Controlador Sliding Mode - Teoria e aplicação

SEL0364 - Controle Não Linear Aplicado

Prof^a. Vilma Alves de Oliveira
Colaborador: Rafael F. Q. Magossi

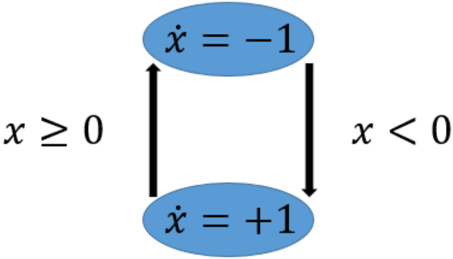
Universidade de São Paulo
Escola de Engenharia de São Carlos

6 de maio de 2019

Overview

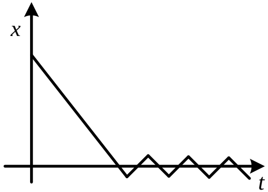
Motivação

Imagine um sistema descrito por uma única variável de estado x, o qual possui a dinâmica representada por:



Motivação

No tempo, partindo de uma posição arbitrária positiva, o sistema assume uma derivada negativa e decresce. Ao cruzar o zero, o sistema passa a ter a derivada positiva e cresce, até novamente passar pelo zero, assim incessantemente.



Ou seja, o sistema **desliza** ao longo do tempo em torno de $x = 0$. Dizemos que $x = 0$ é a **superfície de deslizamento**. Nessa condição, não existe o modo do sistema com derivada positiva, e nem o modo do sistema com derivada negativa. O sistema ganha um novo modo, o chamado modo deslizante (do inglês, *sliding mode*).

Modo de deslizamento

Considere o seguinte sistema não-linear com controle escalar:

$$\dot{x} = f(x,u), \quad x, f \in \mathcal{R}^n, \quad u(x) \in \mathcal{R}, \tag{1}$$

$$u(x) = \begin{cases} u^+(x), & \text{se } s(x) \geq 0 \\ u^-(x), & \text{se } s(x) < 0, \end{cases} \tag{2}$$

$$s(x) = x - x_d \tag{3}$$

em que $s(x)$ é a superfície de deslizamento, $u^+(x)$, $u^-(x)$ e $s(x)$ são contínuas e suaves, x é o vetor de estado, x_d é o vetor de estado desejado, e $u^+(x) \neq u^-(x)$. Assumiremos que a condição de modo deslizante acontece para $s(x) = 0$, e derivamos as equações dinâmicas desse sistema utilizando um método conhecido por regularização.

Suposição

A velocidade dos vetores:

$$f^{+}(x) = f(x, u^{+}) \tag{4}$$

$$f^{-}(x) = f(x, u^{-}) \tag{5}$$

são constantes para qualquer ponto x na superfície $s(x) = 0$ em um curto intervalo de tempo $[t, t + \Delta t]$, onde $\Delta t = \Delta t_1 + \Delta t_2$ e $u = u^{+}$ para o intervalo definido por Δt_1 e $u = u^{-}$ para o intervalo definido por Δt_2.

Velocidade média

A variação do vetor de estado após o intervalo Δt será dado, portanto, por:

$$\Delta x = f^+ \Delta t_1 + f^- \Delta t_2 \tag{6}$$

e a velocidade média do estado será:

$$\dot{x} = f_m(x) \tag{7}$$
$$f_m(x) = \mu f^+ + (1-\mu) f^- \tag{8}$$

em que $\mu = \frac{\Delta t_1}{\Delta t}$ é o tempo relativo de controle com u^+ e $(1-\mu)$ para o controle u^-, de forma que:

$$0 \leq \mu \leq 1.$$

Plano tangente

Mas não estamos interessados no valor médio e sim em $\dot{x}$. Para isso, devemos tomar o limite para quando Δt tende à zero. Entretanto, não precisamos fazer isso devido a nossa consideração de velocidade constante dos vetores nesse intervalo, portanto a equação:

$$\dot{x} = \mu f^{+} + (1 - \mu) f^{-}, \tag{9}$$

representa a dinâmica durante o deslizamento.
Devido a trajetória durante o deslizamento estar na superfície $s(x) = 0$, o parâmetro μ deve ser selecionado de tal forma que a velocidade do sistema seja um plano tangente à supercífie de deslizamento, isso é:

$$\dot{s} = \nabla(s(x)) \cdot \dot{x} = \nabla(s(x)) \cdot [\mu f^{+} + (1 - \mu) f^{-}] = 0, \tag{10}$$

em que $\nabla(s(x)) = [{}^{\partial s}/_{\partial x_1} \cdots {}^{\partial s}/_{\partial x_n}]$.

Considere o caso escalar. Resolvendo então para μ, obtemos a seguinte solução:

$$\mu = \frac{\nabla(s) \cdot f^-}{\nabla(s) \cdot (f^- - f^+)}. \tag{11}$$

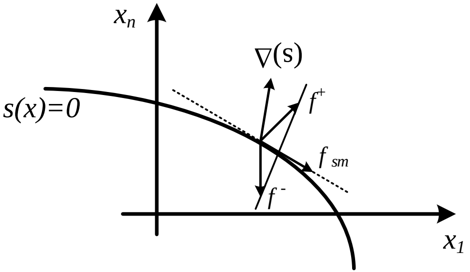
Substituindo em $\dot{x} = \mu f^+ + (1 - \mu) f^-$, obtemos a dinâmica para o modo deslizante:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= f_m(x) && (12) \\ f_m &= \frac{\nabla(s) \cdot f^-}{\nabla(s) \cdot (f^- - f^+)} f^+ - \frac{\nabla(s) \cdot f^+}{\nabla(s) \cdot (f^- - f^+)} f^-, && (13) \end{aligned}$$

para condição inicial s[x(0)] = 0.

Filippov

Uma observação interessante sobre o método de regularização para derivar a dinâmica do modo deslizante, é que pode ser considerada como uma interpretação física do famoso método de **Filippov**.



O método é destinado a obtenção de uma solução contínua para equações diferenciais com lados diretos descontínuos.

Exemplo

Considere um simples sistemas com distúrbio

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= u + \Delta(x_1, x_2, t), \ |\Delta| \le L, \quad L > 0 \end{aligned} \tag{14}$$

Proposta de dinâmica para garantir a convergência da solução para zero

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 + \lambda x_1 &= 0, \quad \lambda > 0 \\ x_2 &= \dot{x}_1 \end{aligned} \tag{15}$$

Defina a variável de deslizamento

$$\sigma = x_2 + \lambda x_1 \tag{16}$$

$$\begin{aligned} \dot{\sigma} &= \dot{x}_2 + \lambda \dot{x}_1 \\ &= \Delta + u + \lambda x_2 \end{aligned} \tag{17}$$

Análise de estabilidade

$$V = \frac{1}{2}\sigma^2 \tag{18}$$

$$\begin{aligned} \dot{V} &= \sigma\dot{\sigma} \\ &= \sigma(\Delta + u + \lambda x_2) \end{aligned} \tag{19}$$

Condição $\dot{V} \leq 0$.
Escolha $u = -\lambda x_2 + v$

$$\dot{V} \leq |\sigma|L + \sigma v \tag{20}$$

e selecione $v = -\rho\ \text{sign}(\sigma),\ \rho > 0$

$$\dot{V} \leq |\sigma|L + \sigma v = -|\sigma|(\rho - L) \tag{21}$$

Tarefa de Simulação

Simular a solução para $\rho = 2, \lambda = 2, \Delta = \sin(4t)$

Proposta de superfície de deslizamento

Seja $\tilde{x} = x - x_d$ o erro de seguimento na variável x e seja o vetor de erro de seguimento:

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{x}} &= \mathbf{x} - \mathbf{x_d} \\ &= \left[\tilde{x}\ \dot{\tilde{x}}\ \cdots x^{(\widetilde{n-1})}\right]^T \end{aligned} \tag{22}$$

Defina a superfície de deslizamento como

$$s(x) = \left(\frac{d}{dt} + \lambda\right)^{n-1} \tilde{x},\ \lambda > 0 \tag{23}$$

Por exemplo, se n=2 temos:

$$s(x) = \dot{\tilde{x}} + \lambda\tilde{x} \tag{24}$$

Método do controle equivalente

A lei de controle com chaveamento é descontínua. Assim, para facilitar, pode-se buscar uma lei de controle contínua equivalente.
Na condição de deslizamento:

$$s(x) = 0, \quad t > 0 \tag{25}$$

então assumimos que $\dot{s} = 0$, e consequentemente:

$$\dot{s}(x) = G f(x, u) = 0 \tag{26}$$

em que $G = {}^{\partial s}/_{\partial x}$ é uma matriz $m \times n$ com gradientes da função $s_i(x)$ como linhas e a solução de u que satisfaz essa equação é chamada **controle equivalente**. Em outras palavras, substituí-se a lei de controle com chaveamento por uma lei de controle contínua durante o deslizamento.

Exemplo 1

Vamos aplicar o controle equivalente em um sistema não-linear descrito por:

$$\dot{x} = f(x) + B(x)u, \quad x, f(x) \in \mathcal{R}^n, \quad B(x) \in \mathcal{R}^{n\times m} \quad u(x) \in \mathcal{R}^m \tag{27}$$

$$u_i(x) = \begin{cases} u_i^+(x), & \text{se } s_i(x) \geq 0 \\ u_i^-(x), & \text{se } s_i(x) < 0. \end{cases} \tag{28}$$

com $s(x)^T = [s_1 \cdots s_m]$. Aplicando o método, temos:

$$\dot{s} = Gf + GBu_{eq} = 0 \tag{29}$$

$$u_{eq}(x) = -(G(s)B(x))^{-1}G(x)f(x) \tag{30}$$

e a dinâmica do sistema com controle equivalente:

$$\dot{x} = f(x) - B(x)(G(x)B(x))^{-1}G(x)f(x). \tag{31}$$

Exemplo 2 (Slotine)

Considere agora o sistema de segunda ordem:

$$\ddot{x} = f(x) + u. \tag{32}$$

Na forma espaço de estado
A lei de controle equivalente é obtida a partir de $\dot{s}(x) = 0$. Escolhendo $s(x) = \dot{\tilde{x}} + \lambda\tilde{x}$ tem-se na forma espaço de estado

$$s(z) = z_2 + \lambda z_1 \tag{33}$$

com $z^T = [z_1 \;\; z_2], z_1 = x - x_d, \;\; z_2 = \dot{x} - \dot{x}_d$

$$\begin{aligned}
\dot{s} &= \frac{\partial s}{\partial z}\dot{z} \\
&= [\lambda \;\; 1][z_1 \;\; z_2]^T \\
&= \ddot{x} - \ddot{x}_d + \lambda\dot{\tilde{x}} \\
&= f(x) + u - \ddot{x}_d + \lambda\dot{\tilde{x}}
\end{aligned}$$

Exemplo 2 (cont.)

Assim,

$$u_{eq} = -f(x) + \ddot{x}_d - \lambda\dot{\tilde{x}}. \tag{34}$$

No modo de deslizamento tem-se:

$$\ddot{x} = f(x) + u \tag{35}$$
$$= f(x) + u_{eq} = \ddot{x}_d - \lambda\dot{\tilde{x}} \tag{36}$$

Geometricamente, o controle pode ser construído como

$$u_{eq} = \alpha u_+ + (1-\alpha)u_- \tag{37}$$

uma combinação convexa dos valores de u em ambos os lados da superfície s. O valor de α pode ser obtido da igualdade $\dot{s}(x) = 0$.

Frequência infinita

A construção do controle equivalente de Filippov leva então a:

$$
\begin{aligned}
f_{+} &= \left[\dot{x} \quad f+u_{+}\right]^{T}, f_{-} = \left[\dot{x} \quad f+u_{-}\right]^{T} \\
f_{eq} &= \left[\dot{x} \quad f+u_{eq}\right]^{T}.
\end{aligned}
$$

Durante o deslizamento, há uma idealização: o controle alterna teoricamente com **frequência infinita**. Entretanto, essa oscilação pode ser decomposta em uma dinâmica mais lenta e uma muito alta. Quando esse sinal entra na planta, a parte com alta frequência é filtrada, sobrando somente a dinâmica lenta. Essa dinâmica lenta é muito próxima ao que definimos como controle equivalente.

Função de Lyapunov

Devido às descontinuidades no sistema, a estabilidade é analisada por Lyapunov na superfície de deslizamento. Assim, vamos escolher a seguinte função candidata de Lyapunov:

$$V(x) = \frac{1}{2}s^2(x) \tag{38}$$

precisamos que:

$$V\dot{(x)} < 0 \tag{39}$$

ou seja:

$$V\dot{(x)} = \boxed{s(x)\dot{s}(x) < 0} \tag{40}$$

é condição suficiente.

Sistema incerto

Suponha que a dinâmica $f(x)$ não é totalmente conhecida mas estimada como $\hat{f}(x)$ e que o erro de estimação de $f(x)$ é limitado por uma função $F(x)$:

$$|\hat{f}(x) - f(x)| \leq F(x). \tag{41}$$

Exemplo 3

Considere o sistema:

$$\ddot{x} + a(t)\dot{x}^2 \cos 3x = u, \ 1 \leq a(t) \leq 2 \tag{42}$$

$$\hat{f}(x) = -1.5\dot{x}^2 \cos 3x, \ F(x) = 0.5\dot{x}^2 |\cos 3x| \tag{43}$$

Para a saída seguir x_d, defina a superfície $s(\mathbf{x}) = 0$ como

$$s(x) = \dot{\tilde{x}} + \lambda\tilde{x} \tag{44}$$

$$\dot{s}(x) = f(x) + u - \ddot{x}_d + \lambda\dot{\tilde{x}} \tag{45}$$

A melhor estimativa de uma lei de controle contínua u denotada $\hat{u}$ para fazer $\dot{s}(x) = 0$ é então

$$\hat{u} = -\hat{f}(x) + \ddot{x}_d - \lambda\dot{\tilde{x}} \tag{46}$$

Exercício

Para satisfazer a condição de estabilidade $s(x)\dot{s}(x) < 0$ construimos a lei de controle adicionando um sinal descontínuo a $\hat{u}$:

$$u = \hat{u} - k \; sgn(s) \tag{47}$$

em que sgn(s) é a função sinal. Pede-se:
(1) verificar que a condição de estabilidade é satisfeita se $k = F(x) + \eta, \; \eta > 0$. Dica: substituir a lei de controle (47) com $\hat{u}$ dada por (46) na derivada da função de Lyapunov e obter:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\frac{d}{dt}s(x)^2 &= \dot{s}s \\ &= [f - \hat{f} - k \; sgn(s)]s = (f - \hat{f})s - k|s| \end{aligned}$$

(2) Simular o sistema com o controle u.
Obs: o valor do k é dado em função de $F(x)$ que é conhecida.

Projeto do controlador

O projeto de controladores via *sliding mode*:

- Não existem metodologias diretas para qualquer caso de controladores;
- Para plantas não-lineares de ordem elevada pode ser um desafio, variando de caso para caso;
- Usualmente pode-se estabelecer algumas condições para uma classe de problemas.

Sistemas bilineares

Suponha um sistema bilinear da forma:

$$\dot{x} = Ax + uBx \tag{48}$$

em que $x \in \mathcal{R}^n$, $A \in \mathcal{R}^{n\times n}$, $B \in \mathcal{R}^{n\times n}$ e u é um controle escalar com valores no conjunto $U =: [0, 1]$.
Para esse sistema é possível escolher a seguinte lei de controle descontínua:

$$u = \frac{1}{2}\left(1 - sign(s)\right), \quad sign(s) = \begin{cases} 1 & \text{se } s(x) > 0 \\ 0 & \text{se } s(x) = 0 \\ -1 & \text{se } s(x) < 0 \end{cases} \tag{49}$$

tal que s é uma função escalar de chaveamento definida por:

$$s = c^T x, \quad c^T = [\partial s/\partial x] \tag{50}$$

Sistemas bilineares (cont.)

Queremos saber qual é a condição para estabilidade do sistema com essa lei de chaveamento. Para isso, vamos procurar $s\dot{s} < 0$, isso é:

$$\begin{aligned} \dot{s} &= c^T\dot{x} = c^TAx + uc^TBx = c^TAx + \frac{1}{2}c^TBx - \frac{1}{2}sign(s)c^TBx && (51) \\ s\dot{s} &= s\left(c^TAx + \frac{1}{2}c^TBx\right) - \frac{1}{2}|s|c^TBx < 0. && (52) \end{aligned}$$

A partir dessa inequação a condição necessária para obter o modo deslizante pode ser obtida. E se o modo deslizante existe, então $s = 0$, e obtemos as seguintes relações:

$$\begin{aligned} \dot{s}_{s>0} &= C^TAx < 0 && (53) \\ \dot{s}_{s<0} &= C^TBx > -C^TAx && (54) \end{aligned}$$

Sistemas bilineares (cont.)

Podemos obter também a lei de controle equivalente desse sistema. Para isso basta resolvermos u que, como visto, satisfaça $\dot{s} = 0$, isso é:

$$u_{eq} = -\frac{c^T Ax}{c^T Bx}, \tag{55}$$

e o sistema dinâmico durante o deslizamento se torna:

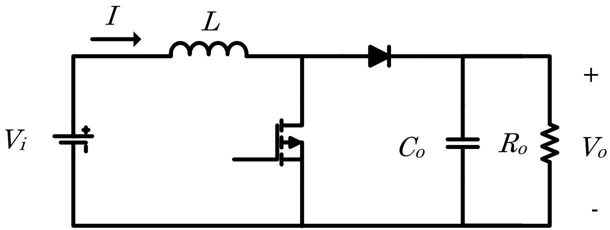
$$\dot{x} = Ax + u_{eq}Bx. \tag{56}$$

Além disso, fica fácil mostrar que para a condição de modo deslizante existir, então o controle equivalente deve satisfazer:

$$0 < u_{eq} = -\frac{c^T Ax}{c^T Bx} < 1. \tag{57}$$

Modelo conversor boost

O conversor CC–CC boost mostrado abaixo é uma topologia de conversor da classe dos conversores CC–CC *step-up* (elevador de tensão).



Conversores CC–CC, em geral, são sistemas bilineares.

Equações conversor boost

O equacionamento desse conversor é dado por:

$$\dot{x}_1 = -(1-u)\frac{1}{L}x_2 + \frac{V_i}{L} \tag{58}$$

$$\dot{x}_2 = (1-u)\frac{1}{C_o}x_1 - \frac{1}{R_o C_o}x_2 \tag{59}$$

com $x_1 = I$ e $x_2 = V_o$.

O objetivo é controlar a corrente de entrada I desse conversor utilizando um controlador *sliding mode*. Deseja-se obter uma corrente de entrada de 10 A.

Solução

- Primeiramente define-se a superfície de deslizamento:

$$s = x_1 - x_1^* \tag{60}$$

para que a corrente x_1 atinja a corrente desejada x_1^*.

- A lei de controle pode ser definida como:

$$u = \frac{1}{2}(1 - sign(s)). \tag{61}$$

- A lei de controle equivalente será obtida pela solução de $\dot{s} = 0$, isso é:

$$\dot{x_1} = -(1-u)\frac{1}{L}x_2 + \frac{V_i}{L} = 0 \tag{62}$$

Solução (cont.)

resolvendo para u, obtemos:

$$u_{eq} = 1 - \frac{V_i}{x_2}. \tag{63}$$

Para garantir a condição de modo deslizante, precisamos que:

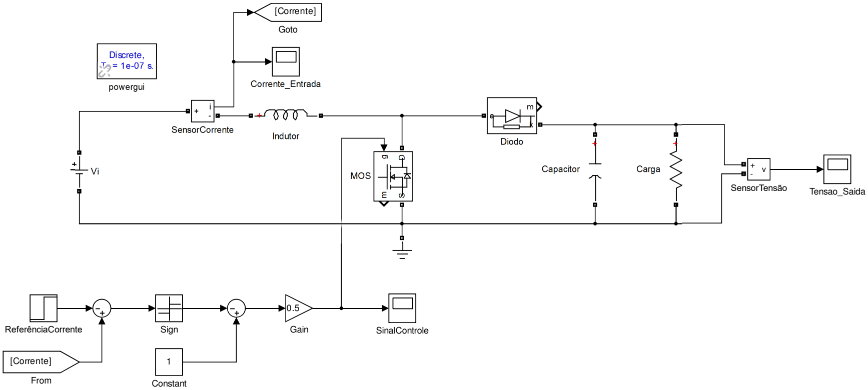
$$0 < u_{eq} = 1 - \frac{V_i}{x_2} < 1 \tag{64}$$

isso é:

$$x_2 > V_i \leftrightarrow \boxed{V_o > V_i} \tag{65}$$

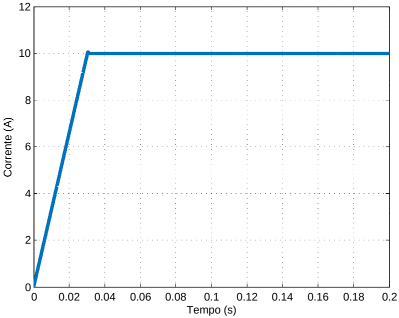
Simulação

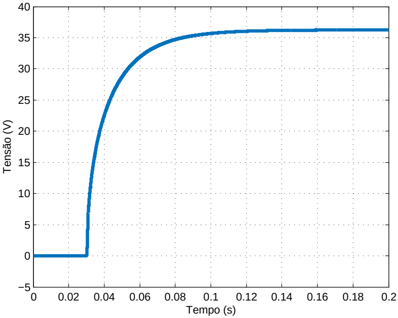
No Simulink monta-se a seguinte simulação com $V_i = 3.3V$, $L = 10mH$, $C_o = 1000\mu F$ e $R_o = 40\Omega$:



Resultados

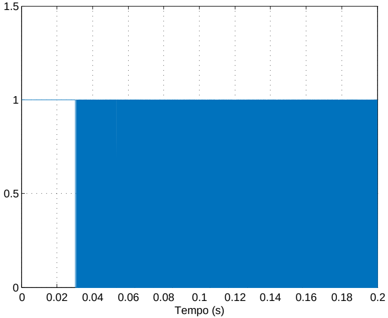
Obtemos como resultado:





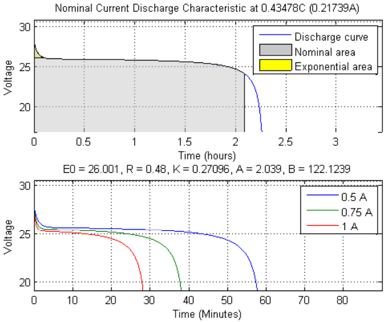
Resultados (cont.)

Observe o sinal de controle, a frequência é **variável** e quando atinge a superfície de deslizamento a frequência fica **arbitrariamente alta** (sendo limitada na simulação pelo passo de resolução do solver do Simulink).



Problema proposto

Você trabalha em uma empresa de mobiles. Um novo projeto da empresa prevê um *portable power bank* para carregar celulares. O engenheiro sênior responsável pela eletrônica de potência disse que será utilizada uma bateria de lítio, a qual deve ser descarregada à corrente constante para garantir sua vida útil e seu papel é projetar um controlador que consiga fazer isso.



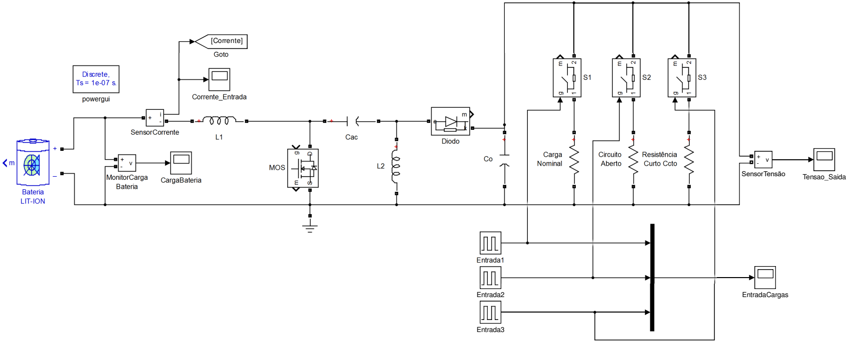
Problema proposto (cont.)

O engenheiro sênior disse que será utilizado a topologia de um conversor SEPIC. Na saída desse conversor serão acoplados outros sistemas para ajuste da tensão de saída. Visando um teste acelerado de vida dos componentes, os requisitos de sucesso do projeto foram os seguintes:

- A corrente nominal drenada da bateria é de 0.5A, entretanto para o teste a mesma deve ser drenada à 3A por 0.3s.
- A corrente deve permanecer constante para 3 entradas de cargas: de 0 a 0.1s deve atender uma carga equivalente nominal de 100Ω, de 0.1s a 0.2s uma carga equivalente de circuito aberto de $10M\Omega$ e de 0.2s a 0.3s uma carga equivalente de curto circuito de $1m\Omega$.
- Você deve assegurar a estabilidade do sistema para essas condições.

Problema proposto (cont.)

O circuito é mostrado abaixo:



Os componentes passivos possuem os seguintes valores nominais:

- $L_1 = L_2 = 10mH$
- $C_{ac} = 1000nF$
- $C_o = 10\mu F$.

Problema proposto

Pede-se ao projetista:

1. Obtenha a representação em espaço de estado desse sistema (considere uma bateria constante na entrada para suprir o sistema);
2. Obtenha a lei de controle;
3. Obtenha a lei de controle equivalente;
4. Obtenha a condição para estabilidade do sistema;
5. Uma técnica tradicional PWM utilizando um controlador PI poderia assegurar os requisitos do projeto? Se sim ou se não, justifique.

Referências

Slotine, Jean-Jacques E., and Weiping Li. Applied nonlinear control. Englewood Cliffs, NJ: prentice-Hall, 1991.

Yasir Amir Khan. Sliding mode control lectures. https://www.youtube.com/watc

Utkin, Vadim, Jürgen Guldner, and Jingxin Shi. Sliding mode control in electro-mechanical systems. CRC press, 2009.

Ricardo Alzate and Vilma A. Oliveira. Multiobjective design of PI controllers with applications, 2016 IEEE Conference on Control Applications (CCA). IEEE, 2016.