} & 0 & 1 \\ \hline 0 & (1-\alpha) & \alpha \\ 1 & \beta(1-\alpha) & (1-\beta)+\alpha\beta \end{array}}$$

origem

(2×2) (1×2)

[1×2] [2×2]

Exemplo 2:

Seja um Sistema Computacional com 2 processadores.

α: probabilidade de uma tarefa ser submetida no time-slot (apenas uma)

O Processador Principal é o 1. Se os dois processadores estão ocupados e chega um novo job, ele é perdido.

β: probabilidade de se encerrar a tarefa no time-slot

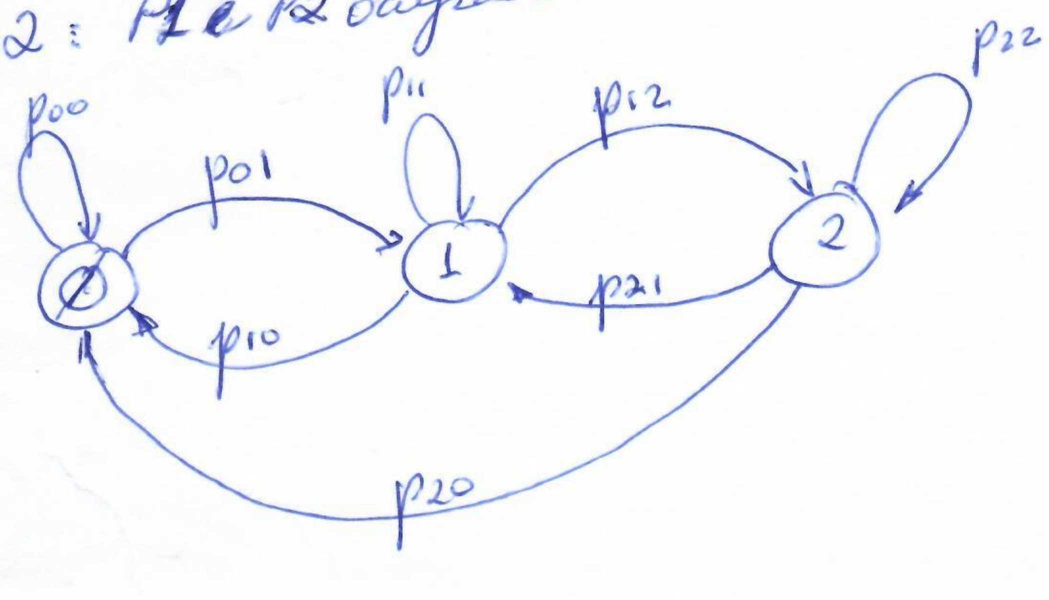
Se um job chega num time-slot que os 2 processadores estavam ocupados e um job vai liberar nesse time-slot, o job chegando nesse time-slot será atendido.

Estados: $\{0, 1, 2\}$

0: livres

1: P1 ocupado ou P2 ocupado

2: P1 e P2 ocupado.



$p_{01} = \alpha \qquad p_{00} = 1 - \alpha \qquad p_{02} = \emptyset$

$p_{10} = \beta(1-\alpha)$

$p_{12} = \alpha(1-\beta)$

$p_{21} = 2\beta(1-\beta).(1-\alpha) + \beta.\beta.\alpha$

$p_{20} = \beta^2(1-\alpha)$

$p_{11} = \beta.\alpha + (1-\beta).(1-\alpha)$

$p_{22} = (1-\beta)^2 + 2\beta(1-\beta).\alpha$

<u>Matriz P^T</u>: (Transição de Probabilidades)

$$\begin{array}{cc} & \text{Destino} \\ \text{ORIGEM} & \begin{bmatrix} p_{00} & p_{01} & p_{02} \\ p_{10} & p_{11} & p_{12} \\ p_{20} & p_{21} & p_{22} \end{bmatrix} \end{array}$$

Tempo de Permanência num Estado

O sistema permanece no <u>estado i</u> por <u>"n steps"</u>

$K;\ K+1;\ K+2;\ \ldots + K+(n-1)$ [steps]

no n-ésimo step depois do k-ésimo step
o sistema sai do estado i.

Como é um sistema sem memória, pii permanece o mesmo independente do que aconteceu antes, ou seja, quanto tempo de já estava no estado i.

$$\boxed{E[V(i)=n] = \frac{1}{1-pii}}$$

$$P[V(i)=n] = (pii)^{n-1}(1-pii)$$

[Distribuição geométrica com parâmetro pii]

permanencia no estado i por n steps.

A distribuição geométrica nos sistemas de Eventos Discretos com tempo discreto apresenta esta propriedade de "sem memória".

No caso ~~dos~~ tempos contínuos é a distribuição exponencial.

$$E[t] = \frac{1}{\lambda}$$

Análise de Transiente

Vetores de Probabilidade em (K+1) e (K)

$$\pi(K+1) = P^T \cdot \pi(K)$$

Matriz de Transição de Probabilidade

$K=0 \Rightarrow \pi(1) = P \cdot \pi(\emptyset)$

$K=1 \Rightarrow \pi(2) = P \cdot \pi(1) = P^2\, \pi(\emptyset)$

$\vdots$

$K \geq 1 \Rightarrow \boxed{\pi(K) = P^K \cdot \pi(\emptyset)}$; $K = 1, 2, \ldots$

(probabilidade de estar nos diversos estados no slot de tempo K.)

Exemplo 3: mesmo problema do Exemplo 2 com $\alpha = 0{,}5$ e $\beta = 0{,}7$.

$$\Rightarrow P^T = \begin{bmatrix} 0{,}5 & 0{,}5 & 0 \\ 0{,}35 & 0{,}5 & 0{,}15 \\ 0{,}245 & 0{,}455 & 0{,}3 \end{bmatrix} \quad e \quad \pi^T(0) = [1, 0, 0]$$

Perguntas:

(1) Qual a probabilidade do sistema estar vazio no $k=3$

$$\Pi(3) = \Pi(0) . \underline{P}^3$$

$$P^3 = \begin{bmatrix} 0,405875 & 0,496625 & 0,0975 \\ 0,3954125 & 0,4946 & 0,1099875 \\ 0,3866712 & 0,4928788 & 0,12045 \end{bmatrix}$$

$$\Pi(3) = [0,405875 \quad 0,496625 \quad 0,0975]$$

$$\underline{\Pi_0(3) = 0,405875}$$

(2) Qual a probabilidade que nenhum job ~~tenha terminado~~ termine no 3º passo ($k=3$)

$$p = \Pi_0(3) . \underbrace{\text{prob. de não terminar job}}_{1} + \Pi_1(3) . \underbrace{\text{prob de não terminar job}}_{(1-\beta)} + \Pi_2(3) . \underbrace{\text{prob de não terminar job}}_{(1-\beta)^2}$$

$$p = 0,405875 . 1 + 0,496625 . 0,3 + 0,0975 . (1-0,7)^2$$

$$\underline{p = 0,5636375}$$

(3) Qual a probabilidade do sistema permanecer vazio nos slots 1 e 2?

$p = P(\text{vazio em } K=2 \text{ e } K=1) \Rightarrow$

$$\underbrace{P(\text{Vazio em } K=2 \mid \text{vazio em } K=1)}_{p_{00}} \cdot P(\text{Vazio em } K=1)$$

$p_{00} \cdot \pi_0(1)$

$\pi(1) = \pi(\emptyset) \cdot P$

$\pi(1) = [0{,}5 \quad 0{,}5 \quad 0]^T \Rightarrow \pi_0(1) = 0{,}5$

$\Rightarrow p = 0{,}5 \cdot 0{,}5 \Rightarrow \boxed{p = 0{,}25}$

$$\pi(1) = \begin{bmatrix} 0{,}5 & 0{,}35 & 0{,}245 \\ 0{,}5 & 0{,}5 & 0{,}455 \\ 0 & 0{,}15 & 0{,}3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\pi(1) = \begin{bmatrix} 0{,}5 \\ 0{,}5 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Análise de Estado Estável
(Steady State Analysis)

Pergunta: Qual a probabilidade da cadeia de Markov se achar no estado i num longo tempo já passado?

O longo tempo aqui, quer dizer que a probabilidade do sistema permanecer em diversos estados tende a um valor assintótico, não variando mais no tempo.

$$\pi_j = \lim_{K \to \infty} \pi_j(K)$$

$$\pi(K+1) = P \cdot \pi(K)$$

$$\downarrow$$

$$\boxed{\pi = \pi \cdot \underline{P}} \quad e \quad \boxed{\sum_{\text{todos } j} \pi_j = 1}$$

Exemplo 4:

Seja a cadeia de Markov do Exemplo 2 com $\alpha = 0{,}5$ e $\beta = 0{,}7$.

$$\underline{P}^T = \begin{bmatrix} 0{,}5 & 0{,}5 & 0 \\ 0{,}35 & 0{,}5 & 0{,}15 \\ 0{,}245 & 0{,}455 & 0{,}3 \end{bmatrix}$$

Calcular as probabilidades assintóticas.

$$[\pi_0\ \pi_1\ \pi_2]^T = \begin{bmatrix} 0,5 & 0,5 & 0 \\ 0,35 & 0,5 & 0,15 \\ 0,245 & 0,455 & 0,3 \end{bmatrix} \cdot [\pi_0\ \pi_1\ \pi_2]^T$$

$$\begin{cases} \pi_0 = 0,5\,\pi_0 + 0,35\,\pi_1 + 0,245\,\pi_2 \\ \pi_1 = 0,5\,\pi_0 + 0,5\,\pi_1 + 0,455 \cdot \pi_2 \\ \pi_2 = 0 \cdot \pi_0 + 0,15 \cdot \pi_1 + 0,3\,\pi_2 \end{cases} \qquad \begin{bmatrix} \pi_0 \\ \pi_1 \\ \pi_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,5 & 0,35 & 0,245 \\ 0,5 & 0,5 & 0,455 \\ 0 & 0,15 & 0,3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \pi_0 \\ \pi_1 \\ \pi_2 \end{bmatrix}$$

$$\pi_0 + \pi_1 + \pi_2 = 1,0$$

$$\Longrightarrow \boxed{\pi_0 = 0,399} \quad \boxed{\pi_1 = 0,495} \quad \boxed{\pi_2 = 0,106}$$

(Exercícios Tempo Discreto)

Cadeias de Markov em Tempo Contínuo

O estudo das Cadeias de Markov em tempo contínuo é paralelo ao tempo discreto.

Mas não é mais possível usar a matriz P de probabilidade de transição do tempo discreto já que as transições não são mais sincronizadas por um clock único, que impõe a estrutura de tempo discreto.

Na nova matriz, $\underline{p_{ij}(t)}$ representa a probabilidade de transição do estado $\underline{i}$ para o estado j, dentro de um intervalo de duração $\underline{t}$. Claramente é uma tarefa mais desafiadora já que precisamos especificar todos os valores da função $\underline{p_{ij}(t)}$.

Uma solução para este problema é introduzir o conceito de taxa de informação, em que várias transições podem ocorrer num determinado tempo.

(Equação de Chapman - Kolmogorov)

Tempo Discreto

$$H(k, k+n) = H(k, u) . H(u, k+n)$$

Tempo Contínuo

$$\boxed{H(s,t) = H(s,u) . H(u,t) \quad (s \leq u \leq t)}$$

A Matriz da Taxa de Transição - Q

Considerando a equação Chapman - Kolmogorov para o intervalo Δt:

$$H(s, t+\Delta t) = H(s,t) . H(t, t+\Delta t)$$

$$H(s, t+\Delta t) - H(s,t) = H(s,t) . H(t, t+\Delta t) - H(s,t)$$

$$H(s, t+\Delta t) - H(s,t) = H(s,t) [H(t, t+\Delta t) - I]$$

Matriz Identidade

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{H(s, t+\Delta t) - H(s,t)}{\Delta t} = H(s,t) . \lim_{\Delta t \to 0} \frac{[H(t, t+\Delta t) - I]}{\Delta t}$$

Por definição: $Q(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{[H(t, t+\Delta t) - I]}{\Delta t}$

→ Matriz de Taxa de Transição.

$$\Rightarrow \boxed{\frac{d\,H(s,t)}{dt} = H(s,t)\,.\,Q(t)}$$

Em Cadeias Homogêneas $H(t, t+\Delta t) = P(\Delta t)$

$\Rightarrow$ $Q(t) = Q = cte$ // (taxa de transição constante).

Reescrevendo a equação diferencial tem-se

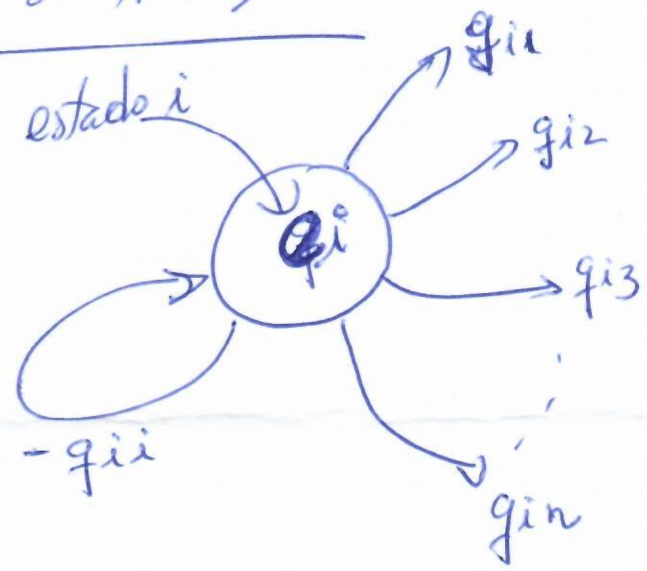
intervalo de tempo

$$\begin{cases} \dfrac{d\,P(\tau)}{d\tau} = P(\tau)\,.\,Q \\ p_{ij}(0) = \begin{cases} 1 & j = i \\ 0 & j \neq i \end{cases} \end{cases}$$

assume-se que a transição de estados entre i e $j \neq i$ não pode ocorrer no instante zero.

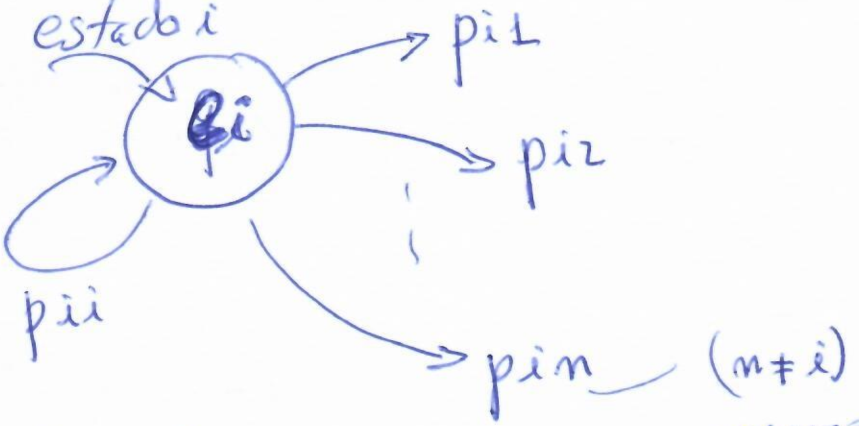
$$\Rightarrow \boxed{P(\tau) = e^{Q\tau}}$$

Interpretação dos Elementos da Matriz de Taxa de Transição Q



$$\boxed{\sum_{\text{Todo } j \neq i} q_{ij} = -q_{ii}} \Rightarrow \boxed{\sum_{\text{Todo } j} q_{ij} = 0}$$

Outra forma de entender:



A probabilidade de permanecer no mesmo estado é igual a (1 − probabilidade de deixar o estado).

$$\Rightarrow p_{ii} = 1 - [p_{i1} + p_{i2} + \cdots p_{i,(i-1)}, p_{i(i+1)}, \cdots p_{in}]$$

$$\frac{dp_{ii}}{dt} = -\left[\underbrace{\frac{d\,p_{i1}}{dt}}_{q_{i1}} + \underbrace{\frac{dp_{i2}}{dt}}_{q_{i2}} + \cdots + \underbrace{\frac{dp_{in}}{dt}}_{q_{in}}\right]$$

$$\Rightarrow \boxed{-q_{ii} = \sum_{\text{todo } j \neq i} q_{ij}}$$

Probabilidade de Transição

$$P_{ij} = P[X_{k+1} = j \mid X_k = i]$$

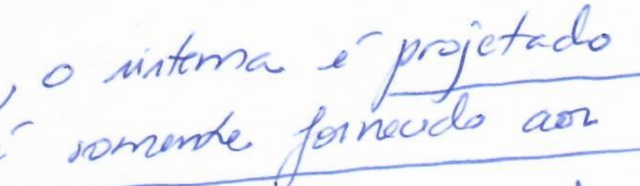
Supondo que as transições ocorrem em instantes de tempo randômico $T_1 < T_2 < \dots < T_k < T_{k+1} < \dots$

$$\Longrightarrow P_{ij} = \frac{\text{taxa de i para j}}{\text{taxa total}}$$

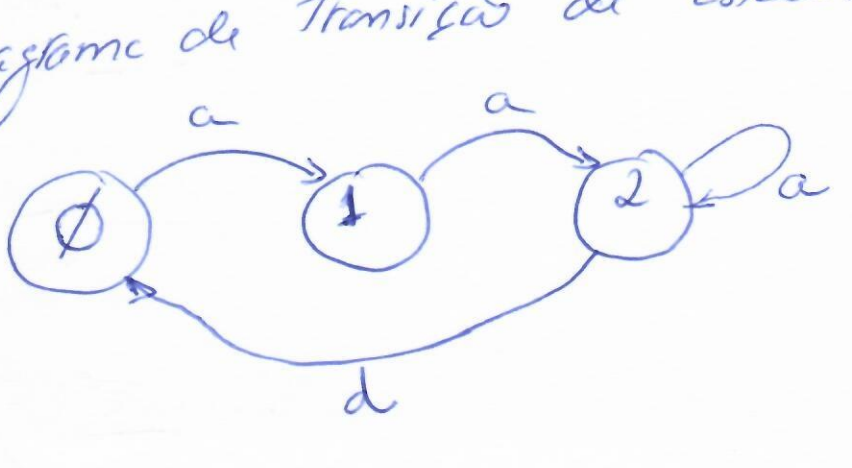
$$\boxed{P_{ij} = \frac{q_{ij}}{-q_{ii}}}$$

Exemplos

Seja um Sistema de Eventos Discretos uma fila com capacidade para 2 clientes. Há 2 eventos diferentes que podem ocorrer: uma chegada $\underline{a}$ e uma saída $\underline{d}$. Entretanto, o sistema é projetado de forma que o serviço é somente fornecido aos 2 clientes simultaneamente.



O Diagrama de Transição de Estados é:



$X = \{0, 1, 2\}$ $\quad$ $\mathcal{E} = \{a, d\}$

$\Gamma(x) = \{a\}$ para $x = 0, 1$

$\Gamma(2) = \{a, d\}$

Assumindo que os eventos a e d ocorrem de acordo com o processo de Poisson com taxa λ e μ respectivamente, chegamos ao Modelo de Markov do sistema, com matriz Q:

$$Q = \begin{bmatrix} -\lambda & \lambda & 0 \\ 0 & -\lambda & \lambda \\ \mu & 0 & -\mu \end{bmatrix}$$

* folha 18 a

$$P_{01} = P_{12} = P_{20} = 1$$

Exemplo ~~Exercício~~ 6:

Um armazem conserva em estoque uma unidade de cada tipo de produto P1 e P2. Um caminhão periodicamente vem para levar um dos produtos. Se ambos estão em estoque, o caminhão dá preferência ao P1.

$x_i = 1$ se P_i está presente no armazem.

$X = \{(x_1, x_2) : x_1 = 0, 1 ; x_2 = 0, 1\}$

Exemplo 5

18a

$$\begin{cases} p_0(t+\Delta t) = p_0(t)(1-\lambda\Delta t) + p_2(t)\mu\Delta t \\ p_1(t+\Delta t) = p_0(t)\lambda\Delta t + p_1(t)(1-\lambda\Delta t) \\ p_2(t+\Delta t) = p_1(t)\lambda\Delta t + p_2(t)(1-\mu\Delta t) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dfrac{p_0(t+\Delta t) - p_0(t)}{\Delta t} = -\lambda p_0(t) + \mu p_2(t) \\ \dfrac{p_1(t+\Delta t) - p_1(t)}{\Delta t} = \lambda p_0(t) - \lambda p_1(t) \\ \dfrac{p_2(t+\Delta t) - p_2(t)}{\Delta t} = \lambda p_1(t) - \mu p_2(t) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dfrac{dp_0(t)}{dt} = -\lambda p_0(t) + \mu p_2(t) \\ \dfrac{dp_1(t)}{dt} = \lambda p_0(t) - \lambda p_1(t) \\ \dfrac{dp_2(t)}{dt} = \lambda p_1(t) - \mu p_2(t) \end{cases}$$

$$P_{01} = \frac{q_{01}}{-q_{00}} = \frac{\lambda}{\lambda} = 1$$

$$\begin{bmatrix} \dot{p}_0 \\ \dot{p}_1 \\ \dot{p}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\lambda & 0 & \mu \\ \lambda & -\lambda & 0 \\ 0 & \lambda & -\mu \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_0(t) \\ p_1(t) \\ p_2(t) \end{bmatrix} \Rightarrow P_{12} = \frac{\lambda}{\lambda} = 1$$

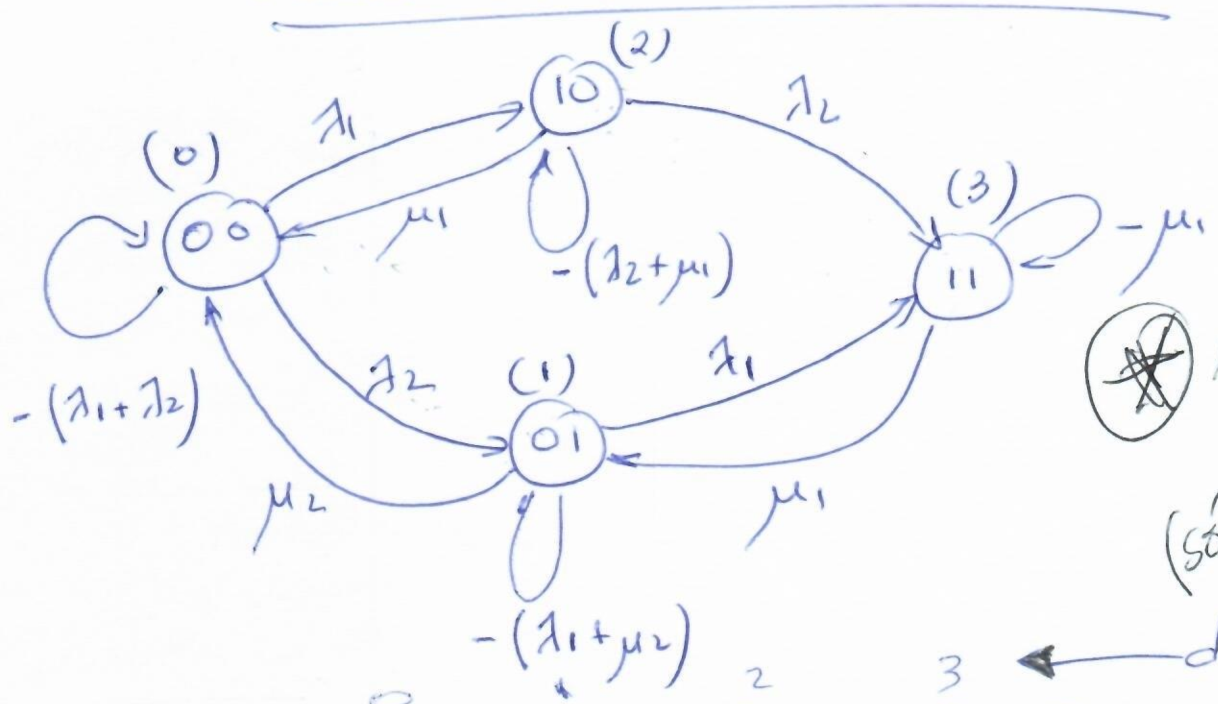
3×3 $\quad$ 3×1

$$P_{20} = \frac{\mu}{\mu} = 1$$

Assume-se que quando $x_i=0$, a taxa λ_i de reposição do produto P_i segue o processo de Poisson.

Assume-se também que quando $P1$ está no armazém, o caminhão vem buscá-lo com taxa μ_1 (Poisson) e μ_2 (Poisson) se for a unidade $P2$.

Modelo de Transição de Estados



usar 19A (só a matriz)

destino

$$Q = \begin{array}{c} \\ 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} 0 & 1 & 2 & 3 \end{array} \\ \begin{bmatrix} -(\lambda_1+\lambda_2) & \lambda_2 & \lambda_1 & 0 \\ \mu_2 & -(\lambda_2+\mu_2) & 0 & \lambda_2 \\ \mu_1 & 0 & -(\lambda_2+\mu_1) & \lambda_2 \\ 0 & \mu_1 & 0 & -\mu_1 \end{bmatrix} \end{array}$$

origem

$P_{01} = \dfrac{\lambda_2}{\lambda_1+\lambda_2}$ $\quad P_{20} = \dfrac{\mu_1}{\lambda_2+\mu_1}$ $\quad P_{02} = \dfrac{\lambda_1}{\lambda_1+\lambda_2}$

$P_{31} = 1$ $\quad P_{03} = 0$ $\quad P_{23} = \dfrac{\lambda_2}{\lambda_2+\mu_1}$ $\quad P_{13} = \dfrac{\lambda_1}{\lambda_1+\mu_2}$

Tempo de Permanência no Estado

Um aspecto fundamental numa cadeia de Markov em tempo contínuo é que a distribuição do tempo de permanência num estado segue a lei exponencial;

$$P[V(i) \leq t] = 1 - e^{-\Lambda(i)t}$$

$E_i[t] = \frac{1}{\Lambda(i)}$

onde $\Lambda(i)$ = soma de todos as taxas associadas a eventos de saída do estado i. $= \sum \lambda_{ij}$

(* Fazer analogia com o MTTF)

Análise em Estado Estável (Steady State Analysis)

A probabilidade do sistema estar num determinado estado j é representado como:

$$\pi_j(t) = P[X(t) = j]$$

A Matriz de Probabilidade será:

$$\Pi(t) = [\pi_0(t); \pi_1(t); \ldots; \pi_j(t); \ldots]$$

Usando a Matriz de Transição $\underline{Q}$ tem-se:

$$\boxed{\Pi(t) = \Pi(0) \cdot \underline{P}(t)}$$

e $\Pi(t) = \Pi(0) \cdot e^{Qt}$

Em regime permanente: $\Pi_j = \lim_{t \to \infty} \Pi_j(t)$

$$\Rightarrow \begin{cases} \Pi = [\Pi_0, \Pi_1, \ldots] \\ \dfrac{d\Pi(t)}{dt} = 0 \end{cases}$$

$$\frac{d\Pi(t)}{dt} = \Pi(0) . e^{Qt} . Q = \Pi(t) . Q$$

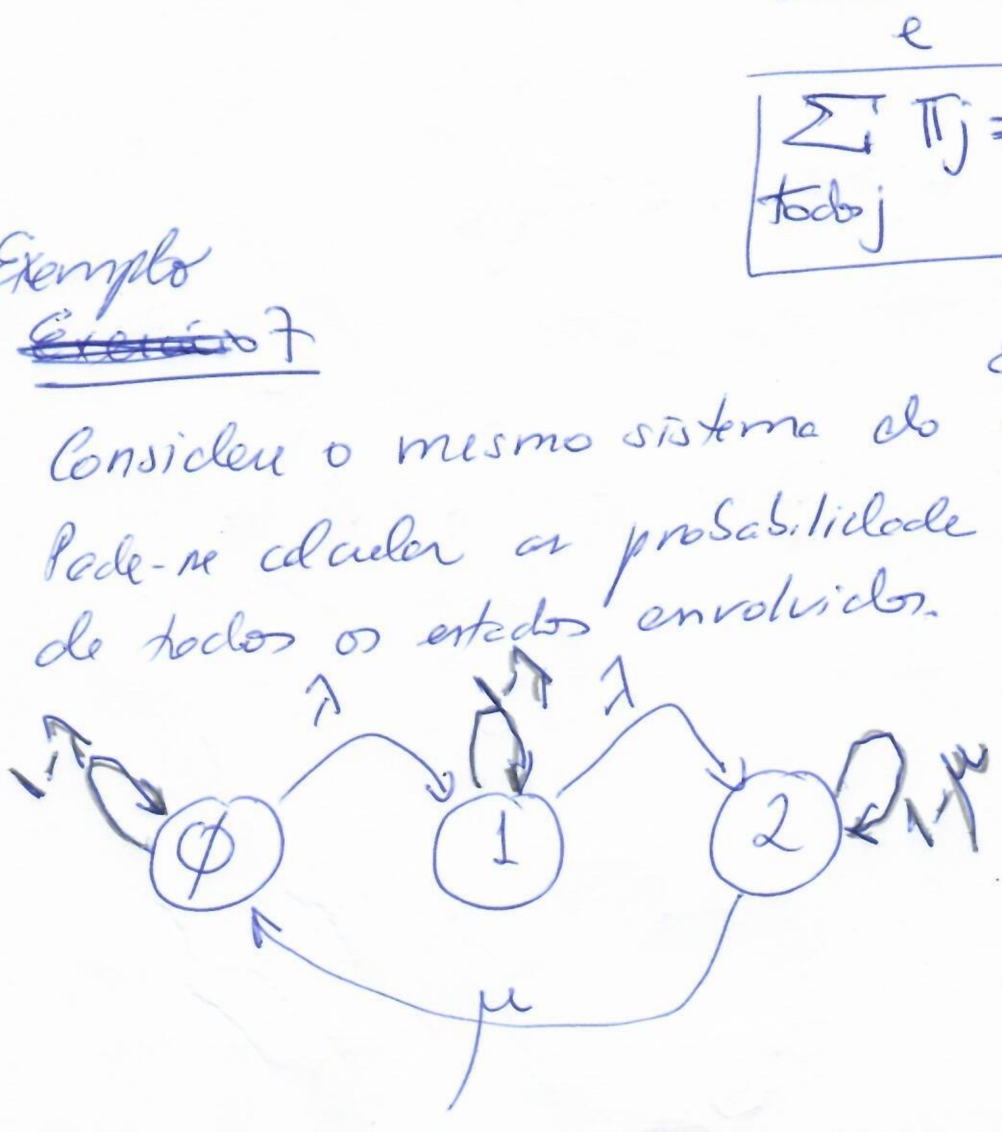
$$\Rightarrow \Pi(t) . Q = 0 \Rightarrow \boxed{\Pi . Q = 0}$$

e

$$\boxed{\sum_{\text{todo } j} \Pi_j = 1}$$

Exemplo
~~Exercício~~ 7

Considere o mesmo sistema do Exemplo ~~Exercício~~ 5.
Pode-se calcular as probabilidade assintóticas de todos os estados envolvidos.



$$\pi Q = 0$$

$$[\pi_0, \pi_1, \pi_2] \cdot \begin{bmatrix} -\lambda & +\lambda & 0 \\ 0 & -\lambda & \lambda \\ \mu & 0 & -\mu \end{bmatrix} = 0$$

$$\left\{\begin{array}{l} -\lambda \pi_0 + \mu \pi_2 = 0 \\ \lambda \pi_0 - \mu \pi_1 = 0 \\ \lambda \pi_1 - \mu \pi_2 = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \pi_0 = \pi_1 = \frac{\mu}{2\mu+\lambda}$$

$$\pi_2 = \frac{\lambda}{2\mu+\lambda}$$

Se fosse de dizer teríamos: (Processo de Poisson)

$$\left\{\begin{array}{l} p_0(k+1) = p_2(k)\mu + p_0(k)(1-\lambda) \\ p_1(k+1) = p_0(k)\lambda + p_1(k)(1-\lambda) \\ p_2(k+1) = p_1(k).\lambda + p_2(k).(1-\mu) \end{array}\right.$$

em regime permanente

$$\left.\begin{array}{l} p_0 = \mu p_2 + (1-\lambda) p_0 \\ p_1 = \lambda p_0 + (1-\lambda) p_1 \\ p_2 = \lambda p_1 + (1-\mu) p_2 \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} 0 = \mu p_2 - \lambda p_0 \\ 0 = \lambda p_0 - \lambda p_1 \\ 0 = \lambda p_1 - \mu p_2 \end{array}\right.$$