Controle Não Linear Aplicado

SEL 0364

Ciclo Limite

Victor Stafy
Departamento de engenharia aeronáutica, EESC

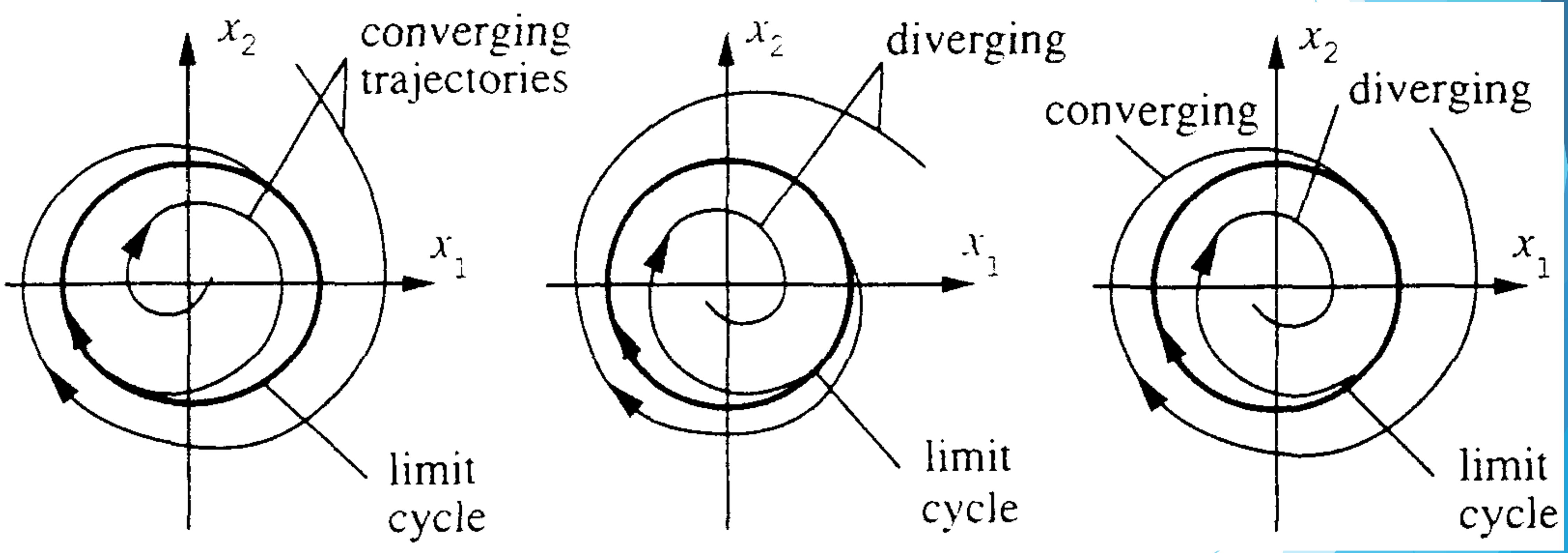
Prof. Dra. Vilma Alves de Oliveira

Ciclo Limite

- Fenômeno que ocorre exclusivamente em sistemas não lineares;
- As oscilações que ocorrem em um sistema em ciclo limite se diferenciam daquelas de sistemas lineares marginalmente estáveis pelo fato de amplitude destas não depender da amplitude da perturbação;
- No plano de fase, o ciclo limite é definido como uma trajetória fechada e isolada;
- Sistema não conservativo;
- O ciclo limite pode ser estável, instável e semi-estável.

$$x(t+T) = x(t) \ \forall\, t > 0, T > 0$$

Ciclo Limite



Tipos de ciclo limite

Ciclo Limite

- Teorema (Poincaré): $N = S + 1$
- Teorema(Poincaré-Bendixson): trajetória em região finita
- Teorema(Bendixson): condição suficiente para não-existência de ciclo limite

$$\frac{\partial f_1}{\partial x_1} + \frac{\partial f_2}{\partial x_2}$$

Sistema em análise

$$\dot{x}_1 = \mathrm{x}_1 + \mathrm{x}_2 - \mathrm{x}_1(x_1^2 + x_2^2)$$

$$\dot{x}_2 = -2\mathrm{x}_1 + \mathrm{x}_2 - \mathrm{x}_2(x_1^2 + x_2^2)$$

Resolução

- Igualando $\dot{x}_1$ e $\dot{x}_2$ a zero se encontra um único ponto de equilíbrio na origem.
- Se fazendo a linearização do sitema no ponto de equilíbrio por série de Taylor se obtém:

$$\Delta\dot{x} = \mathrm{A}\Delta x$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 - 3x_1^2 - x_2^2 & 1 - 2x_1x_2 \\ -2 - 2x_1x_2 & 1 - x_1^2 - 3x_2^2 \end{bmatrix}_{\mathrm{x}_1=0,\mathrm{x}_2=0}$$

Resolução

- Substituindo para ponto de equilíbrio e calculando autovalores se encontra $\lambda = 1 \pm j\sqrt{2}$
- O que indica que o ponto de equilíbrio é um foco (parte real e complexa) instável.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\det(\lambda I - A) = 0$$

Resolução

- Se utilizando uma função de Lyapunov (método direto) $V(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2$ de forma que $\Omega = \{V(x_1, x_2) \leq c\}$ onde $c > 0$;
- Ω é uma região fechada do domínio que como visto anteriormente contem apenas um ponto de equilíbrio.
- $V(0,0) = 0$ e $V(x_1, x_2) \geq 0$ portanto critérios segundo método de Lyapunov são respeitados.

$$\dot{V} = \frac{\partial V}{\partial x_1}\dot{x}_1 + \frac{\partial V}{\partial x_2}\dot{x}_2$$

$$\dot{V} = 2x_1[x_1 + x_2 - x_1(x_1^2 + x_2^2)] + 2x_2[-2x_1 + x_2 - x_2(x_1^2 + x_2^2)]$$

$$\dot{V} = 2(x_1^2 + x_2^2) - 2(x_1^2 + x_2^2)^2 - 2x_1x_2$$

Resolução

- Se utilizando a relação $|2x_1x_2| \leq x_1^2 + x_2^2$:

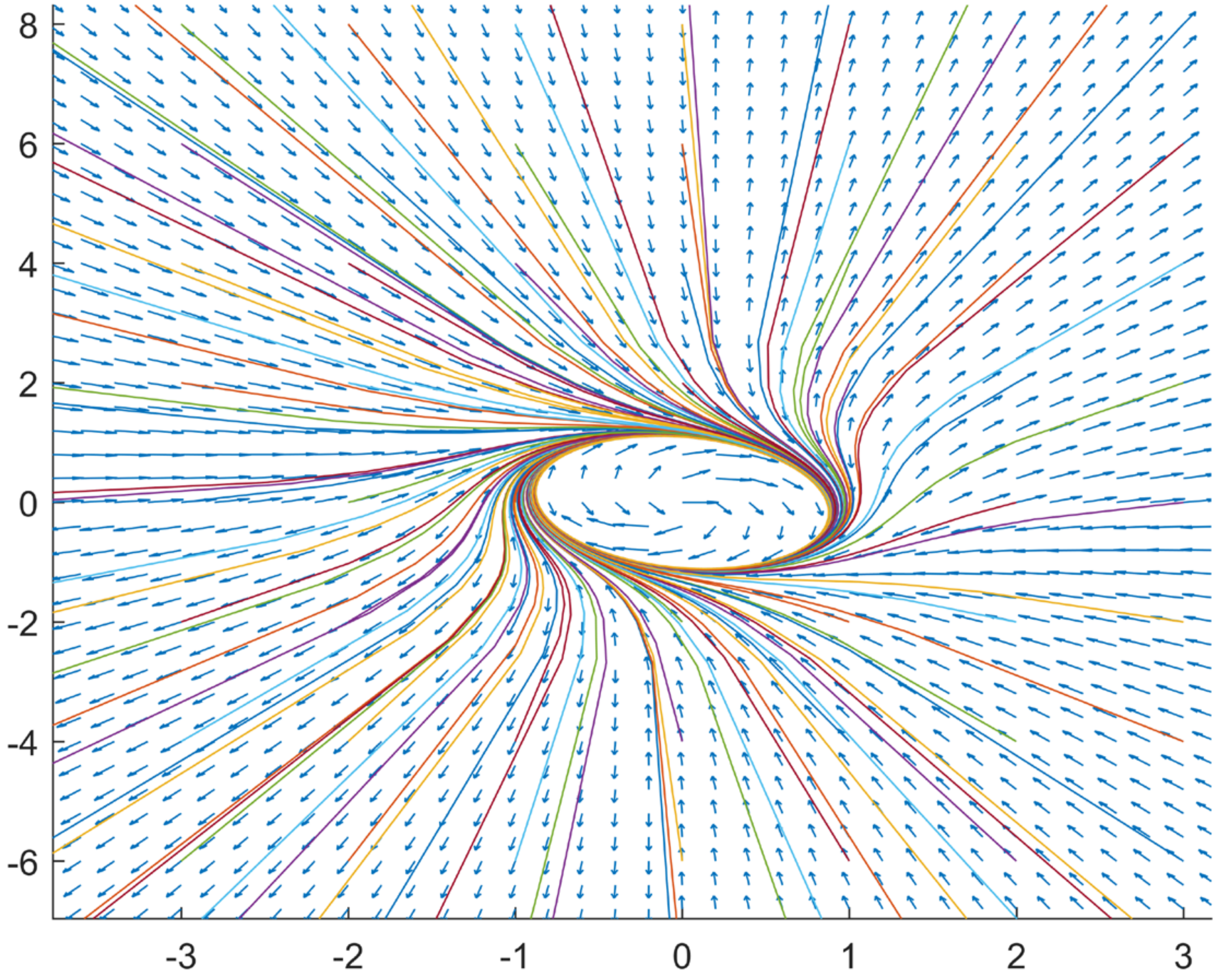
$$\dot{V} \leq 2(x_1^2 + x_2^2) - 2(x_1^2 + x_2^2)^2 + \ (x_1^2 + x_2^2)$$

- Na fronteira de Ω, $V(x) = c$ assim:

$$\dot{V} \leq 3\mathrm{c} - 2\mathrm{c}^2$$

- Dessa forma para $c \geq 1{,}5$ a trajetória do sistema não sai da região Ω, desta forma pelo critério de Poincaré-Bendixson exite ciclo limite em M.

Resolução



Resolução

- Caso o sistema possua variação em seus parâmetros pode ocorrer mudança no comportamento do sistema, podendo não ocorrer ciclo limite, para ponto de equilíbrio estável por exemplo.

$$\dot{x}_1 = \mu x_1 + x_2 - x_1(x_1^2 + x_2^2)$$

$$\dot{x}_2 = -2x_1 + \mu x_2 - x_2(x_1^2 + x_2^2)$$

$$A = \begin{bmatrix} \mu & 1 \\ -2 & \mu \end{bmatrix}$$

Resolução

$$\mu = -1$$