SEL364 – Controle Não Linear Aplicado

Exercício 3

Manuel Fernando Bello
Prof. Dra. Vilma Alves de Oliveira

Através das lei de Newton pode-se escrever a seguinte equação:

$$mL\ddot{\theta} + kL\dot{\theta} + mgsen\theta = u$$

Com:
m = massa do corpo
k = constante de atrito
L = comprimento da barra
g = gravidade

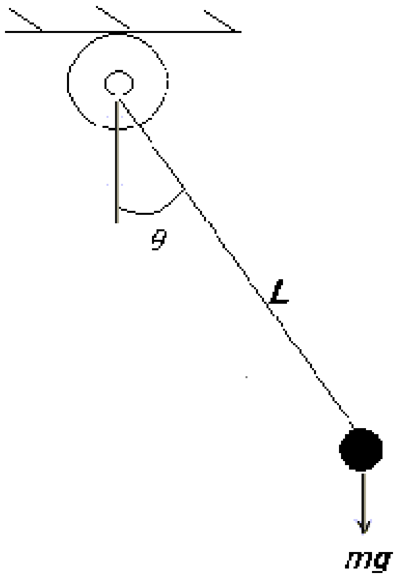

Figura1: Pêndulo simples.

Pede-se:

- A) Obter o modelo espaço de estados do sistema.
- B) Determinar os pontos de equilíbrio (P.E.).
- C) Investigar a estabilidade dos P.E. via 1º método de Lyapunov.
- D) Investigar a estabilidade dos P.E. via 2 º método de Lyapunov via a seguinte função:

$$V(x) = (1 - \cos x_1)\frac{g}{L} + \frac{x_2^2}{2}$$

e plotar as curvas de nível .

- E) Usar a extensão de LaSalle para mostrar que a origem é assintóticamente estável.
- F) Repetir o quarto item para:

$$V(x) = \frac{1}{2}x^T P x + \frac{g}{L}(1 - \cos x_1)$$

com P uma matriz definida positiva a ser escolhida

A) Representando o sistema como espaço de estados tem-se:

$$x = [\theta \quad \omega]^T$$

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_2 \\ -\dfrac{k}{m} x_2 - \dfrac{g}{L} sen(x_1) \end{bmatrix}$$

B) Calculando os pontos de equilíbrio:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_{1eq} \\ \dot{x}_{2eq} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_1(x_{eq}) \\ f_2(x_{eq}) \end{bmatrix} = F(x_{eq}) = 0$$

$$\begin{bmatrix} x_{2eq} \\ -\frac{k}{m} x_{2eq} - \frac{g}{L} sen(x_{1eq}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Substituindo x_{2eq} na equação de $\dot{x}_2$ e isolando x_{1eq}, temos:

$$x_{2eq} = 0$$

$$-\frac{g}{L} sen(x_{1eq}) = 0$$

$$x_{1eq} = n\pi, n \in \mathrm{N}$$

C) A linearização do sistema é feita por Taylor em torno de P.E.

$$x = x_{eq} + \zeta$$

$$\zeta = x - x_{eq}$$

$$\dot{\zeta} = \nabla_X f\big|_{x_{eq},u_{eq}} .\zeta$$

$$\frac{\partial f1}{\partial x1} = \frac{\partial (x2)}{\partial x1} = 0$$

$$\frac{\partial f1}{\partial x2} = \frac{\partial (x2)}{\partial x2} = 1$$

$$\frac{\partial f2}{\partial x1} = \frac{\partial ((\frac{-k}{m})x2 + (-\frac{g}{l})sen(x1))}{\partial x1} = (-\frac{g}{l})\cos(x1)$$

$$\frac{\partial f2}{\partial x2} = \frac{\partial ((\frac{-k}{m})x2 + (-\frac{g}{l})sen(x1))}{\partial x2} = (\frac{-k}{m})$$

$$\dot{\zeta} = \left.\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{g}{L}\cos(x_1) & -\frac{K}{m} \end{bmatrix}\right|_{x_{eq},u_{eq}} .\zeta$$

C) Com o 1º método de Lyapunov determina-se a estabilidade dos p.e. Através dos λ(A).

$$Para\ E_1 = (0\ ,0)$$

$$[\lambda I - A] = \begin{bmatrix} \lambda & -1 \\ \frac{g}{l} & \lambda + \frac{k}{m} \end{bmatrix}$$

$$|[\lambda I - A]| = \lambda^2 + \lambda \frac{k}{m} + \frac{g}{l} = 0$$

(Equação característica da matriz A para o ponto de equilíbrio E1)

As raízes da equação característica podem ser obtidas por:

$$\lambda_{1,2} = \frac{-\frac{k}{m} \pm \frac{1}{m}\sqrt{k^2 - \frac{4gm^2}{l}}}{2}$$

C) Com o 1º método de Lyapunov determina-se a estabilidade dos p.e. Através dos λ(A).

$$\lambda_{1,2} = \frac{-\frac{k}{m} \pm \frac{1}{m}\sqrt{k^2 - \frac{4gm^2}{l}}}{2}$$

Considerando que todos os termos são constantes positivas, a análise dos autovalores devem ser feita de duas formas:

1) $$\boxed{k^2 - \frac{4gm^2}{l} \geq 0 \;\Rightarrow\; nó\ estável}$$

Pois o termo $\sqrt{k^2 - \frac{4gm^2}{l}}$ sempre será menor que k e consequentemente os 2 autovalores (λ_1 e λ_2) , serão reais e negativos, caracterizando **nó estável**.

2) $$\boxed{k^2 - \frac{4gm^2}{l} < 0 \;\Rightarrow\; foco\ estável}$$

Pois, como o termo $\sqrt{k^2 - \frac{4gm^2}{l}}$ é negativo, os autovalores possuirão parte imaginária. Como a parte real dos autovalores (λ_1 e λ_2) é negativa, o comportamento do sistema não linear nas vizinhanças do ponto de equilíbrio E1 possuirá o comportamento de um **foco estável**.

C) Com o 1º método de Lyapunov determina-se a estabilidade dos p.e. Através dos λ(A).

$$Para\ E_2 = (\pi\ ,0)$$

$$[\lambda I - A] = \begin{bmatrix} \lambda & -1 \\ -\frac{g}{l} & \lambda + \frac{k}{m} \end{bmatrix}$$

$$|[\lambda I - A]| = \lambda^2 + \lambda \frac{k}{m} - \frac{g}{l} = 0$$

(Equação característica da matriz A para o ponto de equilíbrio E2)

As raízes da equação característica podem ser obtidas por:

$$\lambda_{1,2} = \frac{-\frac{k}{m} \pm \frac{1}{m}\sqrt{k^2 + \frac{4gm^2}{l}}}{2}$$

C) Com o 1º método de Lyapunov determina-se a estabilidade dos p.e. Através dos λ(A).

$$\lambda_{1,2} = \frac{-\frac{k}{m} \pm \frac{1}{m}\sqrt{k^2 + \frac{4gm^2}{l}}}{2}$$

Para este caso somente uma análise dos autovalores deve ser feita, pois para quaisquer valores das constantes, o termo $\sqrt{k^2 + \frac{4gm^2}{l}}$ sempre será positivo e maior que k, assim a matriz A possuirá um autovalor positivo e outro autovalor negativo, o que caracteriza um ponto de **sela**.

D) Com o 2º método de Lyapunov determina-se a estabilidade dos P.E. através de V

$$V(x) = (1 - \cos x_1)\frac{g}{L} + \frac{x_2^2}{2}$$

- Em primeiro lugar deve-se verificar, para Xeq=(0,0), se a função V escolhida satisfaz as condições do teorema:

1->V(x) e suas derivadas parciais são definidas e contínuas.

2->V(0)=0

3->V(x)>0

4- > $\dfrac{dV}{dt}$ $(x_1,x_2) \leq 0$

D) Com o 2º método de Lyapunov determina-se a estabilidade dos P.E. através de V

$V(x) = (1 - \cos x_1)\frac{g}{L} + \frac{x_2^2}{2}$

- Em primeiro lugar deve-se verificar, para Xeq=(0,0), se a função V escolhida satisfaz as condições do teorema:

1->V(x) e suas derivadas parciais são definidas e contínuas.

$$\frac{dV}{dt}(x) = sen(x_1)\frac{dx_1}{dt}\frac{g}{L} + x_2\frac{dx_2}{dt} =$$

$$= sen(x_1)\dot{x}_1\frac{g}{L} + x_2\dot{x}_2 =$$

$$= sen(x_1)x_2\frac{g}{l} + x_2[(\frac{-k}{l})x_2 + (\frac{-g}{m})sen(x_1)]$$

$$= -\frac{K}{m}x_2^2 \leq 0$$

D) Com o 2º método de Lyapunov determina-se a estabilidade dos P.E. através de V

$$V(x) = (1 - \cos x_1)\frac{g}{L} + \frac{x_2^2}{2}$$

- Em primeiro lugar deve-se verificar, para Xeq=(0,0), se a função V escolhida satisfaz as condições do teorema:

2->V(0)=0

$$V(x) = (1 - \cos x_1)\frac{g}{L} + \frac{x_2^2}{2}$$

$$V(0) = (1 - \cos 0)\frac{g}{L} + \frac{0^2}{2} = 0$$

D) Com o 2º método de Lyapunov determina-se a estabilidade dos P.E. através de V

$$V(x) = (1 - \cos x_1)\frac{g}{L} + \frac{x_2^2}{2}$$

- Em primeiro lugar deve-se verificar, para Xeq=(0,0), se a função V escolhida satisfaz as condições do teorema:

3->V(x)>0

$$-1 \le -\cos(x_1) \le 1 \Rightarrow 0 \le 1 - \cos(x_1) \le 2$$

D) Com o 2º método de Lyapunov determina-se a estabilidade dos P.E. através de V

$$V(x) = (1 - \cos x_1)\frac{g}{L} + \frac{x_2^2}{2}$$

- Em primeiro lugar deve-se verificar, para Xeq=(0,0), se a função V escolhida satisfaz as condições do teorema:

- Em seguida deve-se verificar a positividade da função V .

$$\frac{dV}{dt}(x) = sen(x_1)\frac{dx_1}{dt}\frac{g}{L} + x_2\frac{dx_2}{dt} =$$

$$= sen(x_1)\dot{x}_1\frac{g}{L} + x_2\dot{x}_2 =$$

$$= sen(x_1)x_2\frac{g}{l} + x_2[(\frac{-k}{l})x_2 + (\frac{-g}{m})sen(x_1)]$$

$$= -\frac{K}{m}x_2^2 \leq 0$$

4- > $\dfrac{dV}{dt}(x_1,x_2) \leq 0$

- A partir da expressão acima conclui-se que $\dot{V}$ é semi-definida negativa, pois assume valor zero em qualquer ponto (x1,x2) em que x_2 se anula. Assim, pelo segundo método de Lyapunov só se pode garantir que a origem é estável, porém não se pode garantir que ela é assintoticamente estável. Para garantir a estabilidade assintótica da origem será utilizado a extensão de La Salle.

E) Estabilidade assintótica da origem

• Seja a região definida no plano de fase (Ω), representada pela bola em azul. Então a derivada de V se anula apenas na reta indicada em vermelho (R). Entretanto, o único conjunto invariante interior a curva é a própria origem.

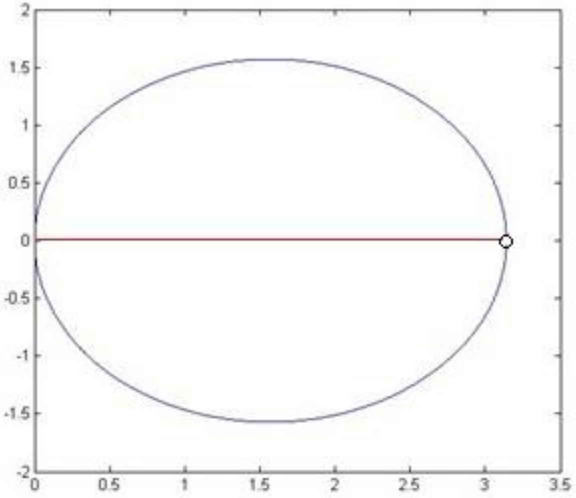

Figura 2: Região de atração de V.

• Sabe-se que a origem é um P.E., portanto, se a solução chegar a origem ela não sairá mais de lá. Agora tomemos como exemplo o ponto (π/2,0), neste caso a derivada é $[0\ -g/L]^T$.

• O raciocínio anterior pode ser aplicado a qualquer outro ponto da curva R. Assim, através da extensão do teorema de La Salle, prova-se que a origem é um P.E. localmente assintoticamente estável.

E) Estabilidade assintótica da origem

- A seguir têm-se a figuras com a representação tridimensional de V, sua representação por curvas de nível e o diagrama de fase do sistema.

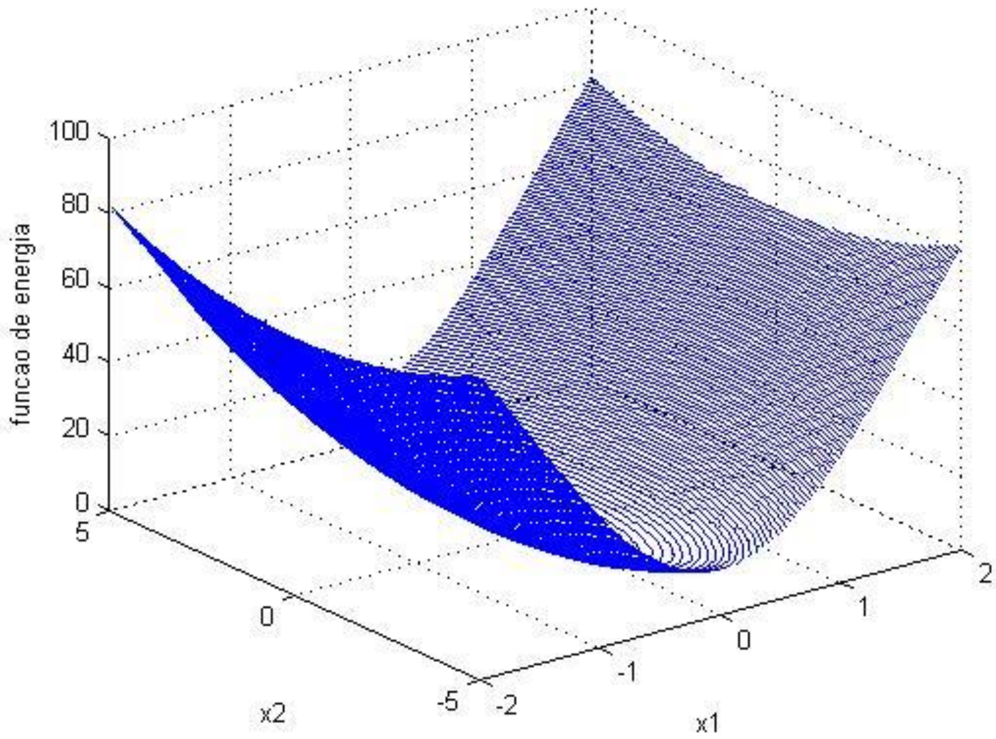

Figura 3: V em função de X1 e X2.

E) Estabilidade assintótica da origem

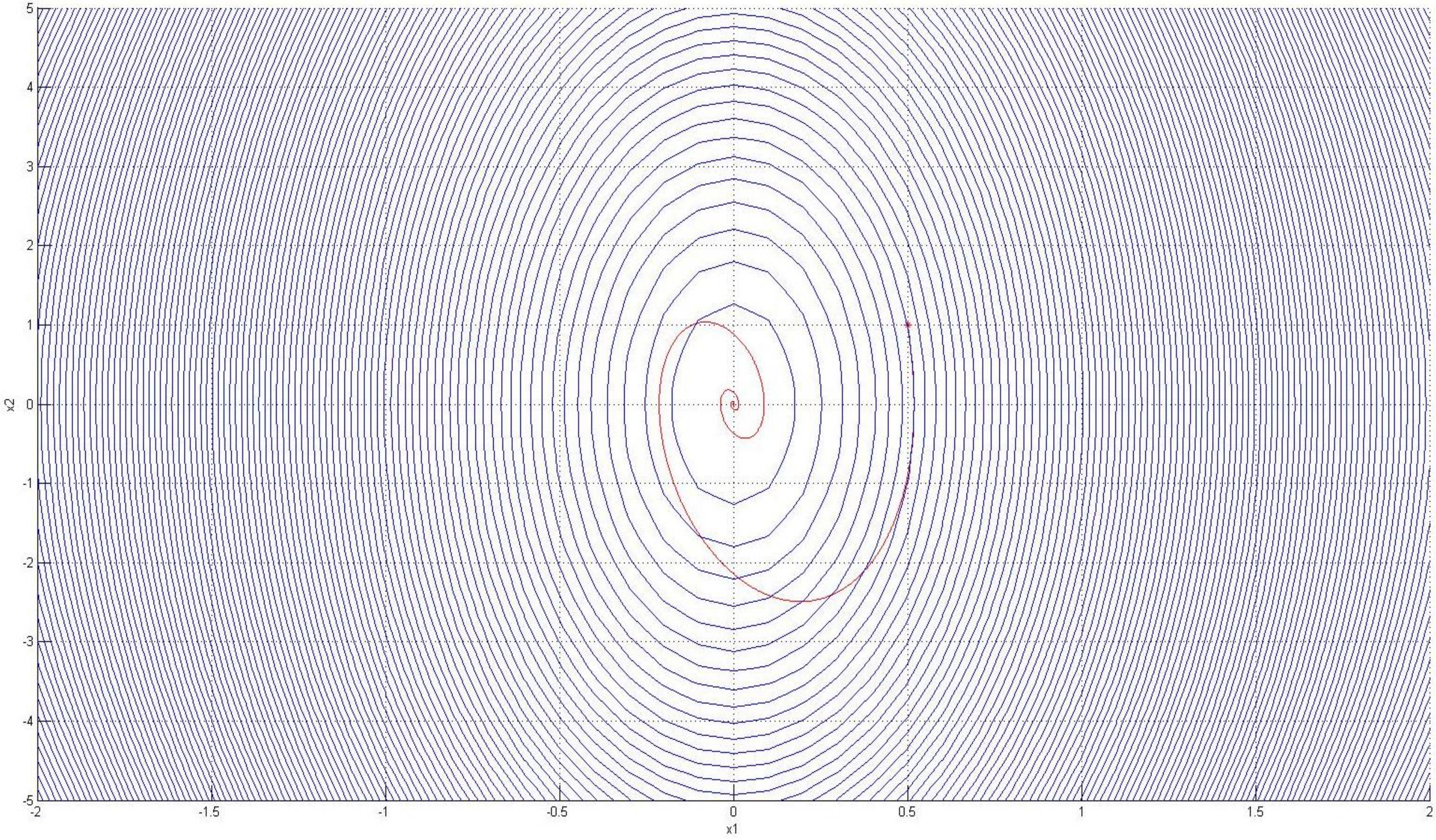

Figura 4: Curvas de Nível de V.

F) Analise da estabilidade do sistema para V_2

- Como visto em E, não foi possível utilizar-se o teorema de Lyapunov, para garantir a estabilidade assintótica da origem com a função V escolhida. Desse modo, tentaremos utilizar uma V distinta.
- Seja a função V, como proposta abaixo, onde P é simétrica e definida positiva.

$$V(x) = \frac{1}{2} x^T P x + \frac{g}{L}(1 - \cos(x_1))$$

$$-1 \leq \cos x \leq 1_1$$

$$0 \geq 1 - \cos x \geq 2$$

- Desse modo, V é nula apenas em zero e positiva para qualquer outro valor.

- Para que P seja definida positiva temos que:

- De onde conclui-se que os autovalores de p devem ser positivos:

$$\begin{vmatrix} P_{11} - \lambda I & P_{21} \\ P_{12} & P_{22} - \lambda I \end{vmatrix} = (P_{11} - \lambda I)(P_{22} - \lambda I) - P_{12}{}^2$$

F) Analise da estabilidade do sistema para V_2

$$\begin{vmatrix} P_{11}-\lambda I & P_{21} \\ P_{12} & P_{22}-\lambda I \end{vmatrix} = (P_{11}-\lambda I)(P_{22}-\lambda I) - P_{12}{}^2 = 0$$ SENDO QUE $P_{12}=P_{21}$

$\lambda^2 - \lambda * (P_{11}+P_{22}) + (P_{11} * P_{22} - P_{12}{}^2) = 0$ Resolver essa equação do segundo grau.

$\{ (P_{11}+P_{22}) \mp [(P_{11}+P_{22})^2 - 4(P_{11} * P_{22} - P_{12}{}^2)^{1/2}] \} /2 = 0$

- Continuando a desenvolver esses termos, teremos uma equação quadrática que dará as seguintes condições:

$$\frac{p11 + p22 - \sqrt{p11^2 - 2 * p11 * p22 + 4 * p12^2 + p22^2}}{2} > 0$$

$$\frac{p11 + p22 + \sqrt{p11^2 - 2 * p11 * p22 + 4 * p12^2 + p22^2}}{2} > 0$$

- De onde conclui-se que:

$p_{11} > 0 \quad p_{22} > 0 \quad p_{11}p_{22} - p_{12}^2 > 0$

F) Analise da estabilidade do sistema para V_2

- A derivada de V é dada a seguir:

$$\frac{dV(x)}{dx} = [p_{11}x_1 + p_{12}x_2 + \frac{g}{L}sen(x_1)]x_2 + (p_{12}x_1 + p_{22}x_2)[-\frac{g}{L}sen(x_1) - \frac{k}{m}x_2] =$$

$$\frac{g}{L}(1 - p_{22})x_2 sen(x_1) - \frac{g}{L}p_{12}x_1 sen(x_1) + [p_{11} - p_{12}(\frac{k}{m})]x_1x_2 + [p_{12} - p_{22}(\frac{k}{m})]x_2^2$$

- Agora, deve-se escolher p_{11}, p_{12} e p_{22}, tal que a derivada de V seja definida negativa.

- Como o produto cruzado x_1x_2 e $x_2sen(x_1)$ tem sinal indefinido, as constantes que os multiplicam devem ser anuladas. Para isso fazemos: $p_{22} = 1$; $p_{11} = p_{12}(k/m)$; $P_{12}=P_{22}(k/m)$ e $P_{12}>0$
- Com essas escolhas, e com as inequações obtidas anteriormente, verifica-se que: $0 < p_{12} < (k/m)$. Assim basta fazer com que $p_{12} = 0.5(k/m)$. E a derivada de V se torna:

$$\frac{dV(x)}{dx} = -\frac{1}{2}(\frac{g}{L})(\frac{k}{m})x_1 sen(x_1) - \frac{1}{2}(\frac{k}{m})x_2^2$$

F) Analise da estabilidade do sistema para V_2

• O termo $x_1 sen(x_1)$ é positivo para todo x_1 tal que o módulo de x_1 é inferior a π. Dado D, tal que D = { x ϵ R^2 | |x| < π }, temos que a V é definida positiva e a derivada de V é definida negativa em D.

• Portanto, através do segundo método de Lyapunov, verifica-se que a origem é um P.E. localmente assintóticamente estável.

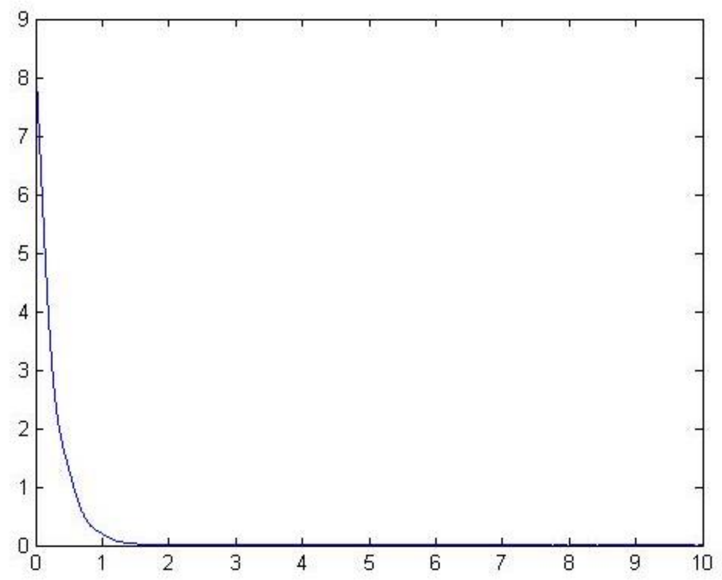

Figura 5: V(2) no tempo.