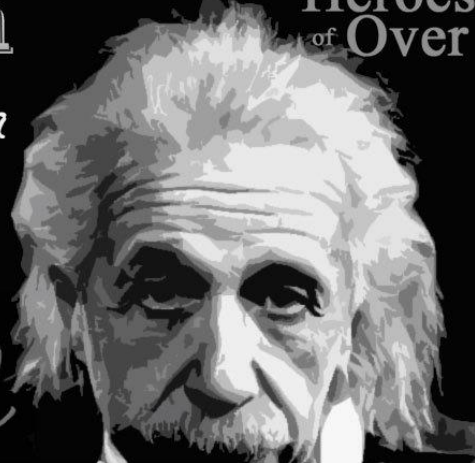


Einstein

The
Heroes
of
Over

*"A mente que se abre a
uma nova idéia jamais
voltará ao seu tamanho
original."*



$$E=mc^2$$

www.thoo.com.br

Filipe Azeite

PMR5026 – Elementos Finitos Linear: Teoria, Programação E Experimentos

Aula 02: Aplicação do MEF e elemento 1D estático

Profa. Dra. Larissa Driemeier

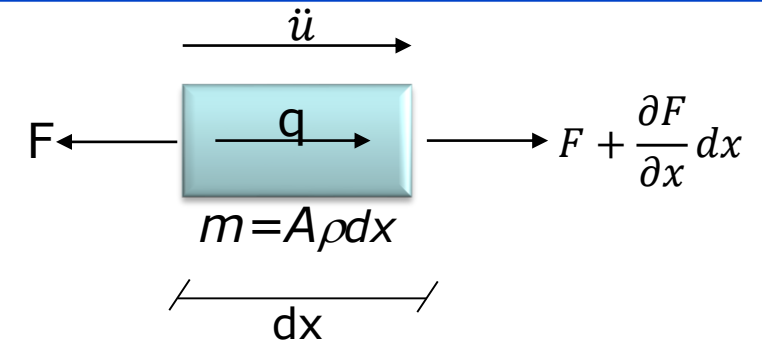
Prof. Dr. Marcilio Alves

Prof. Dr. Rafael Traldi Moura



Revisando MEF

$$A(x)\rho dx \ddot{u} + F = q dx + F + \frac{\partial F}{\partial x} dx$$



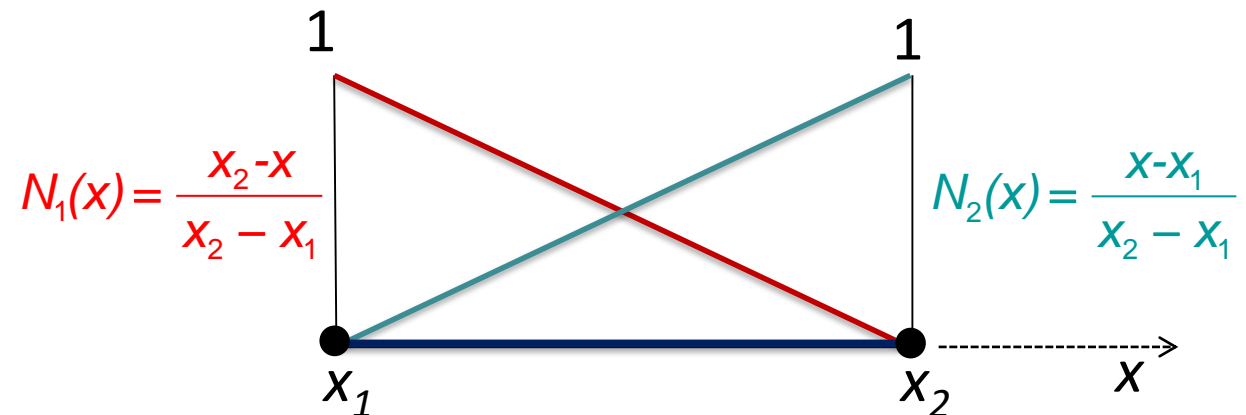
$$A\rho \ddot{u} = q + \frac{\partial F}{\partial x} \quad \frac{\partial}{\partial x} \left(AE \frac{\partial u}{\partial x} \right) + q = A\rho \ddot{u}$$

equação governante do problema

$$\frac{d^2 G(x)}{dx^2} + F(x) = 0$$

Tipo de equação resolvida pelo método dos elementos finitos

$$\tilde{G}(x) = N_1 \tilde{G}_1 + N_2 \tilde{G}_2$$



$$\int_V RN_i dV = 0, \quad i = 0, 1, \dots$$

$$R = \frac{d^2 \tilde{G}}{dx^2} + F(x) \neq 0 \forall x$$

$$\int_{x_1}^{x_2} \left[\frac{d^2 \tilde{G}}{dx^2} + F(x) \right] N_i dx = 0, \quad i = 1, 2$$

$$\int_{x_1}^{x_2} \frac{d}{dx} \left(\frac{d\tilde{G}(x)}{dx} \right) N_i(x) dx + \int_{x_1}^{x_2} F(x) N_i(x) dx = 0$$

$$\int_{x_1}^{x_2} \frac{d}{dx} \left(\frac{d\tilde{G}(x)}{dx} \right) N_i(x) dx = \frac{d\tilde{G}(x_2)}{dx} N_i(x_2) - \frac{d\tilde{G}(x_1)}{dx} N_i(x_1) - \int_{x_1}^{x_2} \frac{d}{dx} (N_i(x)) \frac{d\tilde{G}(x)}{dx} dx$$

$$\int_{x_1}^{x_2} \frac{d}{dx} \left(\frac{d\tilde{G}(x)}{dx} \right) N_1(x) dx = \frac{d\tilde{G}(x_2)}{dx} N_1(x_2) - \frac{d\tilde{G}(x_1)}{dx} N_1(x_1) - \int_{x_1}^{x_2} \frac{d}{dx} (N_1(x)) \frac{d\tilde{G}(x)}{dx} dx$$

$$\int_{x_1}^{x_2} \frac{d}{dx} \left(\frac{d\tilde{G}(x)}{dx} \right) N_2(x) dx = \frac{d\tilde{G}(x_2)}{dx} N_2(x_2) - \frac{d\tilde{G}(x_1)}{dx} N_2(x_1) - \int_{x_1}^{x_2} \frac{d}{dx} (N_2(x)) \frac{d\tilde{G}(x)}{dx} dx$$

$$\frac{d\tilde{G}(x_2)}{dx} N_1(x_2) = 0$$

$$\frac{d\tilde{G}(x_1)}{dx} N_1(x_1) = \left. \frac{d\tilde{G}(x)}{dx} \right|_{x=x_1}$$

$$\int_{x_1}^{x_2} \frac{d}{dx} (N_1(x)) \frac{d\tilde{G}(x)}{dx} dx = \frac{1}{x_2 - x_1} (\tilde{G}_1 - \tilde{G}_2)$$

$$\frac{d\tilde{G}(x_2)}{dx} N_2(x_2) = \left. \frac{d\tilde{G}(x)}{dx} \right|_{x=x_2}$$

$$\frac{d\tilde{G}(x_1)}{dx} N_2(x_1) = 0$$

$$\int_{x_1}^{x_2} \frac{d}{dx} (N_2(x)) \frac{d\tilde{G}(x)}{dx} dx = \frac{1}{x_2 - x_1} (-\tilde{G}_1 + \tilde{G}_2)$$

$$0 - \left. \frac{d\tilde{G}(x)}{dx} \right|_{x_1} - \frac{1}{(x_2 - x_1)} (\tilde{G}_1 - \tilde{G}_2) + \int_{x_1}^{x_2} F(x)N_1(x)dx = 0$$

$$\left. \frac{d\tilde{G}(x)}{dx} \right|_{x_2} - 0 - \frac{1}{(x_2 - x_1)} (-\tilde{G}_1 + \tilde{G}_2) + \int_{x_1}^{x_2} F(x)N_2(x)dx = 0$$

$$K_{ij} = \int_{x_1}^{x_2} \frac{dN_i}{dx} \frac{dN_j}{dx} dx$$

$$K\tilde{G} = C + F$$

$$F_i + C_i = \left. \frac{d\tilde{G}}{dx} \right|_{x=x_1} N_i(x_1) - \left. \frac{d\tilde{G}}{dx} \right|_{x=x_2} N_i(x_2) + \int_{x_1}^{x_2} F(x)N_i(x)dx$$

	Condições de contorno naturais	Função conhecida no domínio
Matriz de rigidez	Incógnitas	
$\frac{1}{(x_2 - x_1)} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{G}_1 \\ \tilde{G}_2 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} - \left. \frac{d\tilde{G}(x)}{dx} \right _{x=x_1} \\ \left. \frac{d\tilde{G}(x)}{dx} \right _{x=x_2} \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} \int_{x_1}^{x_2} F(x)N_1(x)dx \\ \int_{x_1}^{x_2} F(x)N_2(x)dx \end{bmatrix}$

$$EA \frac{d^2 u}{dx^2} + \rho g A = 0$$

$$EA \frac{d^2 u}{dx^2} + f^B = 0$$

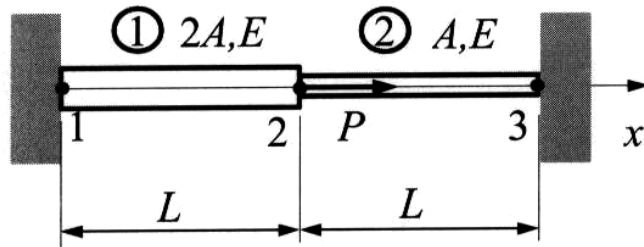
$$K \tilde{u} = C + F$$

Condições de contorno naturais

Função conhecida no domínio

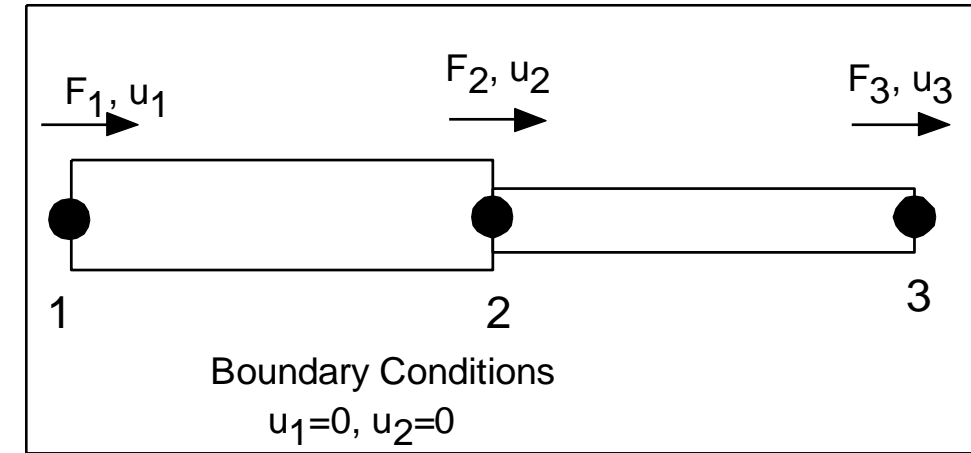
Matriz de rigidez Incógnitas

$$\frac{EA}{(x_2 - x_1)} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{u}_1 \\ \tilde{u}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -EA \frac{d\tilde{u}(x)}{dx} \Big|_{x=x_1} \\ EA \frac{d\tilde{u}(x)}{dx} \Big|_{x=x_2} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \int_{x_1}^{x_2} f^B N_1(x) dx \\ \int_{x_1}^{x_2} f^B N_2(x) dx \end{bmatrix}$$



Problem: Find the stresses in the two bar assembly which is loaded with force P , and constrained at the two ends, as shown in the figure.

Solution: Use two 1-D bar elements.



Element 1,



u_1 u_2

$$\mathbf{k}_1 = \frac{2EA}{L} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{matrix} 1 \\ 2 \end{matrix}$$

Element 2,



u_2 u_3

$$\mathbf{k}_2 = \frac{EA}{L} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{matrix} 2 \\ 3 \end{matrix}$$

$$[\mathbf{K}_G] = \frac{AE}{L} \begin{bmatrix} 2 & -2 & 0 \\ -2 & 2+1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\frac{EA}{L} \begin{bmatrix} 2 & -2 & 0 \\ -2 & 3 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \end{Bmatrix}$$

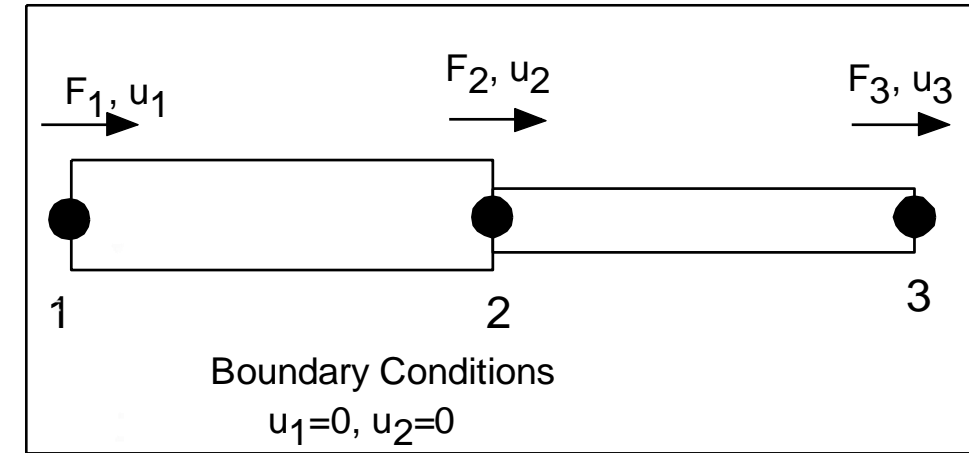
Load and boundary conditions (BC) are,

$$u_1 = u_3 = 0,$$

$$F_2 = P$$

FE equation becomes,

$$\frac{EA}{L} \begin{bmatrix} 2 & -2 & 0 \\ -2 & 3 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_1 \\ P \\ F_3 \end{Bmatrix}$$



Deleting the 1st row and column, and the 3rd row and column, we obtain,

$$\frac{EA}{L} [3] \{u_2\} = \{P\}$$

Thus,

$$u_2 = \frac{PL}{3EA}$$

Deleting the 1st row and column, and the 3rd row and column, we obtain,

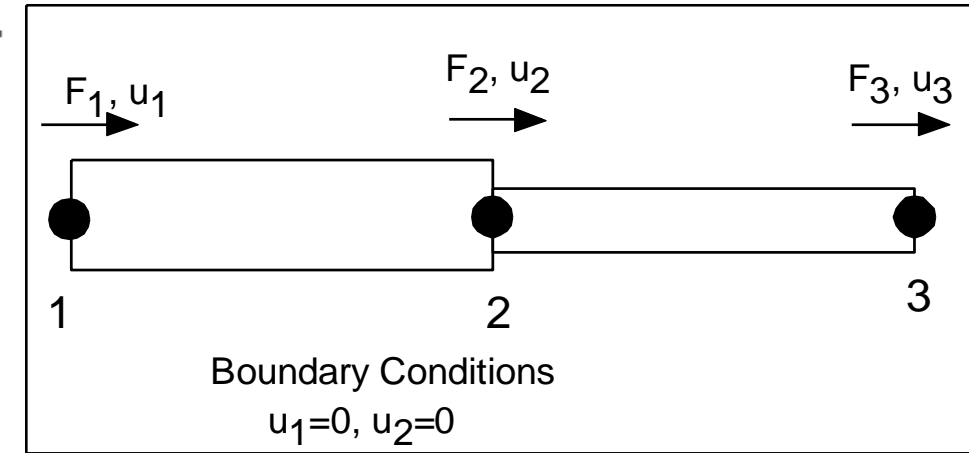
$$\frac{EA}{L} [3] \{u_2\} = \{P\}$$

Thus,

$$u_2 = \frac{PL}{3EA}$$

and

$$\begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix} = \frac{PL}{3EA} \begin{Bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{Bmatrix}$$



$$\{F_1\} = \frac{AE}{L} \begin{bmatrix} 2 & -2 & 0 \end{bmatrix} \frac{PL}{3AE} \begin{Bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{Bmatrix} = -\frac{2P}{3}$$

Reactions

$$\{F_3\} = \frac{AE}{L} \begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \frac{PL}{3AE} \begin{Bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{Bmatrix} = -\frac{P}{3}$$

Element Forces



Element 1

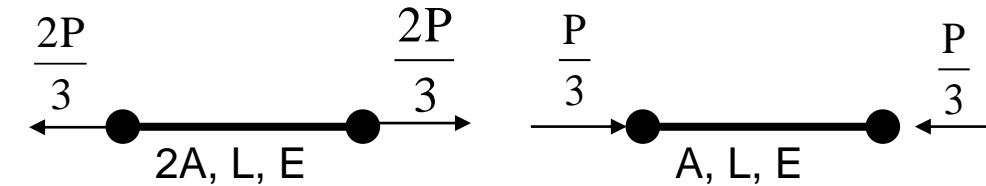
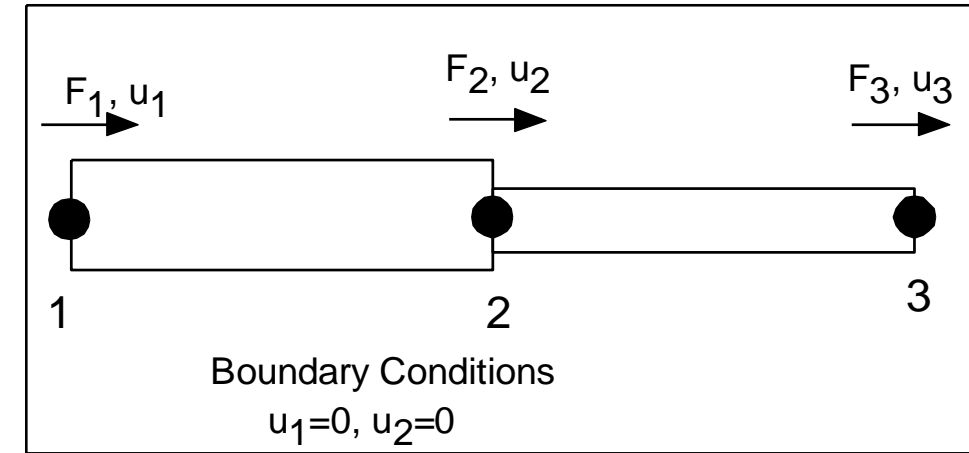
$$\begin{Bmatrix} f_1 \\ f_2 \end{Bmatrix} = \frac{2AE}{L} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix}$$

$$\frac{2AE}{L} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \frac{PL}{3AE} \begin{Bmatrix} 0 \\ 1 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -2p/3 \\ 2p/3 \end{Bmatrix}$$

Element 2

$$\begin{Bmatrix} f_1 \\ f_2 \end{Bmatrix} = \frac{AE}{L} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix}$$

$$= \frac{AE}{L} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \frac{PL}{3AE} \begin{Bmatrix} 1 \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} p/3 \\ -p/3 \end{Bmatrix}$$



$$\tilde{G}(x) = N_1 \tilde{G}_1 + N_2 \tilde{G}_2 \quad N_1(x) = \frac{x_2 - x}{x_2 - x_1} \quad N_2(x) = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}$$

Stress in element 1 is

$$\sigma_1 = E \varepsilon_1 = E \mathbf{B}_1 \mathbf{u}_1 = E \begin{bmatrix} -1/L & 1/L \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix}$$

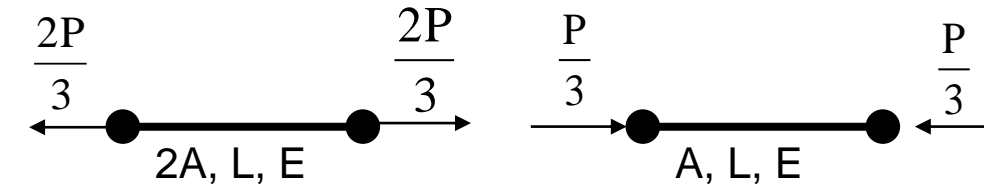
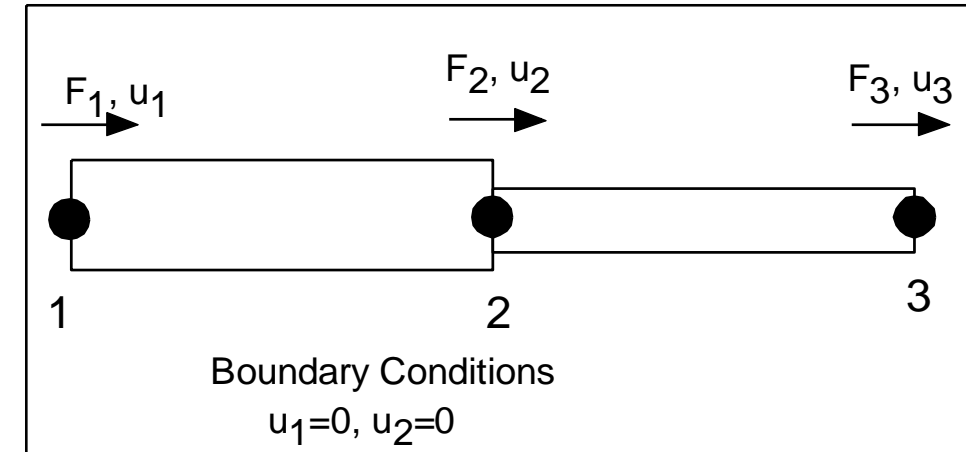
$$= E \frac{u_2 - u_1}{L} = \frac{E}{L} \left(\frac{PL}{3EA} - 0 \right) = \frac{P}{3A} \quad (\text{member is in tension})$$

Similarly, stress in element 2 is

$$\sigma_2 = E \varepsilon_2 = E \mathbf{B}_2 \mathbf{u}_2 = E \begin{bmatrix} -1/L & 1/L \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix}$$

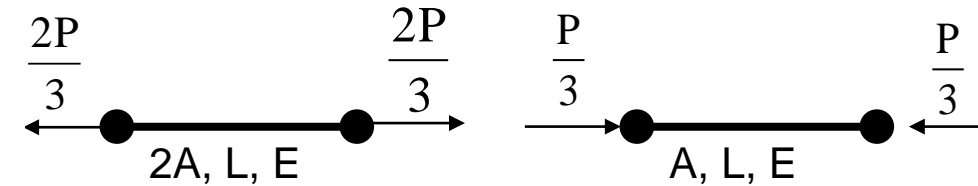
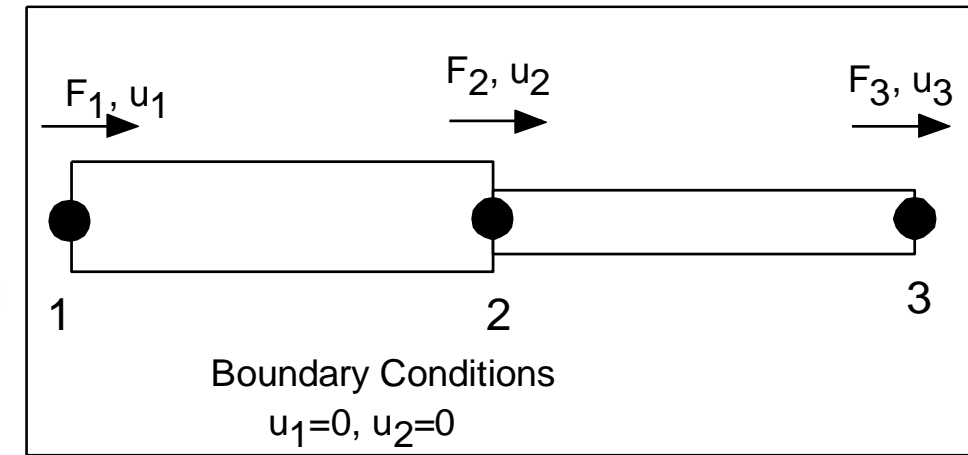
$$= E \frac{u_3 - u_2}{L} = \frac{E}{L} \left(0 - \frac{PL}{3EA} \right) = -\frac{P}{3A}$$

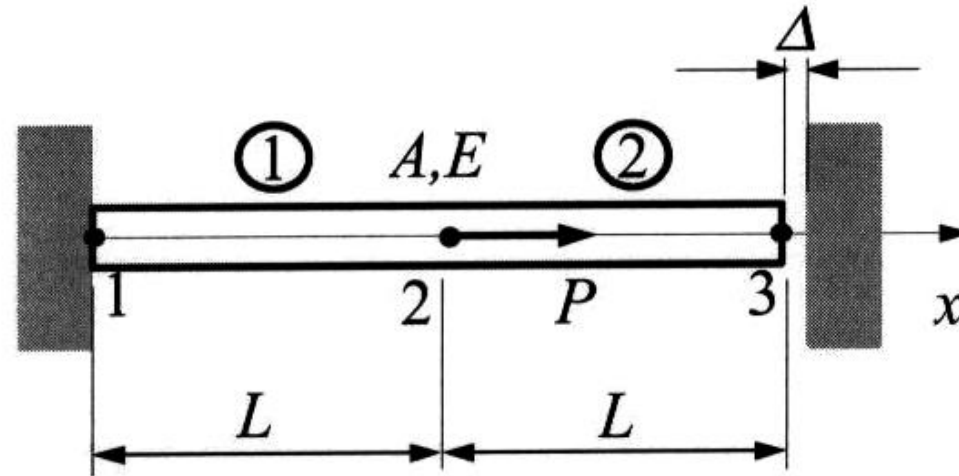
which indicates that bar 2 is in compression.



Notes:

- In this case, the calculated stresses in elements 1 and 2 are exact within the linear theory for 1-D bar structures. It will not help if we further divide element 1 or 2 into smaller finite elements.
- For tapered bars, averaged values of the cross-sectional areas should be used for the elements.
- We need to find the displacements first in order to find the stresses, since we are using the *displacement based FEM*.



Example 2.

Problem: Determine the support reaction forces at the two ends of the bar shown above, given the following,

$$P = 6.0 \times 10^4 \text{ N}, \quad E = 2.0 \times 10^4 \text{ N/mm}^2,$$

$$A = 250 \text{ mm}^2, \quad L = 150 \text{ mm}, \quad \Delta = 1.2 \text{ mm}$$

Solution

We first check to see if or not the contact of the bar with the wall on the right will occur. To do this, we imagine the wall on the right is removed and calculate the displacement at the right end,

$$\Delta_0 = \frac{PL}{EA} = \frac{(6.0 \times 10^4)(150)}{(2.0 \times 10^4)(250)} = 1.8 \text{ mm} > \Delta = 1.2 \text{ mm}$$

Thus, contact occurs.

Element 1

$$[K_1] = \frac{AE}{L} \begin{bmatrix} u_1 & u_2 \\ 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

Element 2

$$[K_2] = \frac{AE}{L} \begin{bmatrix} u_2 & u_3 \\ 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

The global FE equation is found to be,

$$\frac{EA}{L} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \end{Bmatrix}$$

The load and boundary conditions are,

$$F_2 = P = 6.0 \times 10^4 \text{ N}, \quad u_1 = 0, \quad u_3 = \Delta = 1.2 \text{ m}$$

FE equation becomes,

$$\frac{EA}{L} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ u_2 \\ \Delta \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_1 \\ P \\ F_3 \end{Bmatrix}$$

The 2nd equation gives,
$$\frac{EA}{L} [2 \quad -1] \begin{Bmatrix} u_2 \\ \Delta \end{Bmatrix} = \{P\}$$

that is,
$$\frac{EA}{L} [2] \{u_2\} = \left\{ P + \frac{EA}{L} \Delta \right\}$$

Solving this, we obtain
$$u_2 = \frac{1}{2} \left(\frac{PL}{EA} + \Delta \right) = 1.5 \text{ mm}$$

and
$$\begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 1.5 \\ 1.2 \end{Bmatrix} \text{ (mm)}$$

To calculate the support reaction forces, we apply the 1st and 3rd equations in the global FE equation.

The 1st equation gives,

$$F_1 = \frac{EA}{L} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix} = \frac{EA}{L} (-u_2) = -5.0 \times 10^4 \text{ N}$$

and the 3rd equation gives,

$$F_3 = \frac{EA}{L} \begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix} = \frac{EA}{L} (-u_2 + u_3) \\ = -1.0 \times 10^4 \text{ N}$$

Stress in element 1

$$\begin{aligned}\sigma_1 &= E\varepsilon_1 = EB \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} = E \begin{bmatrix} -\frac{1}{L} & \frac{1}{L} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} \\ &= E \frac{u_2 - u_1}{L} = 2.0 \times 10^4 \frac{1.5 - 0}{150} = 200 \text{N} / \text{mm}^2\end{aligned}$$

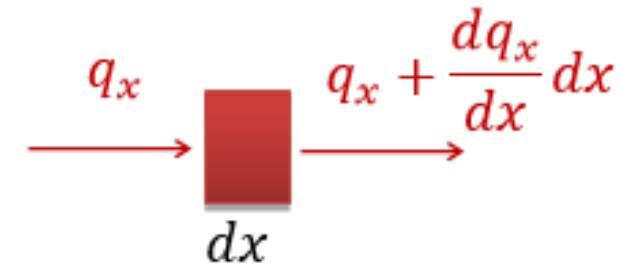
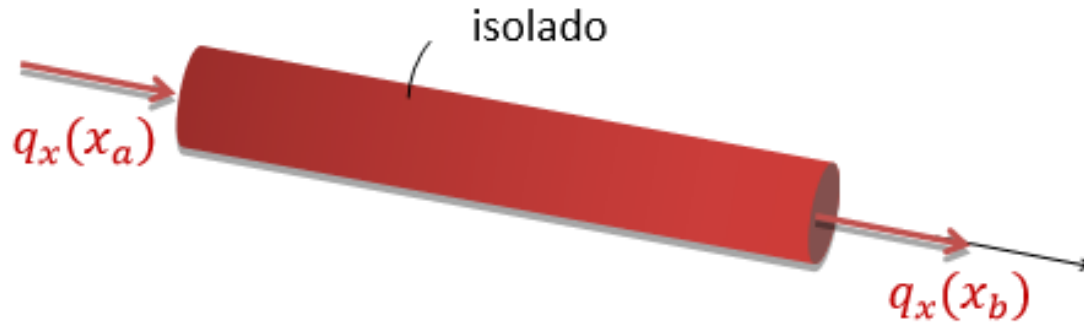
Stress in element 2

$$\begin{aligned}\sigma_2 &= E\varepsilon_2 = EB \begin{Bmatrix} u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix} = E \begin{bmatrix} -\frac{1}{L} & \frac{1}{L} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix} \\ &= E \frac{u_3 - u_2}{L} = 2.0 \times 10^4 \frac{1.2 - 1.5}{150} = -40 \text{N} / \text{mm}^2\end{aligned}$$



Transferência de calor
Condução

- Calor é transferido através de um meio material, de uma molécula a outra;
- Calor flui da temperatura mais alta para a mais baixa;
- Condutividade é a capacidade de uma molécula transferir calor;



Superfície isolada, calor conduzido somente no eixo X. Da conservação de energia, temos:

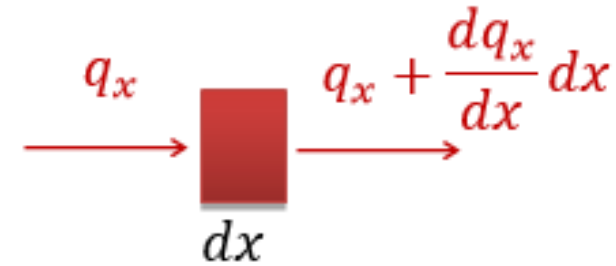
- E_{in} é a energia que entra;
- E_{gen} é a energia gerada por fonte de calor;
- dU é a variação da energia interna;
- E_{out} é a energia que sai.

$$E_{in} + E_{gen} = dU + E_{out}$$

A equação governante do problema então pode ser descrita por:

$$E_{in} + E_{gen} = dU + E_{out}$$

$$q_x A dt + Q A dx dt = dU + \left(q_x + \frac{dq_x}{dx} dx \right) A dt$$

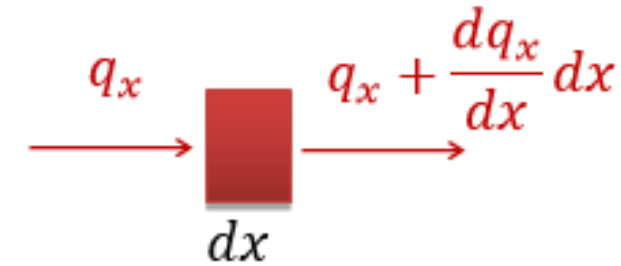


- q_x é fluxo de calor em $W=1J/s$;
- Q geração interna de calor (Wm^{-3});
- U energia interna (J);
- A área de troca térmica por condução (m^2);

$$E_{in} + E_{gen} = dU + E_{out}$$

O fluxo de calor é proporcional a taxa de variação da Temperatura T em uma direção (Lei de Fourier). Ou seja:

$$q = -k \frac{dT}{dx}$$



Com variação de energia interna dada por:

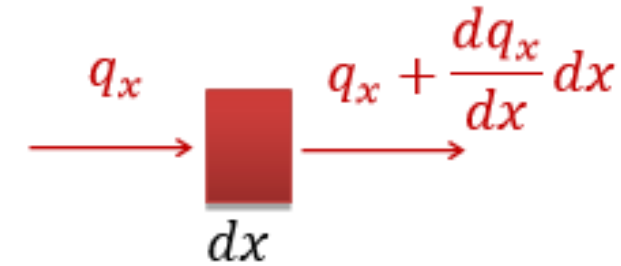
$$dU = c\rho A dx dT$$

- k coeficiente de condutividade térmica ($\text{W}^\circ\text{C}^{-1}\text{m}^{-1}$);
- ΔT é o gradiente de temperatura ($^\circ\text{Cm}^{-1}$);
- c é o calor específico de material ($\text{Jkg}^{-1} \text{ }^\circ\text{C}^{-1}$);
- ρ é a densidade do material (kg m^{-3}).

$$E_{in} + E_{gen} = dU + E_{out}$$

Ou seja, com

$$E_{in} + E_{gen} = dU + E_{out}$$

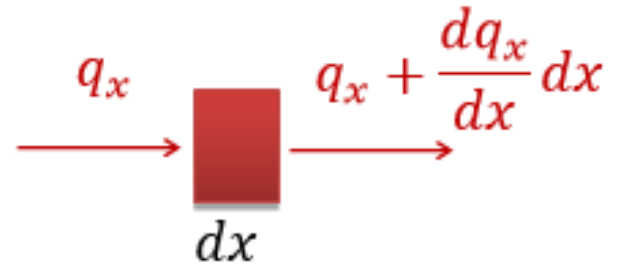


$$q_x A dt + Q A dx dt = dU + \left(q_x + \frac{dq_x}{dx} dx \right) A dt$$

$$q = -k \frac{dT}{dx} = -k \frac{dT}{dx} \quad dU = c\rho A dx dT$$

Temos

$$Q A dx dt = c\rho A dx dT + \frac{d}{dx} \left(-k \frac{dT}{dx} \right) A dx dt$$

$$Q A dx dt = c \rho A dx dT + \frac{d}{dx} \left(-k \frac{dT}{dx} \right) A dx dt$$


Para **condutividade termica constante**, ao dividir os termos por $A dx dt$ e temos

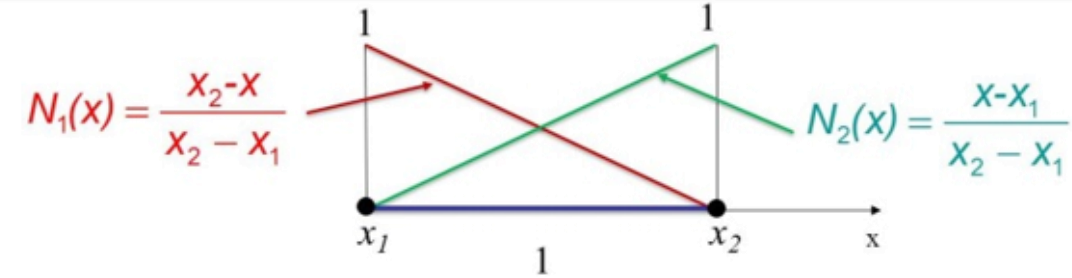
$$Q = c \rho \frac{dT}{dt} - k \frac{d^2 T}{dx^2}$$

considerando **equilibrio estático**, ou seja, $\frac{dT}{dt} = 0$, temos:

$$k \frac{d^2 T}{dx^2} + Q = 0$$

$$\frac{d^2 G(x)}{dx^2} + F(x) = 0$$

$$\mathbf{N} = [N_1(x) \quad N_2(x)] \quad \mathbf{T} = \begin{bmatrix} \tilde{T}_1 \\ \tilde{T}_2 \end{bmatrix} \quad \mathbf{B} = [B_1 \quad B_2]$$



$$\tilde{T}(x) = N_1 \tilde{T}_1 + N_2 \tilde{T}_2 = \mathbf{N} \mathbf{T}$$

$$N_1(x) = \frac{x_2 - x}{x_2 - x_1}$$

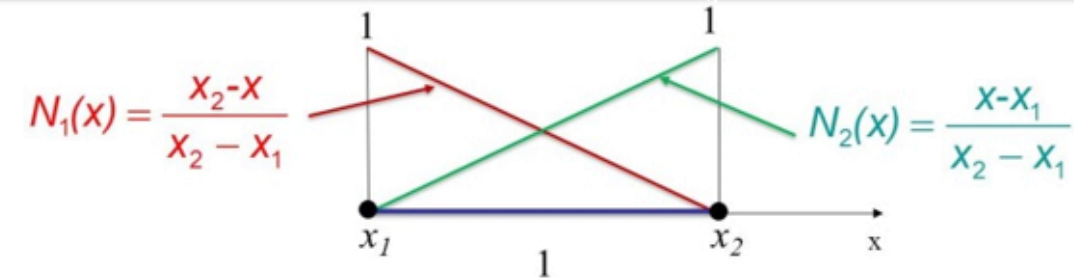
$$N_2(x) = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}$$

$$B_1 = \frac{dN_1}{dx} = \frac{-1}{x_2 - x_1}$$

$$B_2 = \frac{dN_2}{dx} = \frac{1}{x_2 - x_1}$$

Forma fraca do equilíbrio

$$\int_{x_1}^{x_2} \mathbf{N}^T \left(k \frac{d^2 \tilde{T}}{dx^2} + Q \right) A dx = 0$$



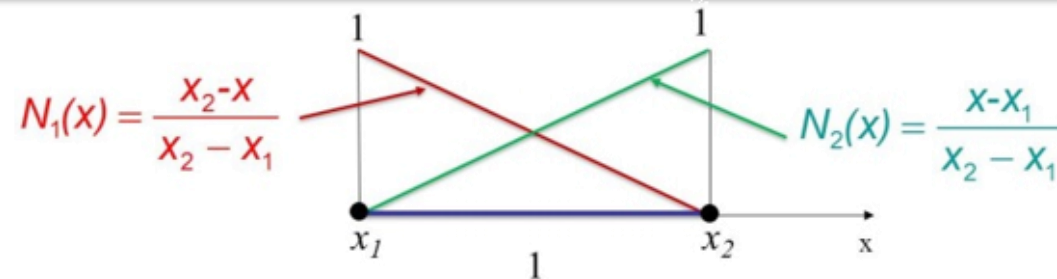
$$\mathbf{N} = [N_1(x) \quad N_2(x)] \quad \mathbf{B} = [B_1 \quad B_2] = \left[\frac{dN_1}{dx} \quad \frac{dN_2}{dx} \right] \quad \mathbf{T} = \begin{bmatrix} \tilde{T}_1 \\ \tilde{T}_2 \end{bmatrix}$$

$$\int_{x_1}^{x_2} \mathbf{N}^T \left(k \frac{d^2 \tilde{T}}{dx^2} + Q \right) A dx = 0$$

Aplicando a formulação da integral por partes, temos

$$\mathbf{N}^T kA \frac{dT}{dx} \Big|_{x_1}^{x_2} - \int_{x_1}^{x_2} \mathbf{B}^T kA \mathbf{B} dx \mathbf{T} + A \int_{x_1}^{x_2} Q \mathbf{N}^T dx = 0$$

$$N^T kA \frac{dT}{dx} \Big|_{x_1}^{x_2} - \int_{x_1}^{x_2} B^T kAB dx T + A \int_{x_1}^{x_2} Q N^T dx = 0$$

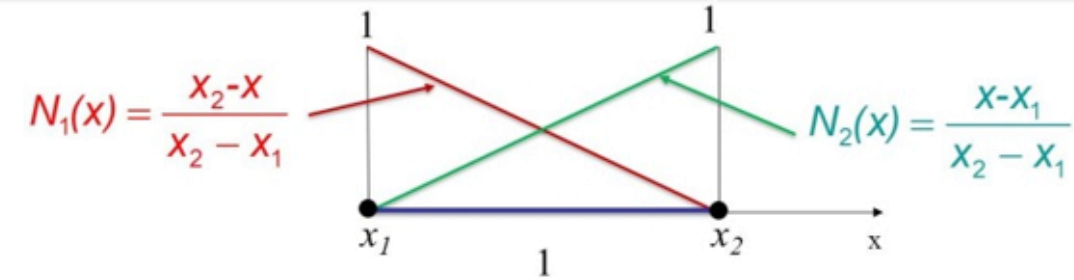


$$k T = f_G + f_Q$$

$$k = \int_{x_1}^{x_2} B^T kAB dx = \int_{x_1}^{x_2} \frac{1}{L} \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} kA \frac{1}{L} \begin{bmatrix} -1 & 1 \end{bmatrix} dx = \frac{kA}{L} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$f_G = N^T kA \frac{dT}{dx} \Big|_{x_1}^{x_2} = \begin{bmatrix} N_1 \\ N_2 \end{bmatrix} kA \frac{dT}{dx} \Big|_{x=x_2} - \begin{bmatrix} N_1 \\ N_2 \end{bmatrix} kA \frac{dT}{dx} \Big|_{x=x_1} = \begin{bmatrix} -kA \frac{dT}{dx} \Big|_{x=x_1} \\ kA \frac{dT}{dx} \Big|_{x=x_2} \end{bmatrix} = A \begin{bmatrix} q_{x_1} \\ -q_{x_2} \end{bmatrix} \quad f_Q = \frac{QAL}{2} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$kT = f_G + f_Q$$

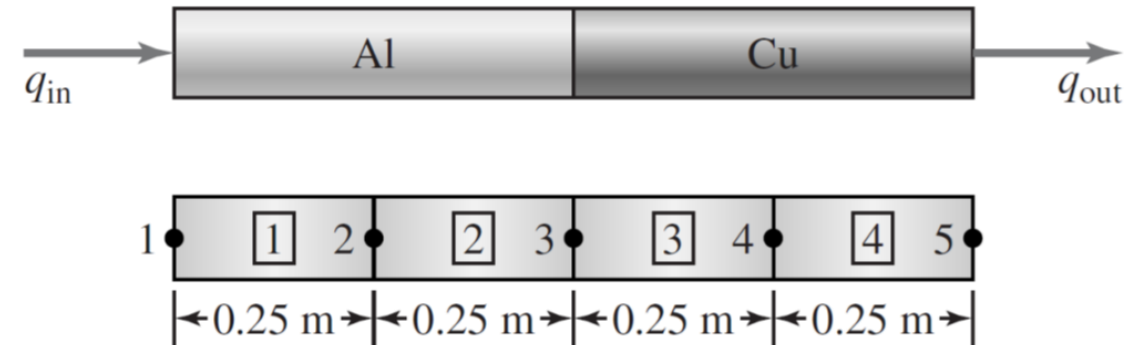


$$\frac{kA}{L} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_1 \\ T_2 \end{bmatrix} = kA \begin{bmatrix} -\left. \frac{dT}{dx} \right|_{x=x_1} \\ \left. \frac{dT}{dx} \right|_{x=x_2} \end{bmatrix} + \frac{QAL}{2} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

O vetor f_G é tal que, em nós internos do corpo, os valores se cancelam.

Já para o vetor f_Q os valores se somam.

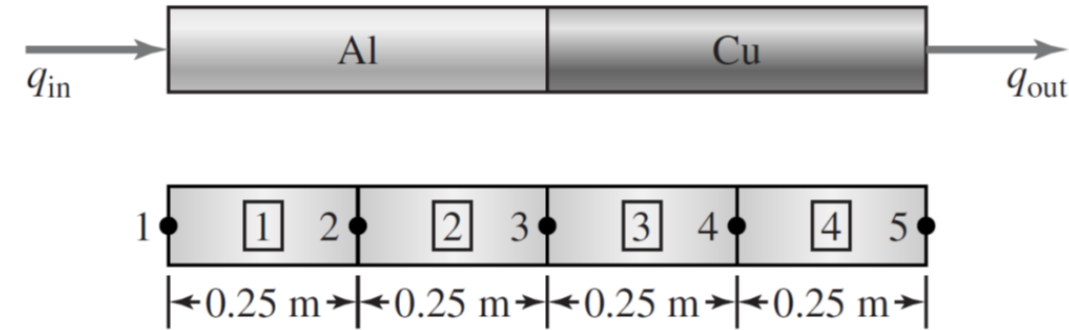
A haste circular representada na figura abaixo apresenta um diâmetro externo de 60 mm, comprimento de 1 m, e é perfeitamente isolada na sua circunferência. A metade esquerda do cilindro é de alumínio ($k = 200 \text{ W/m}^\circ\text{C}$) e a metade da direita é de cobre ($k = 389 \text{ W/m}^\circ\text{C}$). A extremidade direita da haste é mantida a uma temperatura de $80 \text{ }^\circ\text{C}$, enquanto que a extremidade esquerda é submetida a uma taxa de entrada de calor de 4000 W/m^2 . Utilizando quatro elementos de igual comprimento, determine a distribuição de temperatura de estado estacionário no interior do cilindro.



Exemplo 01

$$[k_{al}] = \frac{k_x A}{L} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = \frac{200(\pi/4)(0.06)^2}{0.25} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = 2.26 \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \text{ W/}^\circ\text{C}$$

$$[k_{cu}] = \frac{k_x A}{L} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = \frac{389(\pi/4)(0.06)^2}{0.25} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = 4.40 \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \text{ W/}^\circ\text{C}$$



Com estes dados e as condições de contorno, pode-se montar o sistema linear global:

$$\begin{bmatrix} 2.26 & -2.26 & 0 & 0 & 0 \\ -2.26 & 4.52 & -2.26 & 0 & 0 \\ 0 & -2.26 & 6.66 & -4.40 & 0 \\ 0 & 0 & -4.40 & 8.80 & -4.40 \\ 0 & 0 & 0 & -4.40 & 4.40 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} T_1 \\ T_2 \\ T_3 \\ T_4 \\ 80 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 4000 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -q_5 \end{Bmatrix} \frac{\pi(0.06)^2}{4}$$

Entretanto, temos uma condição de contorno não homogênea.

$$\begin{bmatrix} 2.26 & -2.26 & 0 & 0 & 0 \\ -2.26 & 4.52 & -2.26 & 0 & 0 \\ 0 & -2.26 & 6.66 & -4.40 & 0 \\ 0 & 0 & -4.40 & 8.80 & -4.40 \\ 0 & 0 & 0 & -4.40 & -4.40 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} T_1 \\ T_2 \\ T_3 \\ T_4 \\ 80 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 4000 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -q_5 \end{Bmatrix} \frac{\pi(0.06)^2}{4}$$

(Note: In the original image, the value 80 in the fifth row of the matrix and the value 0 in the fourth row of the vector are highlighted with blue boxes. A blue dashed line connects the 80 to the 0 in the vector. A blue arrow points from the -4.40 in the fifth row, fourth column of the matrix to the 0 in the vector.)

Resultando em:

$$\begin{bmatrix} 2.26 & -2.26 & 0 & 0 \\ -2.26 & 4.52 & -2.26 & 0 \\ 0 & -2.26 & 6.66 & -4.40 \\ 0 & 0 & -4.40 & 8.80 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} T_1 \\ T_2 \\ T_3 \\ T_4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 11.31 \\ 0 \\ 0 \\ 352.0 \end{Bmatrix}$$

E, por fim, podemos calcular:


$$T_4 = 82.57^\circ\text{C}$$

$$T_3 = 85.15^\circ\text{C}$$

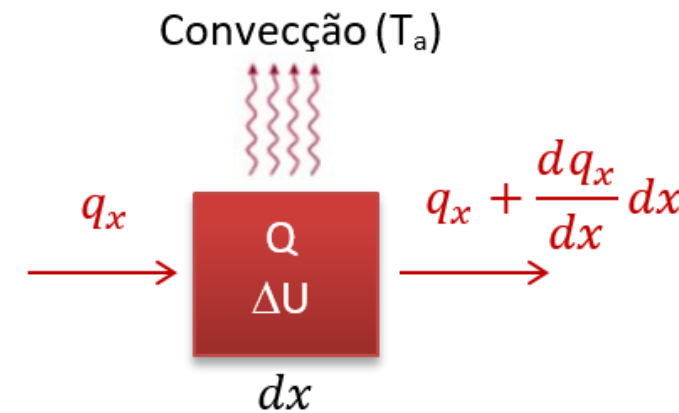
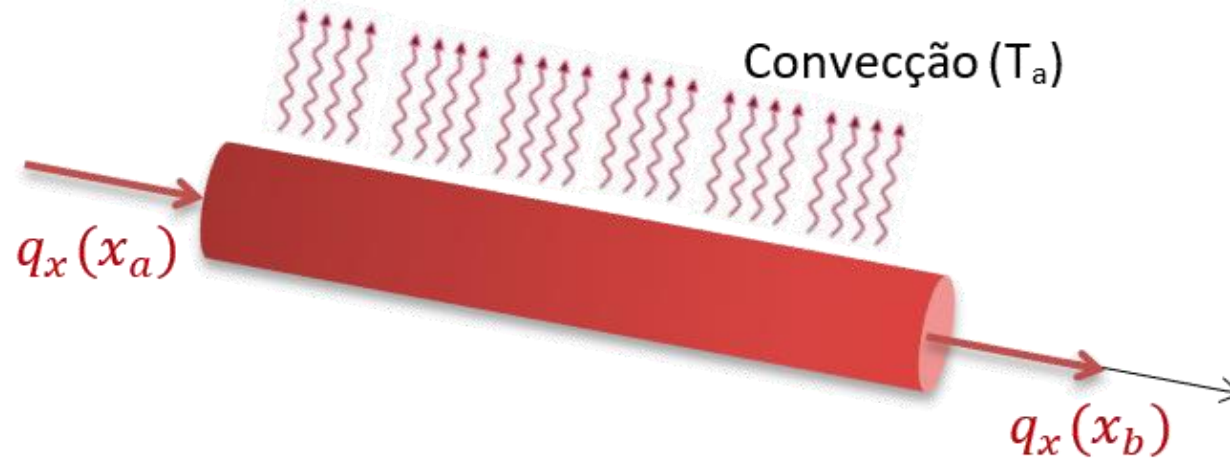
$$T_2 = 90.14^\circ\text{C}$$

$$T_1 = 95.15^\circ\text{C}$$

$$q_5 = 4038.6 \text{ W/m}^2$$



Transferência de calor
Condução + Convecção



$$q_x A dt + Q A dx dt = dU + \left(q_x + \frac{dq_x}{dx} dx \right) A dt + q_h P dx dt \quad q_h = h(T - T_a)$$

- q_h é a energia de convecção;
- T_a é a temperatura ambiente do fluido;
- P é a área de troca térmica por convecção (área lateral). No caso unidimensional, para um dx , se resume ao perímetro P da seção transversal;
- h é o coeficiente de película ou coeficiente de transferência de calor por convecção, que depende do sistema em consideração ($\text{W } ^\circ\text{C}^{-1}\text{m}^{-2}$).

$$q_x A dt + Q A dx dt = dU + \left(q_x + \frac{dq_x}{dx} dx \right) A dt + q_h P dx dt \quad q_h = h(T - T_a)$$

Forma forte: $k \frac{d^2 T}{dx^2} + Q = \frac{hP}{A} (T - T_a)$

Sem convecção

$$k \frac{d^2 T}{dx^2} + Q = 0 \quad \frac{d^2 G(x)}{dx^2} + F(x) = 0$$

Forma fraca com integral por partes já feita:

$$\mathbf{N}^T k A \frac{dT}{dx} \Big|_{x_1}^{x_2} - \int_{x_1}^{x_2} \mathbf{B}^T k A \mathbf{B} dx T - \int_{x_1}^{x_2} \mathbf{N}^T h P \mathbf{N} dx T A + A \int_{x_1}^{x_2} Q \mathbf{N}^T dx + \int_{x_1}^{x_2} h P T_a \mathbf{N}^T dx = 0$$

Sem convecção

$$\mathbf{N}^T k A \frac{dT}{dx} \Big|_{x_1}^{x_2} - \int_{x_1}^{x_2} \mathbf{B}^T k A \mathbf{B} dx T + A \int_{x_1}^{x_2} Q \mathbf{N}^T dx = 0$$

$$\mathbf{N}^T k A \left. \frac{dT}{dx} \right|_{x_1}^{x_2} - \int_{x_1}^{x_2} \mathbf{B}^T k A \mathbf{B} dx \mathbf{T} - \int_{x_1}^{x_2} \mathbf{N}^T h P N dx \mathbf{T} A + A \int_{x_1}^{x_2} Q \mathbf{N}^T dx + \int_{x_1}^{x_2} h P T_a \mathbf{N}^T dx = 0$$

$$\mathbf{k} \mathbf{T} = \mathbf{f}_G + \mathbf{f}_Q + \mathbf{f}_h = \mathbf{f}_G + \mathbf{b}$$

$$\mathbf{k} = \mathbf{k}_D + \mathbf{k}_h = \frac{kA}{L} \boxed{\begin{matrix} \text{condução} \\ \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \end{matrix}} + \boxed{\begin{matrix} \text{convecção} \\ \frac{hPL}{6} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \end{matrix}} \quad \mathbf{f}_h = hPT_a \int_{x_1}^{x_2} \mathbf{N}^T dx = \frac{hPT_a L}{2} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\left\{ \frac{kA}{L} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} + \frac{hPL}{6} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \right\} \begin{bmatrix} T_1 \\ T_2 \end{bmatrix} = Ak \begin{bmatrix} - \left. \frac{dT}{dx} \right|_{x=x_1} \\ \left. \frac{dT}{dx} \right|_{x=x_2} \end{bmatrix} + L \left(\frac{hPT_a}{2} + \frac{QA}{2} \right) \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{N}^T kA \frac{dT}{dx} \Big|_{x_1}^{x_2} - \int_{x_1}^{x_2} \mathbf{B}^T kA \mathbf{B} dx \mathbf{T} - \int_{x_1}^{x_2} \mathbf{N}^T hP \mathbf{N} dx \mathbf{T} A + A \int_{x_1}^{x_2} Q \mathbf{N}^T dx + \int_{x_1}^{x_2} hP T_a \mathbf{N}^T dx = 0$$

$$\mathbf{kT} = \mathbf{f}_G + \mathbf{f}_Q + \mathbf{f}_h = \mathbf{f}_G + \mathbf{b}$$

$$\begin{bmatrix} k_1 & k_2 & & & & \\ k_2 & 2k_1 & k_2 & & & \\ & k_2 & 2k_1 & k_2 & & \\ \dots & \dots & \dots & & & \\ & 0 & & k_2 & 2k_1 & k_2 \\ & & & & k_2 & k_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_1 \\ T_2 \\ T_3 \\ \vdots \\ T_{n-1} \\ T_n \end{bmatrix} = kA \begin{bmatrix} -\frac{dT}{dx} \Big|_{x=x_1} \\ \frac{dT}{dx} \Big|_{x=x_2} \\ \vdots \\ \frac{dT}{dx} \Big|_{x=x_n} \end{bmatrix} + L \left(\frac{hPT_a}{2} + \frac{QA}{2} \right) \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \\ \vdots \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$k_1 = \frac{kA}{L} + \frac{hPL}{3}$$

$$k_2 = \frac{kA}{L} + \frac{hPL}{6}$$

$$\left\{ \frac{kA}{L} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} + \frac{hPL}{6} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \right\} \begin{bmatrix} T_1 \\ T_2 \end{bmatrix} = Ak \begin{bmatrix} -\frac{dT}{dx} \Big|_{x=x_1} \\ \frac{dT}{dx} \Big|_{x=x_2} \end{bmatrix} + L \left(\frac{hPT_a}{2} + \frac{QA}{2} \right) \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Condições de contorno:

- Temperatura fixa imposta:

$$T(b) = T_b$$

- Gradiente de temperatura imposto:

$$q_c = -k \frac{dT}{dx} \Big|_{x_c}$$

- Convecção através de um nó final em contato com um fluido:

$$k \frac{dT}{dx} \Big|_{M+1} = -q_{M+1} = -h(T_{M+1} - T_a)$$



Escoamento de um fluido

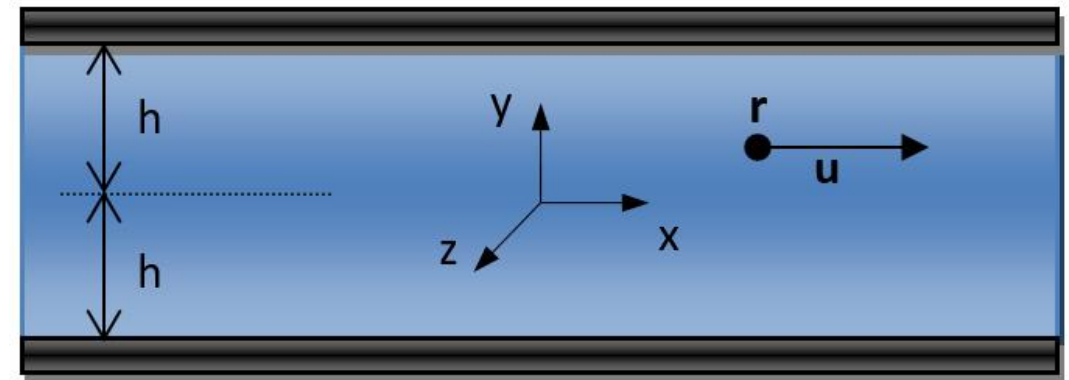
- As equações de Navier Stokes são equações diferenciais parciais que permitem determinar os campos de velocidade $\mathbf{u}(r,t)$ de um fluido no ponto r , tempo t e de pressão p :

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} = -\nabla p + \mu \nabla^2 \mathbf{u}$$

- Considere o caso particular de um fluxo viscoso ($\mu \neq 0$), laminar e incompressível em regime permanente, entre duas placas infinitas em z (fluxo 2D em xy), paralelas e horizontais fixas. Nesse caso, o fluido move-se com **velocidades** $u \neq 0$, $v = 0$ e $w = 0$ e a equação diferencial de Navier-Stokes que governa o escoamento se resume a:

$$\mu \frac{d^2 u}{dy^2} - \frac{dp}{dx} = 0$$

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} = -\nabla p + \mu \nabla^2 \mathbf{u}$$



Na qual x é a direção paralela às placas e y é a direção perpendicular às placas; μ é a viscosidade do fluido, p é a pressão.

$$\mu \frac{d^2 u}{dy^2} - \frac{dp}{dx} = 0 \quad \int_{u_1}^{u_2} \mathbf{N} \left(\mu \frac{d^2 u}{dy^2} - \frac{dp}{dx} \right) du = 0$$

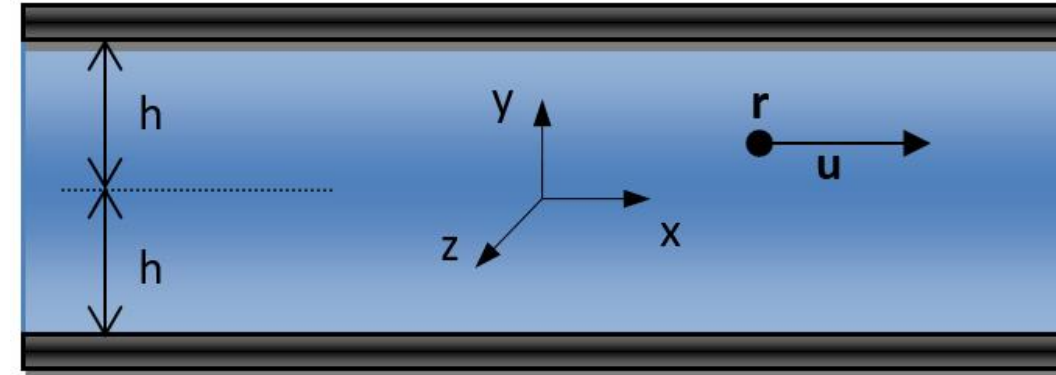
$$\frac{\mu}{L} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\mu \frac{du}{dy} \Big|_{y=y_1} \\ \mu \frac{du}{dy} \Big|_{y=y_2} \end{bmatrix} + \frac{dp}{dx} \frac{L}{2} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Para $L = y_2 - y_1$ sendo o comprimento do elemento finito.



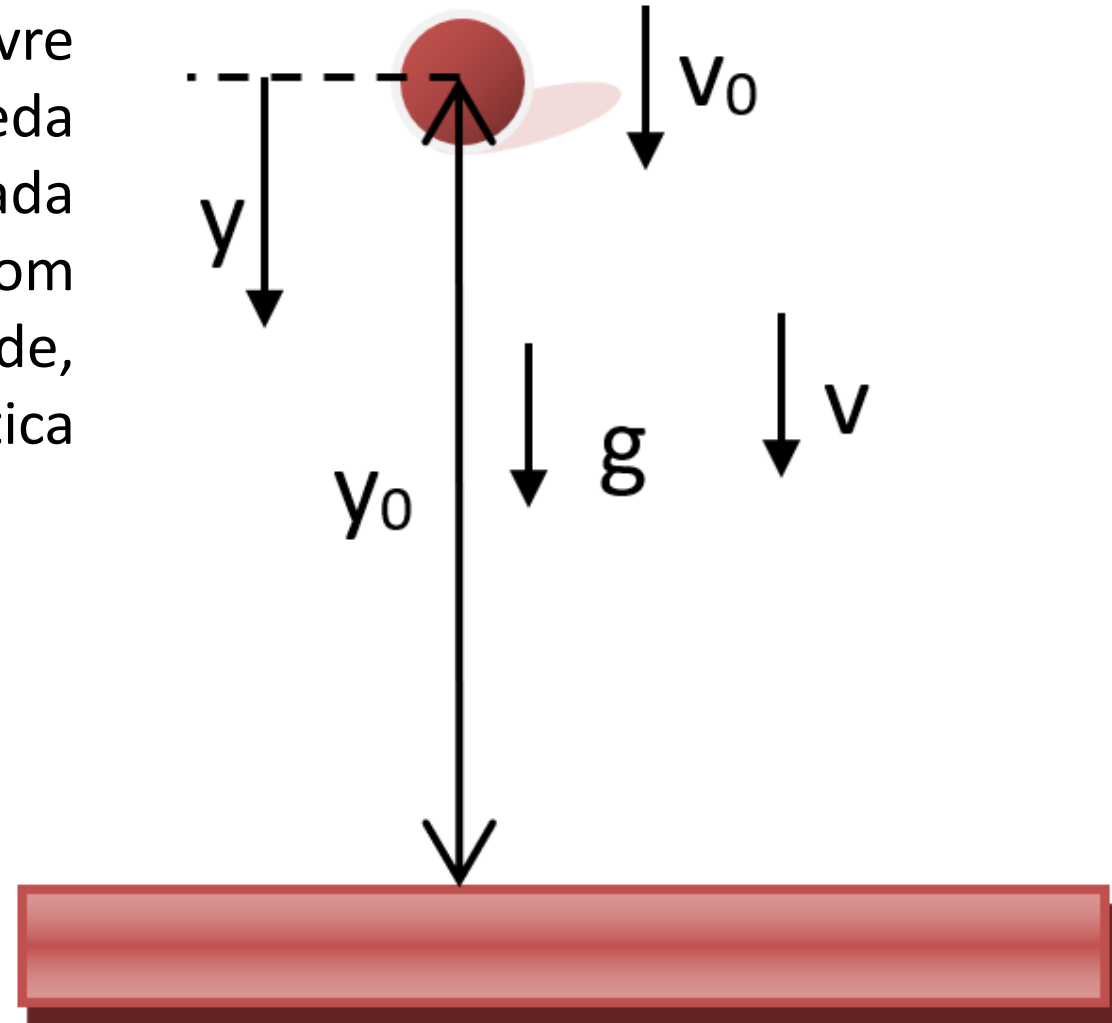
Partícula em queda livre

Determine o perfil de velocidades de um fluido escoando entre duas placas fixas. Utilize o MEF empregando quatro elementos lineares. A viscosidade do fluido em diferentes temperaturas é $16 \times 10^{-6} \text{ Kg s/m}^2$. Além disso, a distância entre as placas é de $0,1\text{m}$ e $dP/dx = -3 \times 10^{-4} \text{ kg/m}^3$.



Utilize o modelo de MEF da partícula em queda livre para obter as posições de uma partícula em queda livre, a cada intervalo de tempo de 1 segundo, largada de uma altura de 50m, no instante $t=0$, com velocidade nula. Utilize a aceleração da gravidade, $g=9,8\text{m/s}^2$ e $\Delta t=0,5\text{s}$. Compare com a solução analítica e mostre que as duas coincidem nos pontos nodais.

$$y = y_0 + v_0 t + \frac{1}{2} g t^2$$

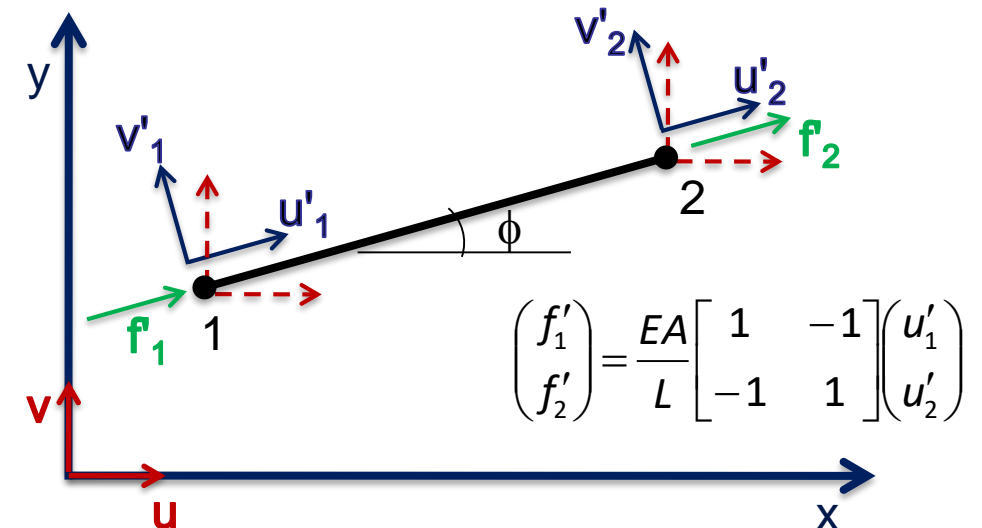




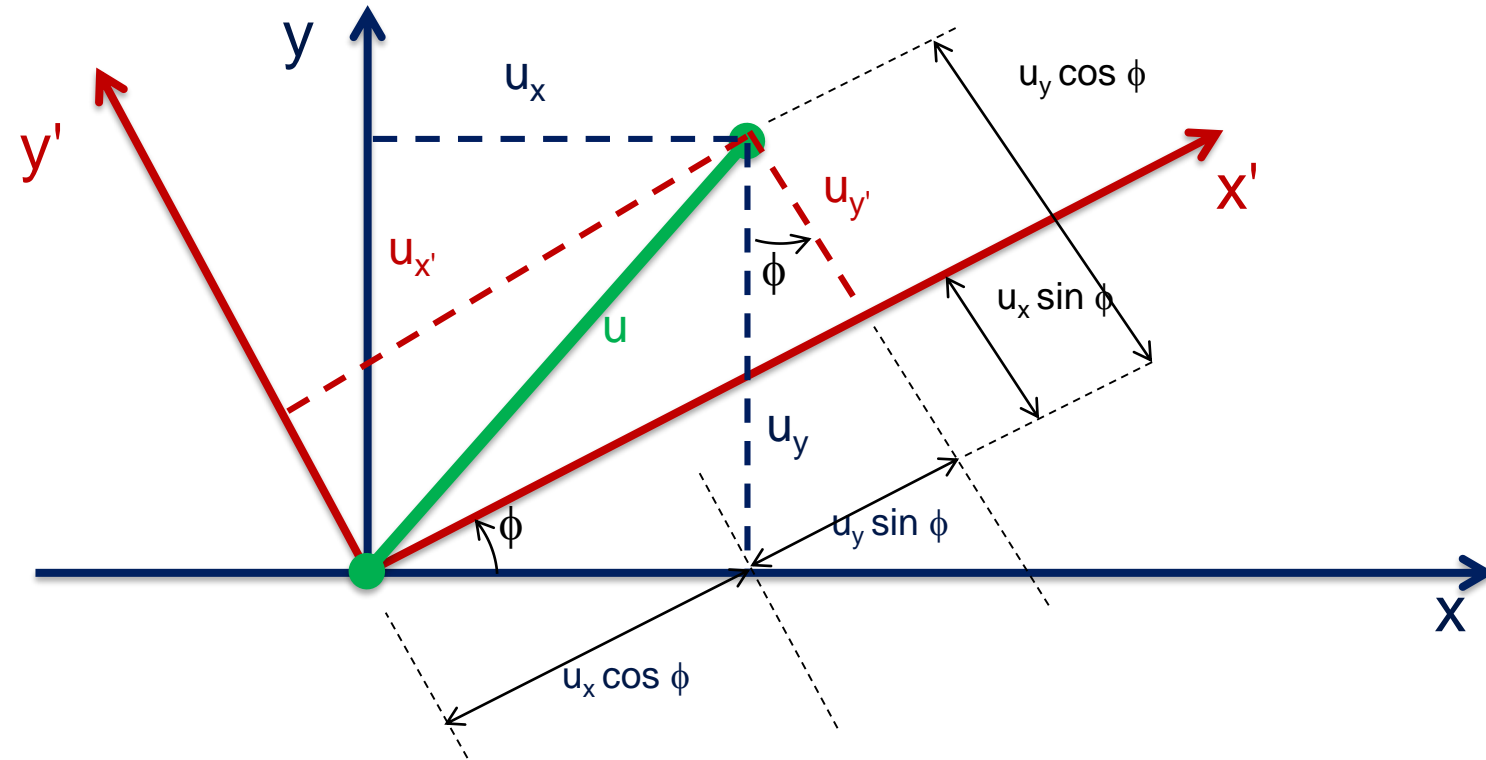
Treliças

- Os modelos de mola constituem uma classe de *elementos finitos* e são conhecidos como elementos *rod*, *spar* (ANSYS), or *truss* (ALGOR). Na forma mostrada aqui estes elementos podem ser usados para modelar apenas problemas unidimensionais.
- Uma forma mais geral destes elementos pode ser usada para modelar problemas bi- ou tri-dimensionais.

- Os elementos de barras podem ter várias orientações, estar em compressão, tração, ter mais de dois elementos ligados em um nó, etc;
- Se você considerar o deslocamento de um ponto ao longo da barra como um vetor, os componentes desse vetor ao longo das direções x e y globais são os deslocamentos globais x e y.



- Considerando o Ângulo ϕ positivo na direção anti-horária, a partir do eixo +X;



$$\begin{pmatrix} u'_1 \\ v'_1 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \phi & \sin \phi \\ -\sin \phi & \cos \phi \end{bmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ v_1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} u'_2 \\ v'_2 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \phi & \sin \phi \\ -\sin \phi & \cos \phi \end{bmatrix} \begin{pmatrix} u_2 \\ v_2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} u'_1 \\ v'_1 \\ u'_2 \\ v'_2 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \phi & \sin \phi & 0 & 0 \\ -\sin \phi & \cos \phi & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos \phi & \sin \phi \\ 0 & 0 & -\sin \phi & \cos \phi \end{bmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{d}' = \mathbf{Td}$$

Analogamente, $\mathbf{f}' = \mathbf{Tf}$

$$\begin{pmatrix} f'_{1x} \\ f'_{1y} \\ f'_{2x} \\ f'_{2y} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\phi & \sin\phi & 0 & 0 \\ -\sin\phi & \cos\phi & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos\phi & \sin\phi \\ 0 & 0 & -\sin\phi & \cos\phi \end{bmatrix} \begin{pmatrix} f_{1x} \\ f_{1y} \\ f_{2x} \\ f_{2y} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} u'_1 \\ v'_1 \\ u'_2 \\ v'_2 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\phi & \sin\phi & 0 & 0 \\ -\sin\phi & \cos\phi & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos\phi & \sin\phi \\ 0 & 0 & -\sin\phi & \cos\phi \end{bmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{f} = \mathbf{T}^{-1} \mathbf{K}' \mathbf{T} \mathbf{d}$$

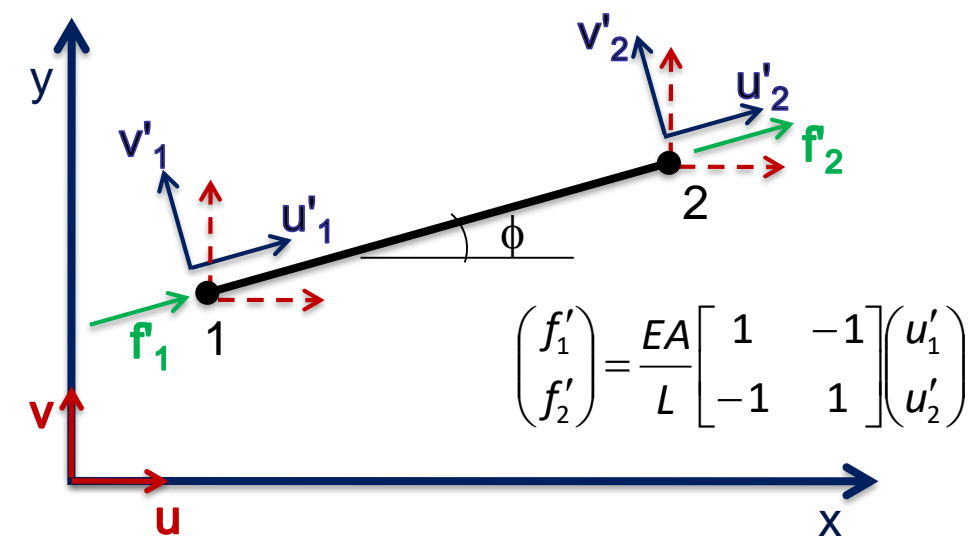
global global

Matriz de rigidez global:
 $\mathbf{K} = \mathbf{T}^{-1} \mathbf{K}' \mathbf{T}$

$$\mathbf{f}' = \mathbf{K}' \mathbf{d}'$$

$$\begin{pmatrix} f'_1 \\ f'_2 \end{pmatrix} = \frac{EA}{L} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} u'_1 \\ u'_2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} f'_{1x} \\ f'_{1y} \\ f'_{2x} \\ f'_{2y} \end{pmatrix} = k \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} u'_1 \\ v'_1 \\ u'_2 \\ v'_2 \end{pmatrix}$$



Assume-se que não há rigidez na direção local y' .

Matriz simétrica e singular.

$$\mathbf{K} = \mathbf{T}^{-1} \mathbf{K}' \mathbf{T}$$

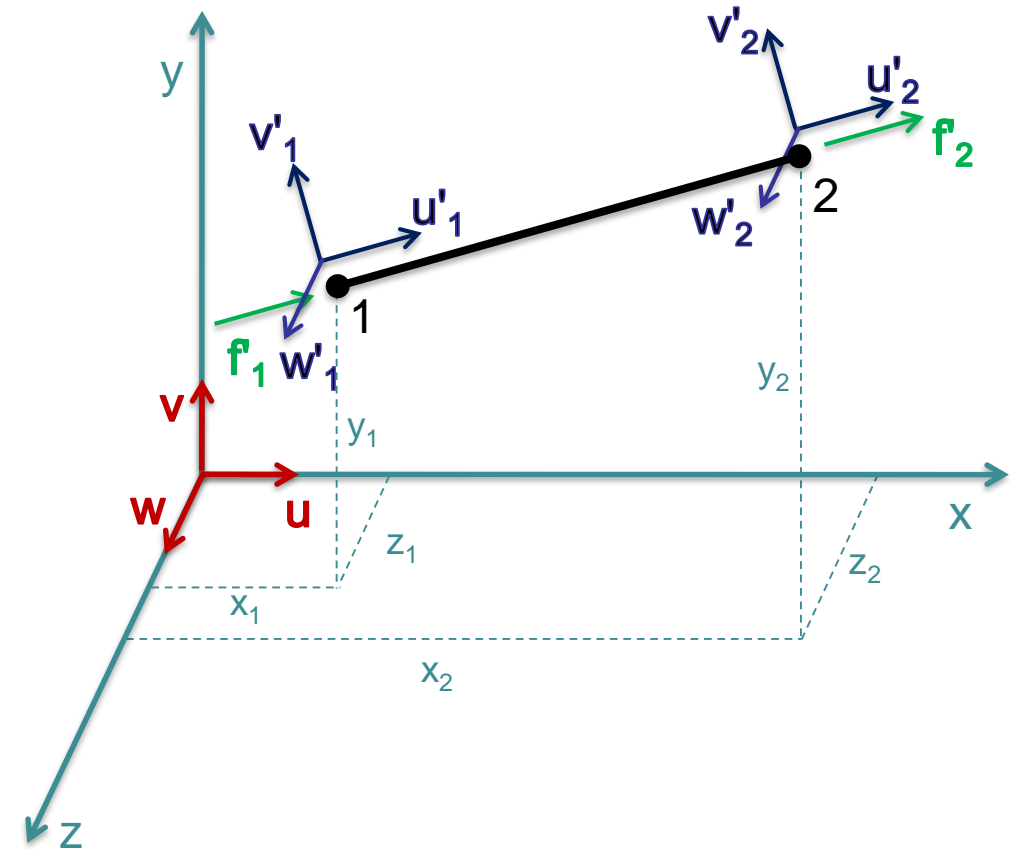
$$\mathbf{K} = \frac{EA}{L} \begin{bmatrix} \cos^2 \phi & \cos \phi \sin \phi & -\cos^2 \phi & -\cos \phi \sin \phi \\ \cos \phi \sin \phi & \sin^2 \phi & -\cos \phi \sin \phi & -\sin^2 \phi \\ -\cos^2 \phi & -\cos \phi \sin \phi & \cos^2 \phi & \cos \phi \sin \phi \\ -\cos \phi \sin \phi & -\sin^2 \phi & \cos \phi \sin \phi & \sin^2 \phi \end{bmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} f'_1 \\ f'_2 \end{pmatrix} = \frac{EA}{L} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} u'_1 \\ u'_2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} u'_1 \\ u'_2 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} l & m & n & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & l & m & n \end{bmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ v_1 \\ w_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ w_2 \end{pmatrix}$$

$$l = \frac{x_2 - x_1}{L}, \quad m = \frac{y_2 - y_1}{L}, \quad n = \frac{z_2 - z_1}{L}$$

$$L^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2$$



Com um desenvolvimento análogo ao utilizado para dedução da matriz de rigidez para treliça plana,

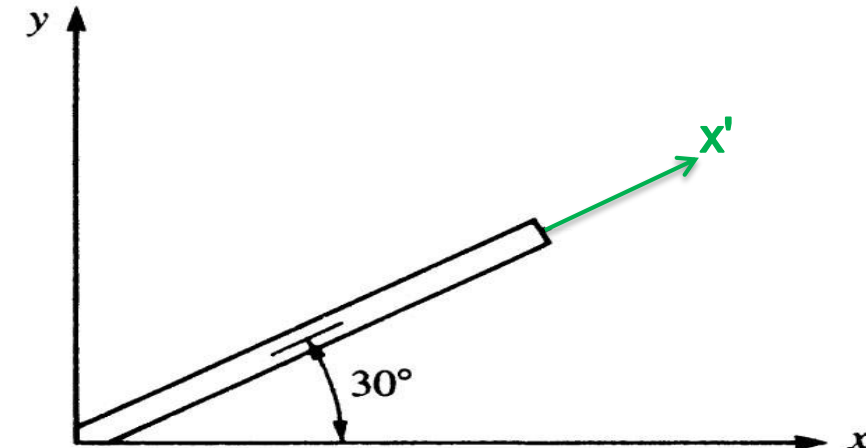
$$\mathbf{K} = \frac{EA}{L} \begin{bmatrix} l^2 & lm & ln & -l^2 & -lm & -ln \\ m^2 & mn & -lm & -m^2 & -mn & -ln \\ n^2 & -ln & -mn & -n^2 & lm & ln \\ & & & l^2 & lm & ln \\ & & & m^2 & mn & \\ & & & & & n^2 \end{bmatrix}$$

- Calcule a matriz de global rigidez, deformações e tensões do elemento de barra.

$$\mathbf{K} = \frac{EA}{L} \begin{bmatrix} \cos^2 \phi & \cos \phi \sin \phi & -\cos^2 \phi & -\cos \phi \sin \phi \\ \cos \phi \sin \phi & \sin^2 \phi & -\cos \phi \sin \phi & -\sin^2 \phi \\ -\cos^2 \phi & -\cos \phi \sin \phi & \cos^2 \phi & \cos \phi \sin \phi \\ -\cos \phi \sin \phi & -\sin^2 \phi & \cos \phi \sin \phi & \sin^2 \phi \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{k} = \frac{(30 \times 10^6)(2)}{60} \begin{bmatrix} \frac{3}{4} & \frac{\sqrt{3}}{4} & -\frac{3}{4} & -\frac{\sqrt{3}}{4} \\ \frac{\sqrt{3}}{4} & \frac{1}{4} & -\frac{\sqrt{3}}{4} & -\frac{1}{4} \\ -\frac{3}{4} & -\frac{\sqrt{3}}{4} & \frac{3}{4} & \frac{\sqrt{3}}{4} \\ -\frac{\sqrt{3}}{4} & -\frac{1}{4} & \frac{\sqrt{3}}{4} & \frac{1}{4} \end{bmatrix}$$

© 2002 Brooks/Cole Publishing / Thomson Learning™



$$E = 30 \times 10^6 \text{ MPa}$$

$$A = 2 \text{ mm}$$

$$L = 60 \text{ mm}$$

$$\theta = 30^\circ$$

$$l = \cos 30 = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$m = \sin 30 = \frac{1}{2}$$

- Calcule a matriz de rigidez, deformações e tensões do elemento de barra.

$$\varepsilon = \frac{d_{2x'} - d_{1x'}}{L} = \frac{1}{L} \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} d_{1x'} \\ d_{1y'} \\ d_{2x'} \\ d_{2y'} \end{Bmatrix}$$

$$= \frac{1}{L} \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{d}'$$

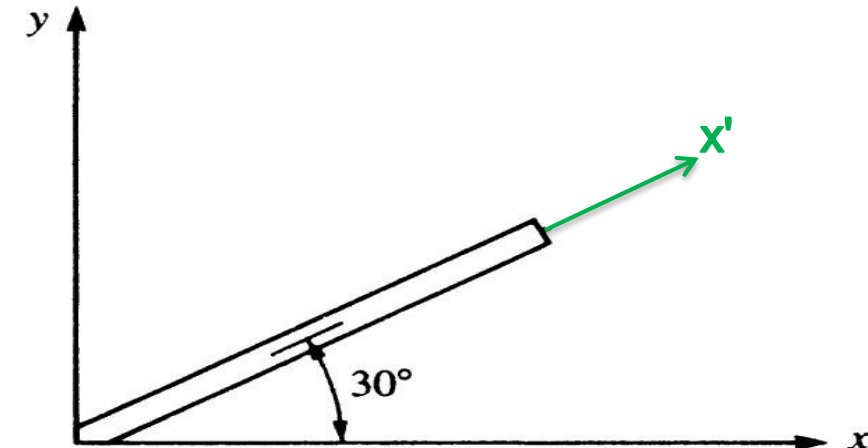
$$= \frac{1}{L} \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{T} \mathbf{d}$$

$$\varepsilon = \frac{1}{L} \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} l & m & 0 & 0 \\ -m & l & 0 & 0 \\ 0 & 0 & l & m \\ 0 & 0 & -m & l \end{bmatrix} \mathbf{d}$$

$$= \frac{1}{L} \begin{bmatrix} -l & -m & l & m \end{bmatrix} \mathbf{d}$$

$$= \frac{1}{L} \begin{bmatrix} -l & -m & l & m \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} d_{1x} \\ d_{1y} \\ d_{2x} \\ d_{2y} \end{Bmatrix}$$

© 2002 Brooks/Cole Publishing / Thomson Learning™



$$E = 30 \times 10^6 \text{ MPa}$$

$$A = 2 \text{ mm}$$

$$L = 60 \text{ mm}$$

$$\theta = 30^\circ$$

$$l = \cos 30 = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$m = \sin 30 = \frac{1}{2}$$

- Calcule a matriz de rigidez, deformações e tensões do elemento de barra.

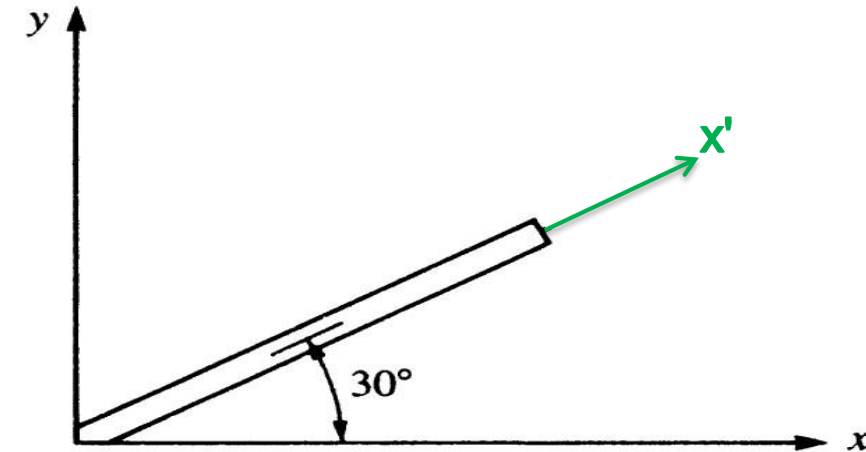
$$\varepsilon = \frac{1}{L} \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} l & m & 0 & 0 \\ -m & l & 0 & 0 \\ 0 & 0 & l & m \\ 0 & 0 & -m & l \end{bmatrix} \mathbf{d}$$

$$= \frac{1}{L} \begin{bmatrix} -l & -m & l & m \end{bmatrix} \mathbf{d}$$

$$= \frac{1}{L} \begin{bmatrix} -l & -m & l & m \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} d_{1x} \\ d_{1y} \\ d_{2x} \\ d_{2y} \end{Bmatrix}$$

$$\sigma = E\varepsilon = \frac{E}{L} (d_{2x'} - d_{1x'}) = \frac{E}{L} \begin{bmatrix} -l & -m & l & m \end{bmatrix} \mathbf{d}$$

© 2002 Brooks/Cole Publishing / Thomson Learning™



$$E = 30 \times 10^6 \text{ MPa}$$

$$A = 2 \text{ mm}$$

$$L = 60 \text{ mm}$$

$$\theta = 30^\circ$$

$$l = \cos 30 = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$m = \sin 30 = \frac{1}{2}$$

A força de tração da barra,

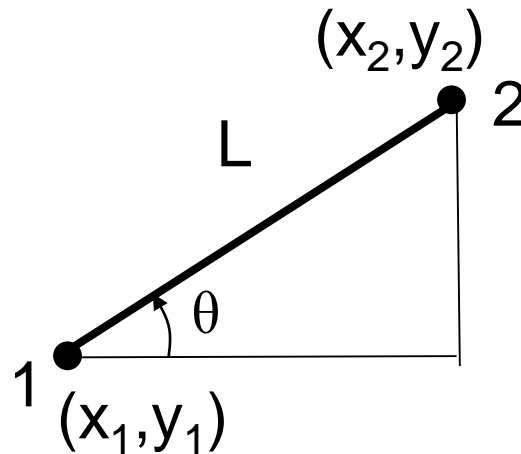
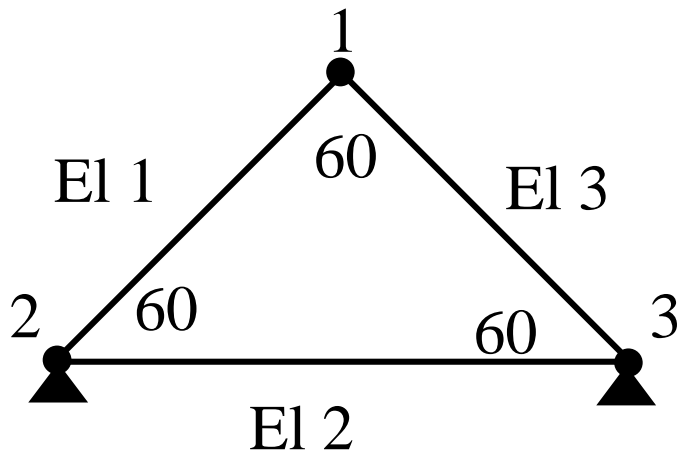
$$T = EA\varepsilon = \frac{EA}{L} \begin{bmatrix} -l & -m & l & m \end{bmatrix} \mathbf{d}$$



Algoritmo inicial para programa:
Primeiros passos

- **Passo 1:** Faça a tabela de conectividade nó-elemento de ligação relacionando nós locais e globais; faça a tabela de cossenos diretores (l, m) ;
- **Passo 2:** Construa a matriz de rigidez de cada elemento no sistema de coordenadas global, com numeração global;
- **Passo 3:** Monte a matriz de rigidez global para toda a estrutura, utilizando a tabela de conectividade;
- **Passo 4:** Incorpore condições de contorno apropriadas;
- **Passo 5:** Resolva o conjunto de equações reduzidas para os deslocamentos desconhecidos;
- **Passo 6:** Calcule as forças nodais desconhecidas (reações);
- **Passo 7:** Calcule tensões e deformações;

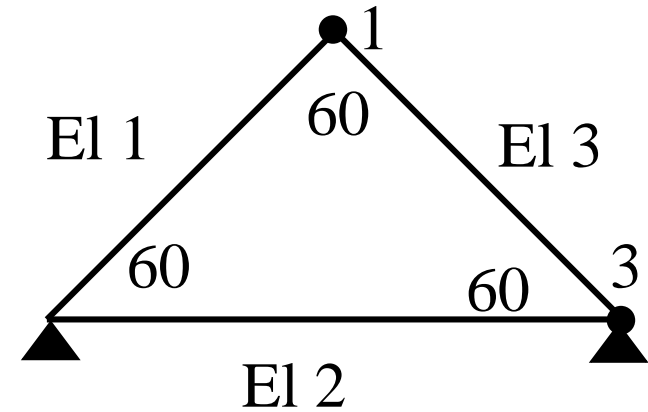
- **Passo 1:** Faça a tabela de conectividade nó-elemento de ligação relacionando nós locais e globais; faça a tabela de cossenos diretores (l, m);



ELEM.	Nó 1	Nó 2
1	1	2
2	2	3
3	3	1

Exemplo 1

- **Passo 2:** Construa a matriz de rigidez de cada elemento no sistema de coordenadas global, com numeração global;



4 graus de liberdade (dof)
 por elemento (2 por nó)

ELEM.	Nó 1	Nó 2
1	1	2
2	2	3
3	3	1

Matriz elemento 1

$$\mathbf{k}^{(1)} = \begin{bmatrix} d_{1x} & d_{1y} & d_{2x} & d_{2y} \\ & & & \\ & & & \\ & & & \end{bmatrix} \begin{matrix} d_{1x} \\ d_{1y} \\ d_{2x} \\ d_{2y} \end{matrix}$$

Matriz elemento 2

$$\mathbf{k}^{(2)} = \begin{bmatrix} d_{2x} & d_{2y} & d_{3x} & d_{3y} \\ & & & \\ & & & \\ & & & \end{bmatrix} \begin{matrix} d_{2x} \\ d_{2y} \\ d_{3x} \\ d_{3y} \end{matrix}$$

Matriz elemento 3

$$\mathbf{k}^{(3)} = \begin{bmatrix} d_{3x} & d_{3y} & d_{1x} & d_{1y} \\ & & & \\ & & & \\ & & & \end{bmatrix} \begin{matrix} d_{3x} \\ d_{3y} \\ d_{1x} \\ d_{1y} \end{matrix}$$

Exemplo 1

- **Passo 3:** Monte a matriz de rigidez global para toda a estrutura, utilizando a tabela de conectividade;

Matriz elemento 1

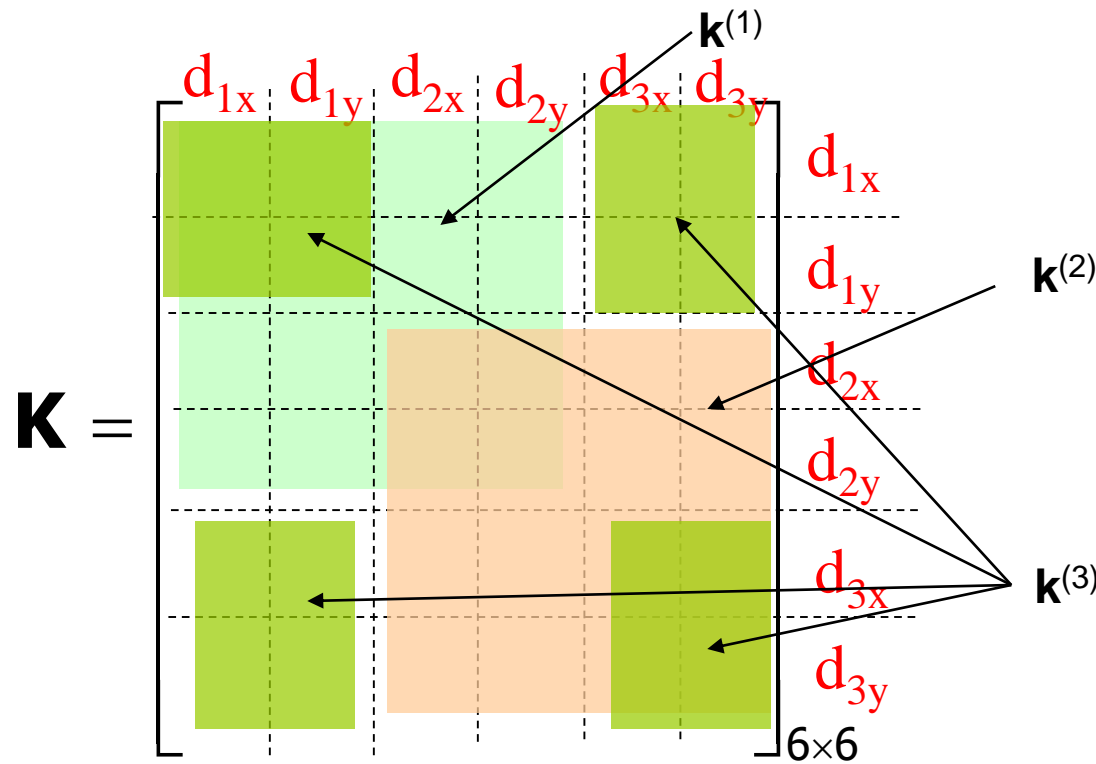
$$\mathbf{k}^{(1)} = \begin{bmatrix} d_{1x} & d_{1y} & d_{2x} & d_{2y} \\ & & & \\ & & & \\ & & & \end{bmatrix} \begin{matrix} d_{1x} \\ d_{1y} \\ d_{2x} \\ d_{2y} \end{matrix}$$

Matriz elemento 2

$$\mathbf{k}^{(2)} = \begin{bmatrix} d_{2x} & d_{2y} & d_{3x} & d_{3y} \\ & & & \\ & & & \\ & & & \end{bmatrix} \begin{matrix} d_{2x} \\ d_{2y} \\ d_{3x} \\ d_{3y} \end{matrix}$$

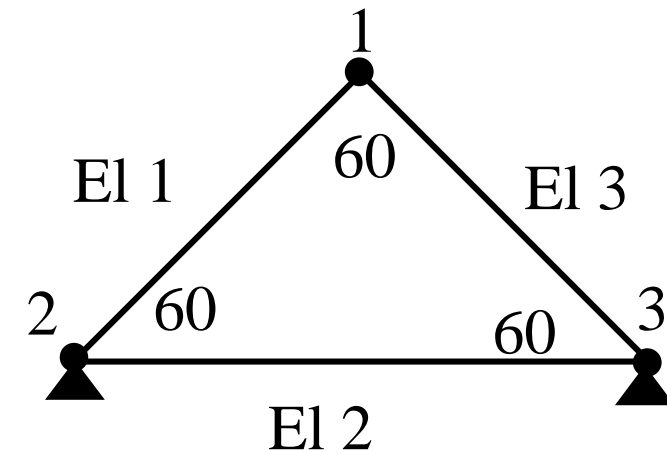
Matriz elemento 3

$$\mathbf{k}^{(3)} = \begin{bmatrix} d_{3x} & d_{3y} & d_{1x} & d_{1y} \\ & & & \\ & & & \\ & & & \end{bmatrix} \begin{matrix} d_{3x} \\ d_{3y} \\ d_{1x} \\ d_{1y} \end{matrix}$$



Matriz global

ELEM.	Nó 1	Nó 2
1	1	2
2	2	3
3	3	1



As barras 1 e 2 têm comprimentos iguais (L)

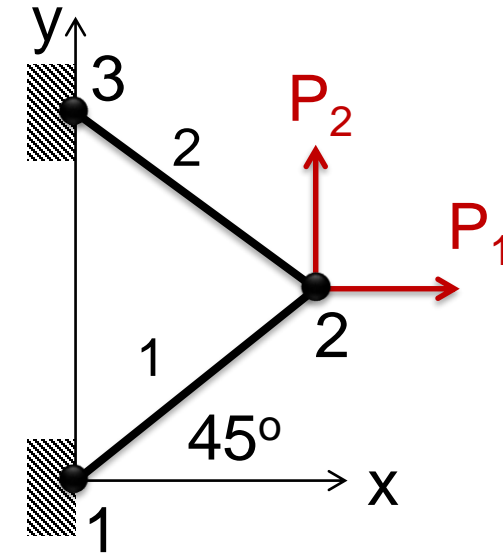
E : Módulo de Young de cada barra

A : Seção transversal de cada barra

Encontre:

(1) d_{2x} and d_{2y}

(2) Tensão em cada barra

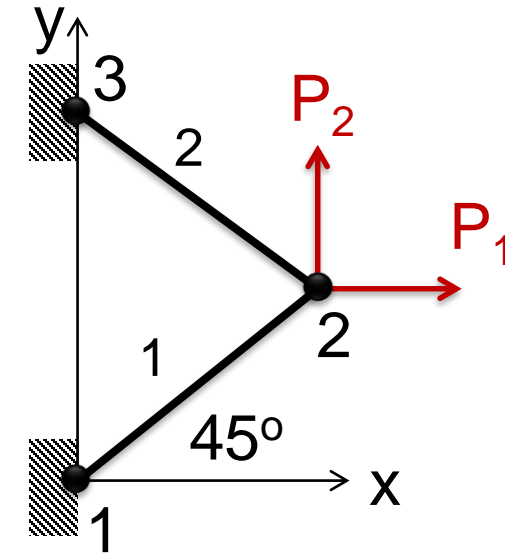


- **Passo 1:** Faça a tabela de conectividade nó-elemento de ligação relacionando nós locais e globais; faça a tabela de cossenos diretores (l, m);

ELEMENTO	Nó 1	Nó 2
1	1	2
2	2	3

Exemplo 2

- Passo 1:** Faça a tabela de conectividade nó-elemento de ligação relacionando nós locais e globais; faça a tabela de cossenos diretores (l, m);



ELEMENTO	Nó 1	Nó 2
1	1	2
2	2	3

Nó	x	y
1	0	0
2	$L \cos 45^\circ$	$L \sin 45^\circ$
3	0	$2L \sin 45^\circ$

Elemento	Comprimento	$l = \frac{x_2 - x_1}{L}$	$m = \frac{y_2 - y_1}{L}$
1	L	$\cos 45^\circ$	$\sin 45^\circ$
2	L	$-\cos 45^\circ$	$\sin 45^\circ$

- Passo 2:** Construa a matriz de rigidez de cada elemento no sistema de coordenadas global, com numeração global;

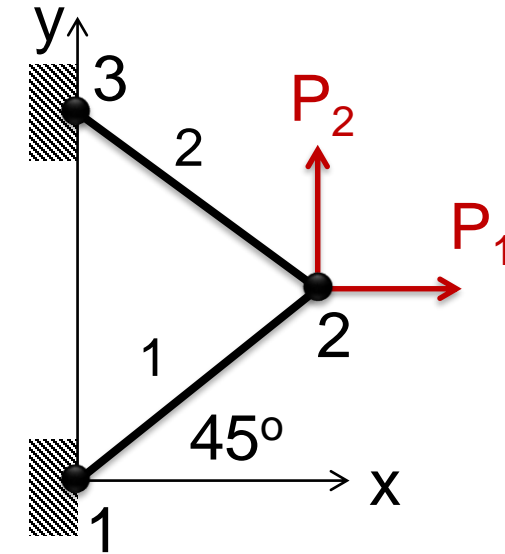
Matriz de rigidez, elemento #1

$$\mathbf{k}^{(1)} = \frac{EA}{L} \begin{bmatrix} l^2 & lm & -l^2 & -lm \\ lm & m^2 & -lm & -m^2 \\ -l^2 & -lm & l^2 & lm \\ -lm & -m^2 & lm & m^2 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{k}^{(1)} = \frac{EA}{2L} \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{matrix} d_{1x} \\ d_{1y} \\ d_{2x} \\ d_{2y} \end{matrix}$$

Matriz de rigidez, elemento #2

$$\mathbf{k}^{(2)} = \frac{EA}{2L} \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{matrix} d_{2x} \\ d_{2y} \\ d_{3x} \\ d_{3y} \end{matrix}$$

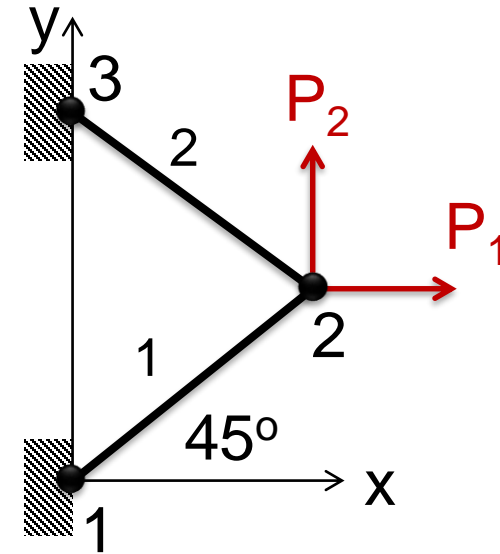


- **Passo 3:** Monte a matriz de rigidez global para toda a estrutura, utilizando a tabela de conectividade;

$$\mathbf{K} = \frac{EA}{2L} \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 2 & 0 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & 0 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

A equação final é:

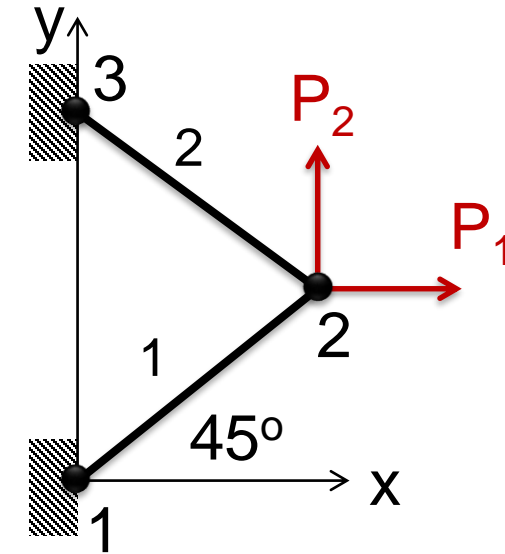
$$\mathbf{Kd} = \mathbf{f}$$



- **Passo 4:** Incorpore condições de contorno apropriadas;

$$\mathbf{K} = \frac{EA}{2L} \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 2 & 0 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & 0 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{d} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ d_{2x} \\ d_{2y} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$



A equação final é:

$$\mathbf{Kd} = \mathbf{f}$$

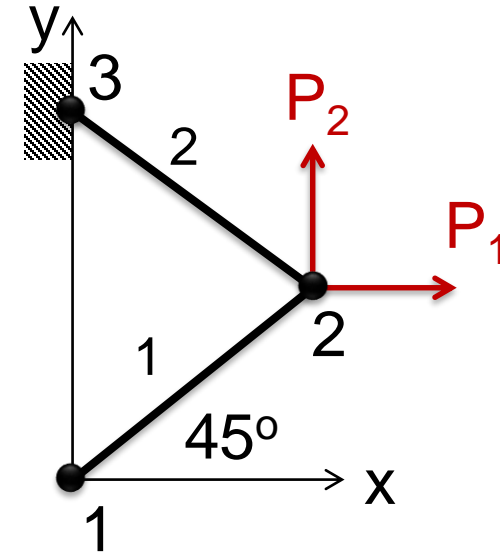
$$\frac{EA}{2L} \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d_{2x} \\ d_{2y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P_1 \\ P_2 \end{bmatrix}$$

- **Passo 5:** Resolva o conjunto de equações reduzidas para os deslocamentos desconhecidos;

$$\begin{Bmatrix} d_{2x} \\ d_{2y} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{P_1 L}{EA} \\ \frac{P_2 L}{EA} \end{Bmatrix}$$

- **Passo 6:** Calcule as forças nodais desconhecidas (reações);

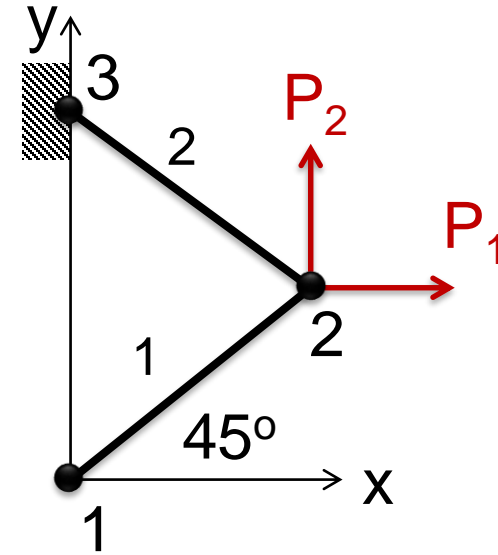
$$\frac{EA}{2L} \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 2 & 0 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & 0 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{L}{EA} P_1 \\ \frac{L}{EA} P_2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = R \begin{bmatrix} R_{1x} \\ R_{1y} \\ P_1 \\ P_2 \\ R_{3x} \\ R_{3y} \end{bmatrix}$$



- **Passo 6:** Calcule as forças nodais desconhecidas (reações);

$$\frac{EA}{2L} \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 2 & 0 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & 0 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ L P_1 \\ L P_2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = R \begin{bmatrix} R_{1x} \\ R_{1y} \\ P_1 \\ P_2 \\ R_{3x} \\ R_{3y} \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned}
 R_{1x} &= -\frac{1}{2}(P_1 + P_2) & R_{1y} &= -\frac{1}{2}(P_1 + P_2) \\
 R_{3x} &= -\frac{1}{2}(P_1 + P_2) & R_{3y} &= -\frac{1}{2}(P_1 + P_2)
 \end{aligned}$$

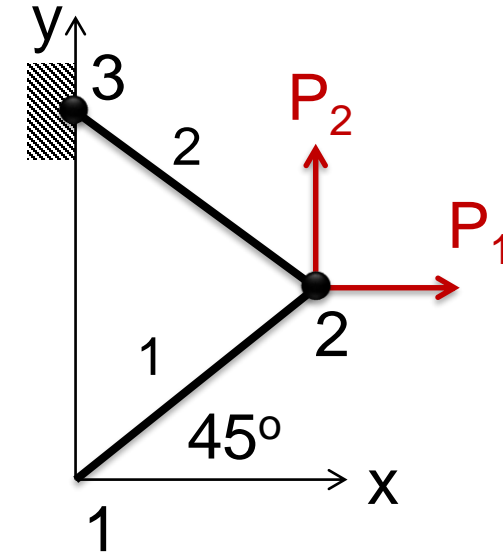


- **Passo 7:** Calcule tensões e deformações;

Elemento#1:

$$\sigma^{(1)} = \frac{E}{L} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} d_{1x} \\ d_{1y} \\ d_{2x} \\ d_{2y} \end{Bmatrix} \begin{matrix} 0 \\ 0 \end{matrix}$$

$$= \frac{E}{\sqrt{2}L} (d_{2x} + d_{2y}) = \frac{P_1 + P_2}{A\sqrt{2}}$$



Elemento#2:

$$\sigma^{(2)} = \frac{E}{L} \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 & 1 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} d_{2x} \\ d_{2y} \\ d_{3x} \\ d_{3y} \end{Bmatrix} \begin{matrix} 0 \\ 0 \end{matrix}$$

$$= \frac{E}{\sqrt{2}L} (d_{2x} - d_{2y}) = \frac{P_1 - P_2}{A\sqrt{2}}$$

1) A treliça plana abaixo consiste de três barras conectadas por pinos. As barras têm ângulos iguais entre si e o elemento 2 está na vertical. As barras são idênticas e possuem: $E=206 \text{ GPa}$, $A=1 \times 10^{-4} \text{ m}^2$, $F=20 \text{ kN}$.

Encontre o valor dos deslocamentos no nó 1 e as tensões nos três elementos.

