

PRINCÍPIO DE INVARIÂNCIA

SEL 0364 CONTROLE NÃO LINEAR

Rayza Araújo

2019

SISTEMA

$$\begin{aligned}\dot{x} &= -x^3 + 2y^3 \\ \dot{y} &= -2xy^2\end{aligned}$$

Desejamos:

- Encontrar o(s) ponto(s) de equilíbrio
- Tirar conclusões sobre estabilidade

PONTOS DE EQUILÍBRIO

$$\dot{x} = -x^3 + 2y^3 = 0$$

$$\dot{y} = -2xy^2 = 0$$

PONTOS DE EQUILÍBRIO

$$\begin{cases} x^3 = 2y^3 \Rightarrow x = \sqrt[3]{2}y \\ x = 0 \text{ ou } y = 0 \end{cases}$$

$$\dot{x} = -x^3 + 2y^3 = 0$$

$$\dot{y} = -2xy^2 = 0$$

PONTOS DE EQUILÍBRIO

$$\begin{aligned}\dot{x} &= -x^3 + 2y^3 = 0 \\ \dot{y} &= -2xy^2 = 0\end{aligned}$$

$$\begin{cases} x^3 = 2y^3 \Rightarrow x = \sqrt[3]{2}y \\ x = 0 \text{ ou } y = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \text{se } x = 0 \Rightarrow y = 0 \\ \text{se } y = 0 \Rightarrow x = 0 \end{cases}$$

PONTOS DE EQUILÍBRIO

$$\begin{aligned}\dot{x} &= -x^3 + 2y^3 = 0 \\ \dot{y} &= -2xy^2 = 0\end{aligned}$$

$$\begin{cases} x^3 = 2y^3 \Rightarrow x = \sqrt[3]{2}y \\ x = 0 \text{ ou } y = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \text{se } x = 0 \Rightarrow y = 0 \\ \text{se } y = 0 \Rightarrow x = 0 \end{cases}$$

Origem é o único equilíbrio

LINEARIZAÇÃO

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{bmatrix} \approx \dot{\zeta} = A\zeta$$

LINEARIZAÇÃO

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{bmatrix} \approx \dot{\zeta} = A\zeta$$

onde

$$A = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x} & \frac{\partial f_1}{\partial y} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x} & \frac{\partial f_2}{\partial y} \end{bmatrix}_{(x_0, y_0)} = \begin{bmatrix} -3x_0^2 & 6y_0^2 \\ -2y_0^2 & -4x_0y_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

LINEARIZAÇÃO

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{bmatrix} \approx \dot{\zeta} = A\zeta$$

onde

$$A = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x} & \frac{\partial f_1}{\partial y} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x} & \frac{\partial f_2}{\partial y} \end{bmatrix}_{(x_0, y_0)} = \begin{bmatrix} -3x_0^2 & 6y_0^2 \\ -2y_0^2 & -4x_0y_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Inútil!

PLANO DE FASE

pplane.m

LYAPUNOV

Sugestão: $V(x, y) = x^2 + y^2$

LYAPUNOV

Sugestão: $V(x, y) = x^2 + y^2$
 $\checkmark V(0, 0) = 0$

LYAPUNOV

Sugestão: $V(x, y) = x^2 + y^2$

$$\checkmark V(0, 0) = 0$$

$$\checkmark V(x, y) \geq 0 \quad \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$$

LYAPUNOV

Sugestão: $V(x, y) = x^2 + y^2$

$$\checkmark V(0, 0) = 0$$

$$\checkmark V(x, y) \geq 0 \quad \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$$

$$\checkmark V(x, y) = 0 \Leftrightarrow (x, y) = (0, 0)$$

LYAPUNOV

Sugestão: $V(x, y) = x^2 + y^2$

$$\checkmark V(0, 0) = 0$$

$$\checkmark V(x, y) \geq 0 \quad \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$$

$$\checkmark V(x, y) = 0 \Leftrightarrow (x, y) = (0, 0)$$

$$\dot{V}(x, y) = ?$$

$$\dot{V}(x, y) = ?$$

$$\dot{V}(x, y) = \frac{\partial V}{\partial x} \dot{x} + \frac{\partial V}{\partial y} \dot{y}$$

$$\dot{V}(x, y) = ?$$

$$\dot{V}(x, y) = \frac{\partial V}{\partial x} \dot{x} + \frac{\partial V}{\partial y} \dot{y}$$

$$\Rightarrow \dot{V}(x, y) = (2x)\dot{x} + (2y)\dot{y}$$

$$\dot{V}(x, y) = ?$$

$$\dot{V}(x, y) = \frac{\partial V}{\partial x} \dot{x} + \frac{\partial V}{\partial y} \dot{y}$$

$$\Rightarrow \dot{V}(x, y) = (2x)\dot{x} + (2y)\dot{y}$$

$$\Rightarrow \dot{V}(x, y) = (2x)(-x^3 + 2y^3) + (2y)(-2xy^2)$$

$$\dot{V}(x, y) = ?$$

$$\dot{V}(x, y) = \frac{\partial V}{\partial x} \dot{x} + \frac{\partial V}{\partial y} \dot{y}$$

$$\Rightarrow \dot{V}(x, y) = (2x)\dot{x} + (2y)\dot{y}$$

$$\Rightarrow \dot{V}(x, y) = (2x)(-x^3 + 2y^3) + (2y)(-2xy^2)$$

$$\Rightarrow \dot{V}(x, y) = -2x^4 + 4xy^3 - 4xy^3$$

$$\Rightarrow \dot{V}(x, y) = -2x^4$$

LYAPUNOV

Sugestão: $V(x, y) = x^2 + y^2$

$$\checkmark V(0, 0) = 0$$

$$\checkmark V(x, y) = 0 \Leftrightarrow (x, y) = (0, 0)$$

$$\checkmark V(x, y) \geq 0 \quad \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$$

$$\checkmark \dot{V}(x, y) \leq 0$$

LYAPUNOV

Sugestão: $V(x, y) = x^2 + y^2$

$$\checkmark V(0, 0) = 0$$

$$\checkmark V(x, y) = 0 \Leftrightarrow (x, y) = (0, 0)$$

$$\checkmark V(x, y) \geq 0 \quad \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$$

$$\checkmark \dot{V}(x, y) \leq 0$$

...mas sabemos que a origem é assintoticamente estável!

PRINCÍPIO DE INVARIÂNCIA

Sejam $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ e $V : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ funções de classe C^1 . Seja L uma constante real tal que $\omega_L = \{r \in \mathbb{R}^n : V(r) < L\}$ seja limitado. Admita que $\dot{V}(r) \leq 0 \forall r \in \omega_L$ e defina o conjunto $E = \{r \in \omega_L : \dot{V}(r) = 0\}$.

Seja B o maior conjunto invariante contido em E , então todas as soluções iniciando em ω_L tendem para B quando $t \rightarrow \infty$.

PRINCÍPIO DE INVARIÂNCIA

Sejam $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ e $V : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ funções de classe C^1 . Seja L uma constante real tal que $\omega_L = \{r \in \mathbb{R}^n : V(r) < L\}$ seja limitado. Admita que $\dot{V}(r) \leq 0 \forall r \in \omega_L$ e defina o conjunto $E = \{r \in \omega_L : \dot{V}(r) = 0\}$. Seja B o maior conjunto invariante contido em E , então todas as soluções iniciando em ω_L tendem para B quando $t \rightarrow \infty$.

Sistema

F. Lyapunov

Conjunto próximo da origem

A ser definido dentro de ω_L

Restringe a trajetória

CONJUNTO INVARIANTE

$$\begin{bmatrix} \dot{r}_1 \\ \dot{r}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r_1 \\ r_2 \end{bmatrix}$$

CONJUNTO INVARIANTE

$$\begin{bmatrix} \dot{r}_1 \\ \dot{r}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r_1 \\ r_2 \end{bmatrix}$$

$$r_0 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} r_1(t) \\ r_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{-t} \\ -e^{-t} \end{bmatrix}$$

CONJUNTO INVARIANTE

$$\begin{bmatrix} \dot{r}_1 \\ \dot{r}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r_1 \\ r_2 \end{bmatrix}$$

$$r_0 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} r_1(t) \\ r_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{-t} \\ -e^{-t} \end{bmatrix}$$

$$r_0 = \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} r_1(t) \\ r_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2e^{-t} \\ -2e^{-t} \end{bmatrix}$$

CONJUNTO INVARIANTE

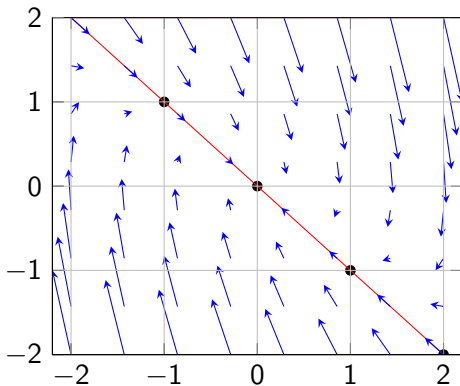
$$\begin{bmatrix} \dot{r}_1 \\ \dot{r}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r_1 \\ r_2 \end{bmatrix}$$

$$r_0 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} r_1(t) \\ r_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{-t} \\ -e^{-t} \end{bmatrix}$$

$$r_0 = \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} r_1(t) \\ r_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2e^{-t} \\ -2e^{-t} \end{bmatrix}$$

$$r_0 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} r_1(t) \\ r_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -e^{-t} \\ e^{-t} \end{bmatrix}$$

CONJUNTO INVARIANTE



PRINCÍPIO DE INVARIÂNCIA

$$\begin{aligned}\dot{x} &= -x^3 + 2y^3 \\ \dot{y} &= -2xy^2\end{aligned}$$

PRINCÍPIO DE INVARIÂNCIA

$$\begin{aligned}\dot{x} &= -x^3 + 2y^3 \\ \dot{y} &= -2xy^2\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}V(x, y) &= x^2 + y^2 \\ \dot{V}(x, y) &= -2x^4\end{aligned}$$

PRINCÍPIO DE INVARIÂNCIA

$$\begin{aligned}\dot{x} &= -x^3 + 2y^3 \\ \dot{y} &= -2xy^2\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}V(x, y) &= x^2 + y^2 \\ \dot{V}(x, y) &= -2x^4\end{aligned}$$

Escolher $L = l^2 \Rightarrow \omega_L = \{(x, y) \in \mathbb{R}^n : V(x, y) < l^2\}$ é limitado (por definição). E, de fato, $\dot{V}(x, y) \leq 0 \forall (x, y) \in \omega_L$

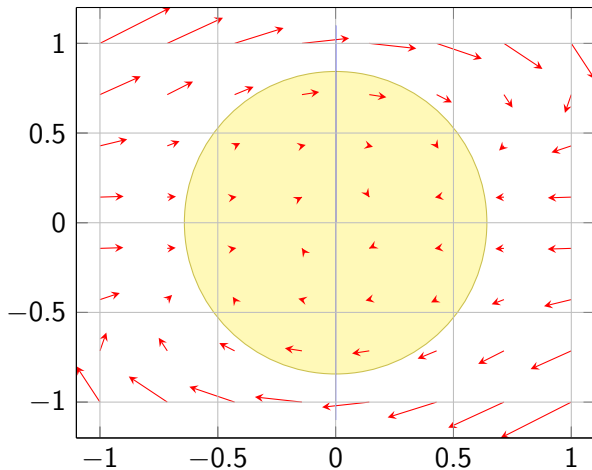
PRINCÍPIO DE INVARIÂNCIA

$$\begin{aligned}\dot{x} &= -x^3 + 2y^3 \\ \dot{y} &= -2xy^2\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}V(x, y) &= x^2 + y^2 \\ \dot{V}(x, y) &= -2x^4\end{aligned}$$

Escolher $L = l^2 \Rightarrow \omega_L = \{(x, y) \in \mathbb{R}^n : V(x, y) < l^2\}$ é limitado (por definição). E, de fato, $\dot{V}(x, y) \leq 0 \forall (x, y) \in \omega_L$

$$E = \{(x, y) \in \omega_L : \dot{V}(x, y) = 0\} \Leftrightarrow E = \{(x, y) \in \omega_L : x = 0\}$$



O maior conjunto invariante em E é a origem \Rightarrow pelo princípio da invariância, todas as trajetórias iniciando em ω_L tendem para B (a origem) quando $t \rightarrow \infty \Rightarrow$ a origem é assintoticamente estável

TAREFA

Encontre os pontos de equilíbrio e prove a estabilidade assintótica da origem do sistema a seguir:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= -y - x^3 \\ \dot{y} &= x^5\end{aligned}$$