Introdução Fuzzy

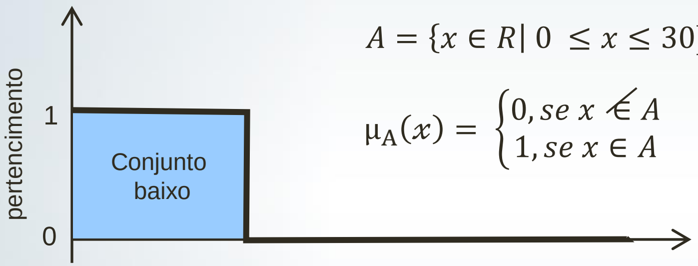
SEP 5836 Técnicas de Suporte à Decisão Aplicadas à Gestão de Desempenho de Cadeias de Suprimento

Teoria dos conjuntos Fuzzy

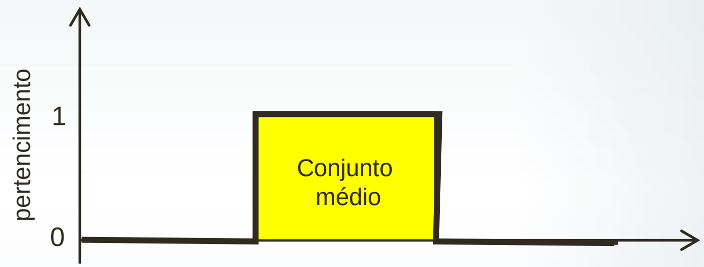
- Na teoria clássica, um elemento está ou não está contido em um conjunto. O pertencimento é total (100%) ou zero;

$$A = \{x \in R \mid 0 \leq x \leq 30\}$$

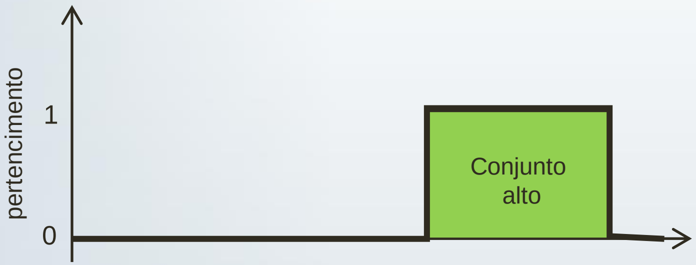
$$\mu_A(x) = \begin{cases} 0, se\ x \notin A \\ 1, se\ x \in A \end{cases}$$



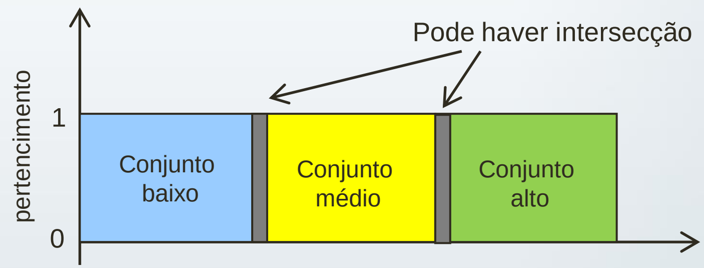
Resultados variando numa escala
Ex: desempenho em algum atributo, peso, altura etc



Resultados variando numa escala
Ex: desempenho em algum atributo, peso, altura etc



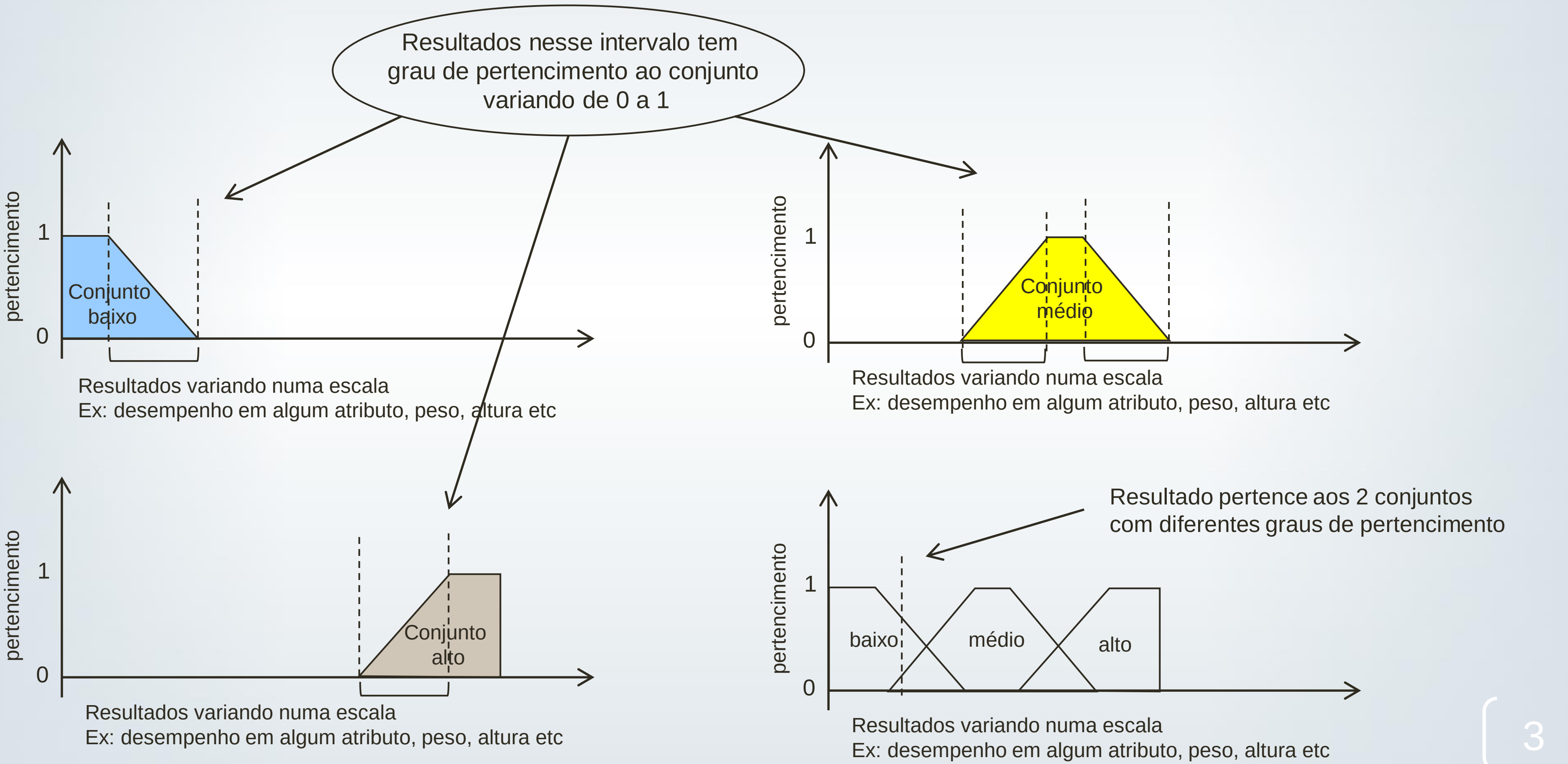
Resultados variando numa escala
Ex: desempenho em algum atributo, peso, altura etc



Resultados variando numa escala
Ex: desempenho em algum atributo, peso, altura etc

Teoria dos conjuntos Fuzzy

- Na teoria fuzzy, o pertencimento de um elemento em um determinado conjunto pode assumir valores intermediários;



Teoria dos conjuntos Fuzzy

- De um modo geral, um conjunto fuzzy é definido como:

$$\tilde{A} = \{x, \mu_A(x)\},\ x \in X$$

Onde

$$\mu_A(x) : X \rightarrow [0,1]$$

é a função de pertinência de $\tilde{A}$ e $\mu_A(x)$ é o grau de pertinência de x em $\tilde{A}$.

- Um conjunto fuzzy discreto é representado por:

$$\tilde{A} = \mu_A(x_1)/x_1 + \mu_A(x_2)/x_2 + \ldots + \mu_A(x_n)/x_n = \sum_{i=1}^{n} \mu_A(x_i)/x_i$$

Onde adição significa composição e barra significa “em relação a”

Teoria dos conjuntos Fuzzy

- Um conjunto fuzzy contínuo é representado por:

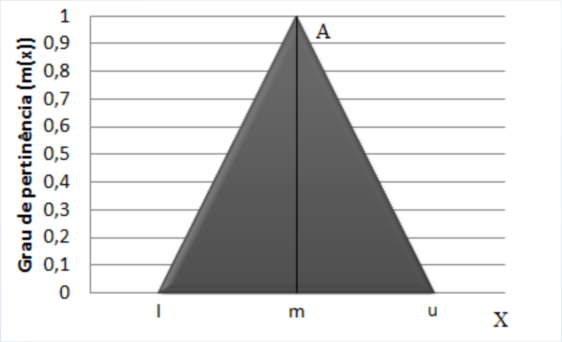
$$\widetilde{A} = \int \mu_A(x_i)/\, x_i$$

Onde a integral significa composição e barra significa “em relação a”

Obs: para mais detalhes da teoria de conjuntos fuzzy ver: H.J. Zimmermann, Fuzzy set theory and its applications, second ed., Kluwer Academic, Boston, 1991.

Números fuzzy

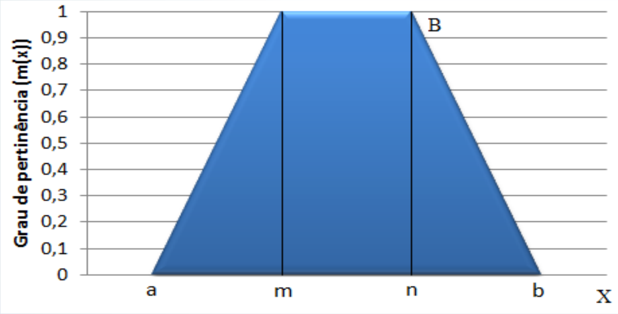
- Um número fuzzy representa um conjunto fuzzy em universo discreto ou contínuo;
- Um número fuzzy é normalmente representado pela função de pertinência;
  - Um número fuzzy (contínuo) com função de pertinência triangular é descrito graficamente por segmentos lineares na forma de um triângulo.
  - Representado numericamente pelos termos: (l, m, u)



$$\mu(x) = \begin{cases} 0, \ se \ x \leq l \\ \frac{x-l}{m-l}, \ se \ x \in [l, m] \\ \frac{u-x}{u-m}, \ se \ x \in [m, u] \\ 0, \ se \ x \geq u \end{cases}$$

Teoria dos conjuntos Fuzzy

- Número fuzzy com função de pertinência trapezoidal, representado numericamente por: (a, m, n, b)



$$\mu(x) = \begin{cases} 0, & se\ x \leq a \\ \dfrac{x-a}{m-a}, & se\ x \in [a,m] \\ 1, & se\ x \in [m,n] \\ \dfrac{b-x}{b-m}, & se\ x \in [n,b] \\ 0, & se\ x \geq b \end{cases}$$

Teoria dos conjuntos Fuzzy

- Todo número fuzzy deve satisfazer as condições de normalidade e convexidade:
  - **Convexidade**: Um conjunto *fuzzy* é convexo quando satisfaz a condição:

$$\mu_A\,[\lambda\, x_1 + (1-\lambda)x_2] \geq \min\,[\mu_A(x_1), \mu_A(x_2)]$$

$\lambda \in [0{,}1]$ e x_1, $x_2 \in X$.

  - **Normalidade**: Ao menos um dos elementos deve ter grau de pertinência igual a 1, conforme

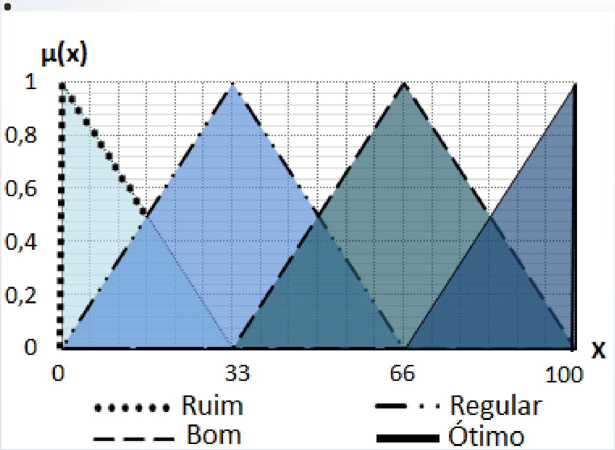
$$\sup \tilde{A}\,(\mathrm{x})_{x\,\epsilon\, X} = 1$$

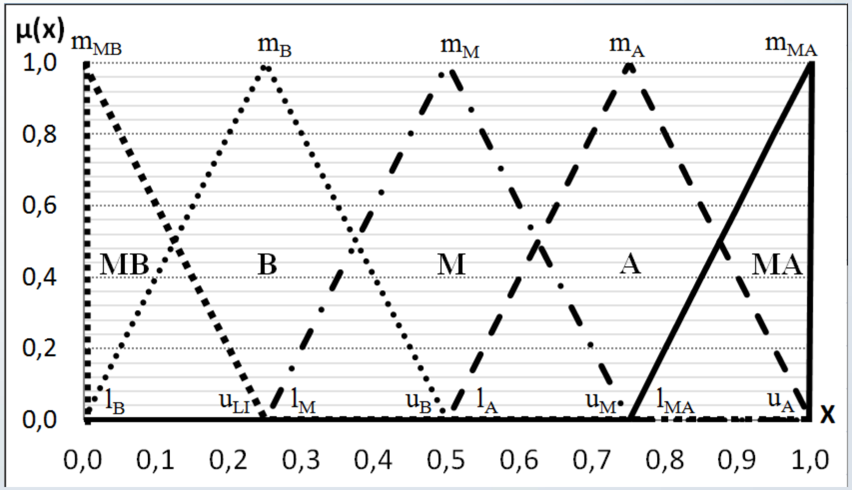
Exemplo

- Para o número fuzzy triangular dado por (5, 6, 9), com x variando no intervalo [0, 10]:
  - Representar graficamente esse número fuzzy;
  - Qual o grau de pertinência de x quando:
    - X = 5,3
    - X = 6,0
    - X = 6,5
    - X = 9,0

Variáveis linguísticas

- Valores (ou termos linguísticos) da variável são definidos em linguagem natural:
  - Ex: {quente, morno, frio}; {muito baixo, baixo, médio, alto, muito alto}; {péssimo, ruim, médio, bom, excelente}.
- Os termos linguísticos são representados matematicamente por números fuzzy.
- Ex:





Variáveis linguísticas

- Exemplo de descrição de variáveis linguísticas em números fuzzy.

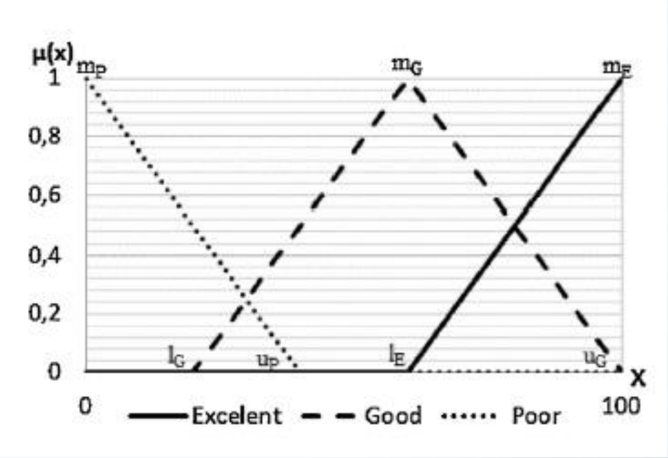


Table 4
Parameters of triangular fuzzy numbers of linguistic terms of sub-criteria.

Sub-criteria	Values of the triangular fuzzy number						
	Poor		Good			Excellent	
	$l_p = m_p$	u_p	l_g	m_g	u_g	l_e	$m_e = u_e$
Environmental adequacy	0	40	25	50	95	40	100
Cost benefit analysis	0	60	50	60	90	60	100
Technical capability	0	50	40	80	90	60	100
Reputation	0	50	30	70	90	70	100
Easy of communication	0	40	30	60	80	70	100
Relationship	0	50	30	70	80	60	100
Quality of conformity	0	40	35	70	85	75	100
Commitment to quality	0	30	25	60	75	80	100
After sale service	0	25	20	65	80	75	100
Flexibility	0	55	40	70	90	70	100
Logistic cost	0	60	50	75	95	75	100
On time delivery	0	45	30	70	90	70	100

Operações algébricas com números fuzzy triangular

Para: $\tilde{A}=(l_1, m_1, u_1)$ e $\tilde{B}=(l_2, m_2, u_2)$,

1. Adição: $\tilde{A}(+)\tilde{B} = (l_1+l_2, m_1+m_2, u_1+u_2)$
2. Subtração: $\tilde{A}(-)\tilde{B} = (l_1-l_2, m_1-m_2, u_1-u_2)$
3. Multiplicação: $\tilde{A}(*)\tilde{B} = (l_1*l_2, m_1*m_2, u_1*u_2)$
4. Divisão: $\tilde{A}(\div)\tilde{B} = (l_1\div u_2, m_1\div m_2, u_1\div l_2)$ $l_1\geq 0, l_2\geq 0$

Operações algébricas com números fuzzy triangular

5. Inverso: $\tilde{A}^{-1} = (1/u_1, 1/m_1, 1/l_1) \quad l_1 \geq 0$

6. Multiplicação por constante:

$$k * \tilde{A} = (k*l_1, k*m_1, k*u_1) \qquad k \geq 0$$

7. Divisão por constante:

$$\tilde{A}/k = (l_1/k, m_1/k, u_1/k) \qquad k \geq 0$$

Operações com conjuntos fuzzy

- Operações de união e intersecção, entre outros:
  - Operações de agregação de números fuzzy
  - Usados como conectivos em operações de lógica booleana (and, or etc);
- Operadores de agregação: T-norma, T-conorma;
  - Operadores t-norma: utilizados para as operações de agregação de conjuntos *fuzzy* baseadas no conectivo lógico *"AND"*

$$\mu_A(x)\ AND\ \mu_B(y)$$

  - Operadores t-conorma: utilizados para as operações de agregação de conjuntos *fuzzy* baseadas no conectivo lógico *"OR"*

$$\mathrm{\mu_A(x)\ OR\ \mu_B(y)\}}$$

Operadores t-norma

- Operador “mínimo”: $\min\{\mu_A(x), \ldots, \mu_B(y)\}$

- Operador “diferença limitada” (Lukasiewicz t-norma):

$$\min\{\mu_A(x) + \mu_B(y), 1.0\}$$

- Operador “produto drástico”:

$$\min\{\mu_A(x), \mu_B(y)\} \quad \text{if} \max\{\mu_A(x), \mu_B(y)\} = 1, \qquad \text{else} = 0$$

- Operador “produto algébrico”:

$$\mu_A(x) \cdot \mu_B(y)$$

Operadores t-norma

- Operador “produto Hamacher”:

$$\frac{\mu_A(x) \cdot \mu_B(y)}{\{\mu_A(x) + \mu_B(y) - \mu_A(x) \cdot \mu_B(y)\}}$$

- Operador “Einstein t-norma”:

$$\frac{\mu_A(x) \cdot \mu_B(y)}{1+\{1-\mu_A(x)\}\{1-\mu_B(y)\}}$$

Operadores t-conorma

- Operador "máximo": $\max\{\mu_A(x), \ldots, \mu_B(y)\}$

- Operador "soma limitada":

$$\max(\mu_A(x) + \mu_B(y) - 1.0,\ 0.0)$$

- Operador "soma drástica":

$$\max(\mu_A(x), \mu_B(y)) \text{ if } \min(\mu_A(x), \mu_B(y)) = 0, \text{else} = 1$$

- Operador "soma probabilística":

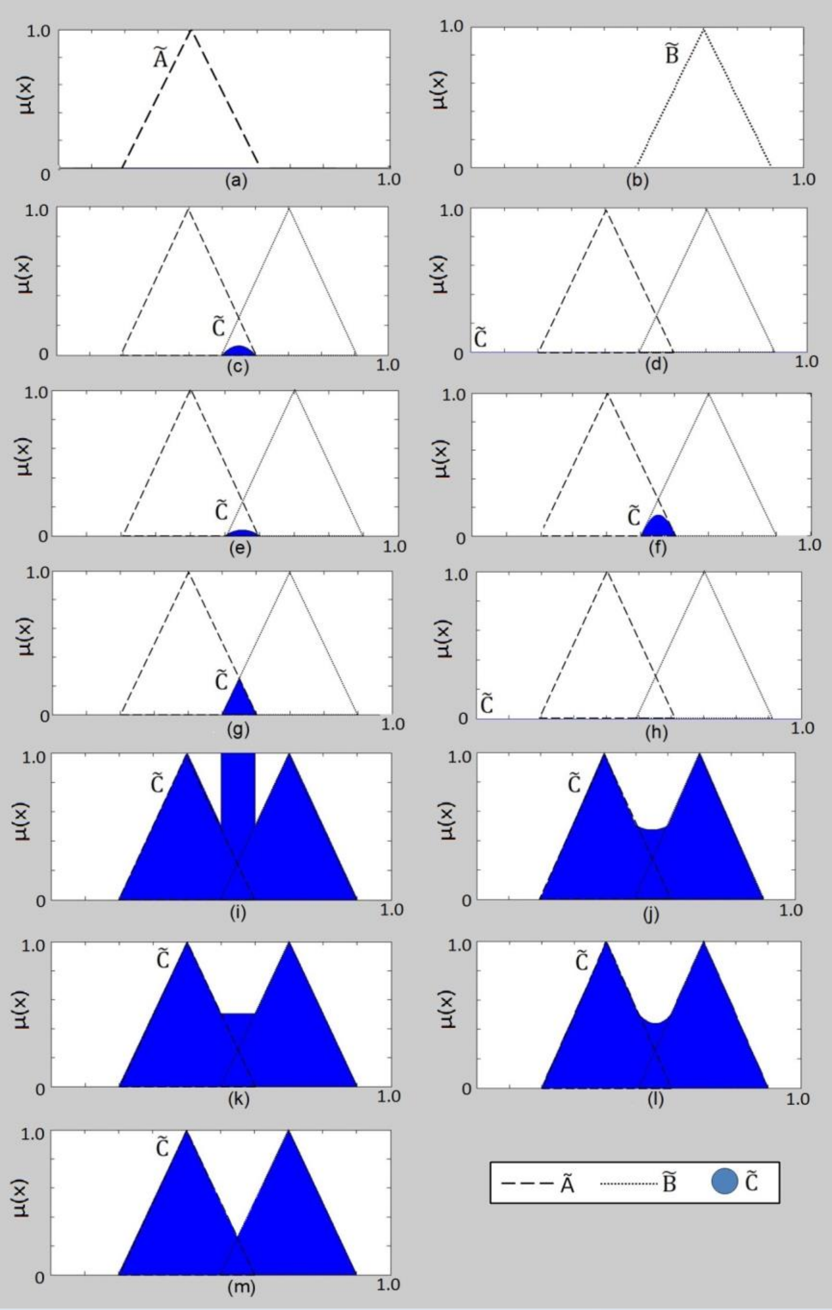
$$\mu_A(x) + \mu_B(y) - \mu_A(x) \cdot \mu_B(y)$$

Operadores t-conorma

- Operador “Einstein t-conorma”:

$$\frac{\mu_A(x) \; + \; \mu_B(y)}{1 + \mu_A(x) \; \cdot \; \mu_B(y)}$$

$\tilde{A}$ (0,20, 0,40, 0,60) e $\tilde{B}$ (0,50, 0,70, 0,90) são agregados para formar o conjunto resultante $\tilde{C}$. operadores t-norma produto algébrico (c), produto drástico (d), Einstein t-norma (e), produto Hamacher (f), mínimo (g) e Lukasiewicz t-norma (h). operadores t-conorma soma drástica (i), Einstein t-conorma (j), Lukasiewic t-conorma (k), soma probabilística (l) e máximo (m).



Operadores de agregação

- Em problemas de tomada de decisão, o uso de operadores t-norma representa um comportamento pessimista por parte dos tomadores de decisão enquanto o uso de t-conormas representa um comportamento otimista