Roteiro de Estudos V: Models with Risk

Docente: Jefferson Bertolai **Monitor:** Bruno de Queiroz Caleman

Exercícios Teóricos:

Atividade 1 *Leitura do capítulo* 6 *de [2].*

Atividade 2 *Apresente usando a notação do capítulo* 5 *de [2] a definição exata dos seguintes conceitos:*

(a) Variável aleatória, s_t.

(b) Sigma algebra, $\mathcal{A}$.

(c) Medida de probabilidade, P

(d) Cadeia de Markov.

(e) Matriz estocástica.

(f) Distribuição estacionária.

Atividade 3 *Considere a discussão da seção* 6.2 *de [2].*

(a) Apresente a definição de Equilíbrio Competitivo (de Arrow-Debreu).

(b) Mostre que o consumo do indivíduo i sob Equilíbrio Competitivo é dado por

$$c_t^i(s^t) = \theta^i e_t(s^t)$$

para algum $\theta^i \in [0, 1]$. *Descreva de forma resumida a importância deste resultado.*

(c) Mostre que o vetor de preços de Equilíbrio Competitivo é dado por

$$p_t(s^t) = \beta^t \frac{\pi_t(s^t)}{\pi_0(s_0)} \left(\frac{e_t(s^t)}{e_t(s_0)} \right)^{-\sigma}. \tag{1}$$

Descreva de forma resumida a importância deste resultado.

(d) Apresente a definição de alocação factível.

(e) Apresente a definição de alocação Pareto ótima.

(f) Apresente a definição de Equilíbrio Sequencial (com Mercados Sequenciais).

(g) Demonstre a equivalência, em termos de resultados de equilíbrio, entre as estruturas de Arrow-Debreu e de Mercados Sequenciais. Utilize o seguinte preço para as "Arrow securities":

$$q_t(s^t, s_{t+1}) = \frac{p_{t+1}(s^{t+1})}{p_t(s^t)}$$

em que $p_t(s^t)$ *é dado por (1).*

Atividade 4 *Usando os preços de Arrow Debreu definidos em (1), apresente o preço em s^t e o retorno em s^{t+1} dos seguintes ativos:*

(a) "Arrow securities".

(b) Título livre de risco.

(c) Árvore de Lucas.

(d) Opção de compra de uma ação da árvore de Lucas.

(e) Opção de venda de uma ação da árvore de Lucas.

Atividade 5 *Enuncie o Teorema* 6.60 *de [2]. Descreva de forma resumida a importância deste resultado.*

Atividade 6 *Demonstre os resultados apresentados nos exemplos* 6.61 *e* 6.62 *de [2].*

Atividade 7 *Considere a discussão da seção* 6.4 *de [2].*

(a) Descreva o Modelo de Crescimento Neoclássico sob incerteza.

(b) Apresente o problema do planejador na forma recursiva.

*(c) Mostre que as condições de otimalidade são dadas por (*6.10*) e (*6.13*).*

(d) Apresente a definição de Equilíbrio Competitivo Recursivo para este modelo.

<u>Exercícios Computacionais:</u>

Atividade 8 *Compute a função valor e a função política para o Modelo de Crescimento Ótimo sob incerteza discutido em aula. Para tal, considere:*

- $\alpha = 0.3$, $\beta = 0.6$, $\delta = 1$, $k \in \{0.04, 0.08, 0.12, 0.16, 0.2\}$

- $z \in \{-1/5, 0, 1/5\}$, *cuja matriz de transição de Markov associada é definida por:*

$$A = \begin{pmatrix} 3/5 & 2/5 & 0/5 \\ 1/5 & 3/5 & 1/5 \\ 0/5 & 2/5 & 3/5 \end{pmatrix} \tag{2}$$

Atividade 9 *Assista às vídeo aulas da semana* 1 *de [1].*

Atividade 10 *Resolva os exercícios, obrigatórios e opcionais, da semana* 1 *de [1].*

Atividade 11 *Assista às vídeo aulas da semana* 2 *de [1].*

Atividade 12 *Resolva os exercícios, obrigatórios e opcionais, da semana* 2 *de [1].*

Atividade 13 *Considere a matriz de transição de Markov A e a distribuição inicial π_0 a seguir:*

$$A = \begin{pmatrix} 1/4 & 3/4 \\ 1/2 & 1/2 \end{pmatrix} \qquad e \qquad \pi_0 = \begin{pmatrix} 2/5 \\ 3/5 \end{pmatrix}. \tag{3}$$

(a) Calcule uma aproximação numérica para a distribuição estacionária associada a A, denotada por $\bar{\pi}$, como o limite da sequência $\{\pi_t\}$ definida por π_0 e pela lei de movimento dada por $\pi'_{t+1} = \pi'_t A$;

(b) *Calcule o menor índice t para o qual $||\pi_{t+1} - \pi_t|| < 10^{-4}$. Tal índice é uma medida que revela a velocidade de convergência da distribuição inicial para a distribuição limite (estacionária).*

Atividade 14 (Adicional/Opcional) *Suponha que você tem como objetivo estudar o padrão de transmissão da COVID-19 em uma determinada população utilizando uma adaptação do modelo de transição de Markov.*

Por simplicidade, suponha que há somente dois estados de saúde, s_0 e s_1. Pessoas no estados s_0 jamais foram infectadas pela Covid19 e, portanto, não contagiam outras pessoas e são passíveis de contaminação. Pessoas no estados s_1 já foram infectadas pela Covid19 e, portanto, transmitem o virus quando em contato com pessoas no estado s_0.

A parcela da população que no período t possui estado de saúde s_0 é denotado por $\pi_t(s_0)$. Similarmente, a parcela da população que no período t possui estado de saúde s_1 é denotado por $\pi_t(s_1)$. Obviamente, $\pi_t = [\pi_t(s_0), \pi_t(s_1)]' \in \mathbb{R}^2_+$ e $\pi_t(s_0) + \pi_t(s_1) = 1$ para cada $t \in \mathbb{N}$. A distribuição inicial de estados de saúde é $\pi_0 = [1 - \varepsilon, \varepsilon]'$, em que $\varepsilon = 10^{-4}$.

Em cada período, os indíviduos se encontram aos pares em busca de produção e consumo: cada indivíduo encontra um, somente um, outro indivíduo em cada período. No período t, cada indivíduo encontra um indivíduo do tipo s_i com probabilidade $\pi_t(s_i)$, em que $i \in \{0, 1\}$.

Indivíduos com estado de saúde s_1 permanecem com estado s_1 no próximo período, independentemente do parceiro de trocas. Indivíduos com estado de saúde s_0 adquirem a Covid19 somente se encontrar um parceiro com estado s_1. Ao encontrar um parceiro de troca com estado s_1, cada indivíduo s_0 se contagia com probabilidade $p \in [0, 1]$.

(a) *Apresente a lei de movimento que mapeia π_t em π_{t+1}, adaptando o ferramental de transição de Markov para a situação atual;*

(b) *Calcule uma aproximação numérica para o limite da sequência $\{\pi_t\}$ definida por π_0 e pela lei de movimento obtida no item (a). Para tal, utilize $p = 0.9$.*

(c) *Calcule para a sequência $\{\pi_t\}$ obtida no item (b), o menor índice t para o qual $||\pi_{t+1} - \pi_t|| < 10^{-4}$. Tal índice é uma medida que revela a velocidade de convergência da distribuição inicial para a distribuição limite (estacionária).*

(d) *Suponha agora a adoção generalizada de medidas de prevenção (por exemplo, uso de máscaras e higienização das mãos) reduziram a probabilidade de contágio durante cada encontro para $p = 0.6$.*

   (i) *Refaça os cálculos pedido nos (b) e (c) usando esta nova probabilidade.*

   (ii) *A distribuição limite (estacionária) mudou?*

   (iii) *E a medida associada a velocidade de convergência, mudou?*

(e) *Suponha que o governo é capaz de implementar um programa de isolamento social (quarentena) probablístico com base no seu estado de saúde $s \in \{s_0, s_1\}$ de cada indivíduo. Especificamente, em cada período t, indíviduos do tipo $i \in \{0, 1\}$ ficam em casa sob probabilidade $\sigma_i \in [0, 1]$.*

   (i) *Refaça os itens (a), (b) e (c) supondo regime de isolamento $\sigma = (\sigma_0, \sigma_1) = (.5, .9)$.*

   (ii) *Qual é o impacto da quarentena na distribuição limite (estacionária) e na velocidade de convergência?*

(f) *Ainda no contexto no item (e), apresente uma análise (numérica) sobre a dependência em σ da distribuição limite e da velocidade de convergência?*

(g) Ainda no contexto no item (e), suponha que $y > 0$ unidades de produto são produzidos e consumidos em cada encontro e que não há produção/consumo em casa. Suponha que o governo busca maximizar a utilidade social

$$\sum_{t=0}^{\infty} \beta^t \sum_{i=0}^{1} \sum_{j=0}^{1} \pi_t(s_i)\pi_t(s_j)[\alpha_i c_t^i(s_i, s_j) + \alpha_j c_t^j(s_i, s_j)]\sigma_i\sigma_j \tag{4}$$

em que $\beta \in (0, 1)$, $(\alpha_0, \alpha_1) = (1, 1/2)$ e $c_t^i(s_i, s_j) = y$ denota o consumo em t do indivíduo com estado s_i em um encontro com um indivíduo com estado s_j.

(i) Qual regime de isolamento social σ você aconselharia para o governo maximizar (4)?

(ii) Sua resposta para o item (i) depende de β?

Bibliografia:

[1] DCC-IME/USP. *Aulas de Introdução à Computação em Python - Parte II*. 2017. URL `https://panda.ime.usp.br/aulasPython/static/aulasPython`.

[2] D. Krueger. *Macroeconomic theory*. Department of economics, University of Pennsylvania, 2017.