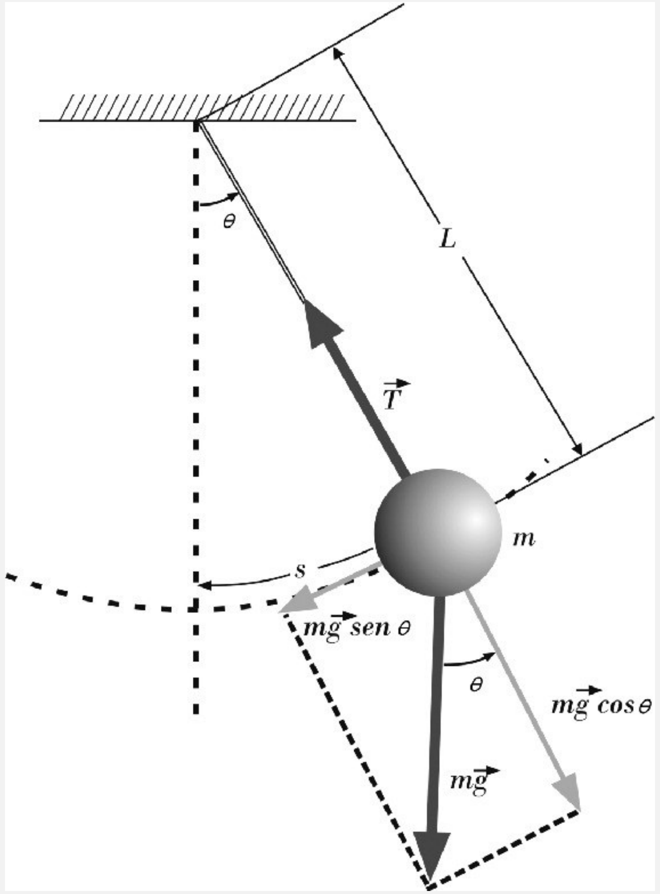
CONTROLE NÃO-LINEAR
EXERCÍCIO PÊNDULO: 1° E 2° MÉTODO DE LYAPUNOV

Diego Carneiro, Lucas Jonys

MODELO DO PÊNDULO SIMPLES

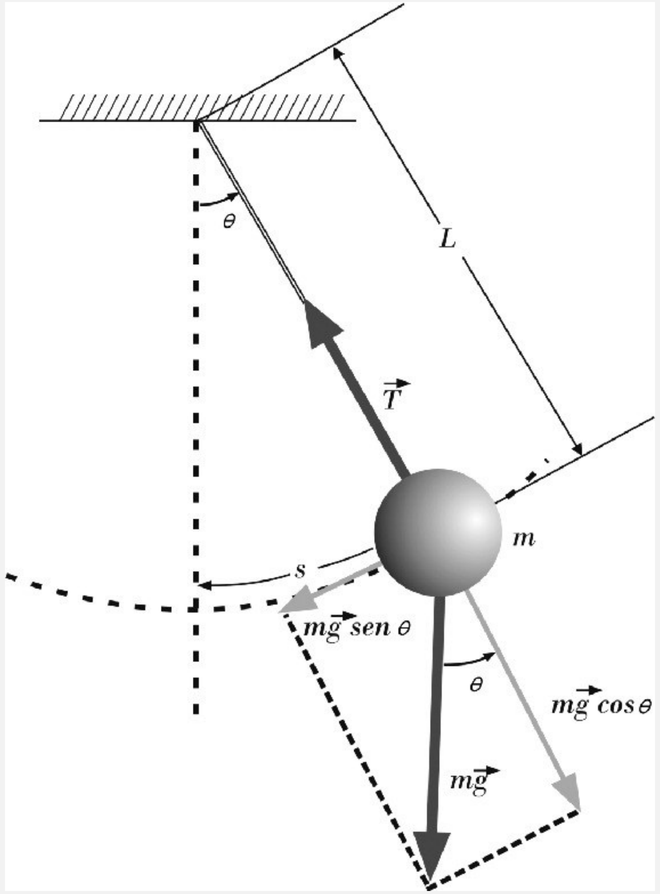


- A equação diferencial que descreve o movimento do pêndulo simples é dada pela segunda Lei de Newton, considerando a equação do momento desenvolvido. Pode ser dada por:

- $mL^2\ddot{\theta} + b\dot{\theta} + mgLsen\theta = u$

- Sendo:
- m = Massa do corpo
- b = Constante de amortecimento dinâmico
- L = Comprimento da barra ou raio do movimento
- g = gravidade
- u = ação de controle ou momento aplicado

MODELO DO PÊNDULO SIMPLES



- Considerando:
- $m = g^{-2}, L = g$ e $\mathrm{b} = 1,$ o modelo do pêndulo pode ser reescrito como, com ação de controle nula, visando encontrar o ponto de equilíbrio:

- $\ddot{\theta} + \dot{\theta} + sen\theta = 0.$

- Dessa maneira, é preciso descrever um modelo em espaço de estado para demais análises de estabilidade do ponto de equilíbrio:

(A) REPRESENTAÇÃO EM ESPAÇO DE ESTADOS

- Dada a equação não-linear $\ddot{\theta} + \dot{\theta} + sen\theta = 0.$ Faça a substituição: $\begin{cases} x = x_1 = \theta \\ \dot{x} = x_2 = \dot{\theta} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 = \dot{\theta} \\ \dot{x}_2 = \ddot{\theta} \end{cases}$

- Resolvendo a equação para $\dot{x}_2$ utilizando as substituições acima, temos: $\dot{x}_2 = -\sin x_1 - x_2$

- Portanto, na forma de espaço de estados $\dot{x} = \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_2 \\ -\sin x_1 - x_2 \end{bmatrix}$

(B) DETERMINAÇÃO DOS PONTOS DE EQUILÍBRIO

- Nos pontos de equilíbrio não temos variação temporal das variáveis de estado $\Rightarrow$ $\dot{x} = f(x, u) = 0$

- Assim, $\dot{x} = \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_2 \\ -\sin x_1 - x_2 \end{bmatrix} = 0$

- Solução: $\begin{cases} x_2 = 0 \\ -\sin x_1 - x_2 = 0 \end{cases}$ $\Rightarrow$ $-\sin x_1 = 0$ $\Rightarrow$ $\begin{cases} x_1 = 0 \\ x_1 = \pi \end{cases}$

- Portanto, temos dois pontos de equilíbrio: $\begin{cases} P_{eq1} = (0,\ \ 0) \\ P_{eq2} = (\pi,\ 0) \end{cases}$

(C) ESTABILIDADE DOS PONTOS DE EQUILÍBRIO

- Será feita a linearização pelo 1° Método de Lyapunov $\dot{x} = f(x,u) \Rightarrow \dot{x} = Ax + Bu$

- As matrizes A e B são dadas por: $A = \frac{\partial f(x_{eq},u_{eq})}{\partial x} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1(x_{eq},u_{eq})}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1(x_{eq},u_{eq})}{\partial x_2} \\ \frac{\partial f_2(x_{eq},u_{eq})}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2(x_{eq},u_{eq})}{\partial x_2} \end{bmatrix}$ e $B = \frac{\partial f(x_{eq},u_{eq})}{\partial u} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1(x_{eq},u_{eq})}{\partial u} \\ \frac{\partial f_2(x_{eq},u_{eq})}{\partial u} \end{bmatrix}$

- Para o sistema $\dot{x} = \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_2 \\ -\sin x_1 - x_2 \end{bmatrix}$ teremos:

- $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\cos x_1 & -1 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

(C) ESTABILIDADE DOS PONTOS DE EQUILÍBRIO

- Para o primeiro ponto de equilíbrio: $P_{eq1} = (0, \quad 0)$ $\Longrightarrow$ $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

- Os autovalores de A são $\lambda_{1,2} = -0,5 \pm j\,\frac{\sqrt{3}}{2}$ $\Longrightarrow$ $\begin{cases} \text{Autovalores complexos conjugados} \\ \text{Parte real negativa} \end{cases}$

$P_{eq1} = (0, 0)$ é assintoticamente estável

- Se todos os autovalores de A tem parte real negativa, diz-se que x_{eq} é assintoticamente estável, pois x → x_{eq} quando t → ∞, e então o ponto de equilíbrio é chamado de sumidouro (sink)

(C) ESTABILIDADE DOS PONTOS DE EQUILÍBRIO

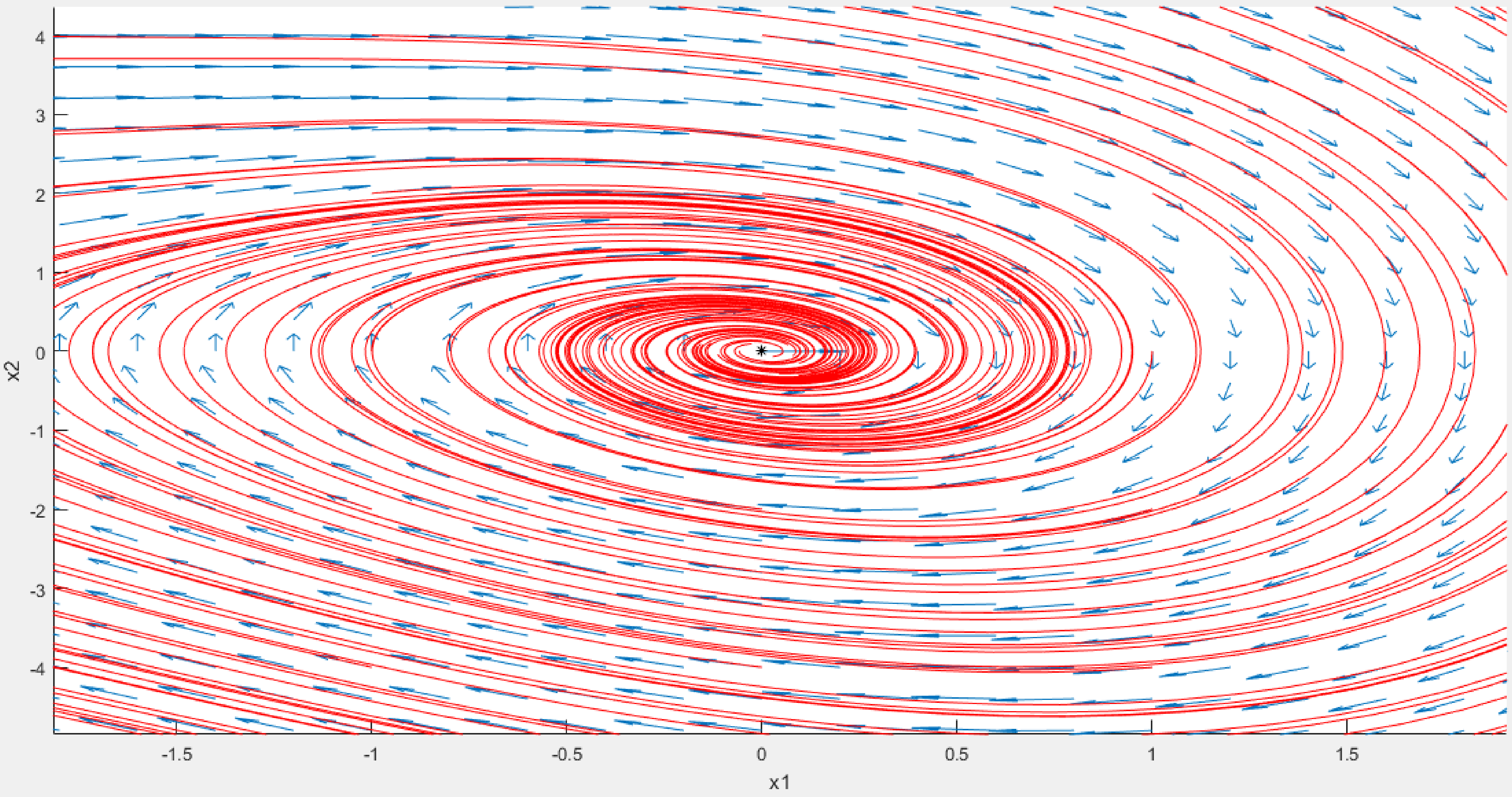
- Para o segundo ponto de equilíbrio: $P_{eq2} = (\pi,\ 0)$ $\Rightarrow$ $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

- Os autovalores de A são $\begin{cases} \lambda_1 = 1{,}618 \\ \lambda_2 = -0{,}618 \end{cases}$ $\Rightarrow$ $\begin{cases} \text{Autovalores reais} \\ \lambda_1 > 0 \end{cases}$

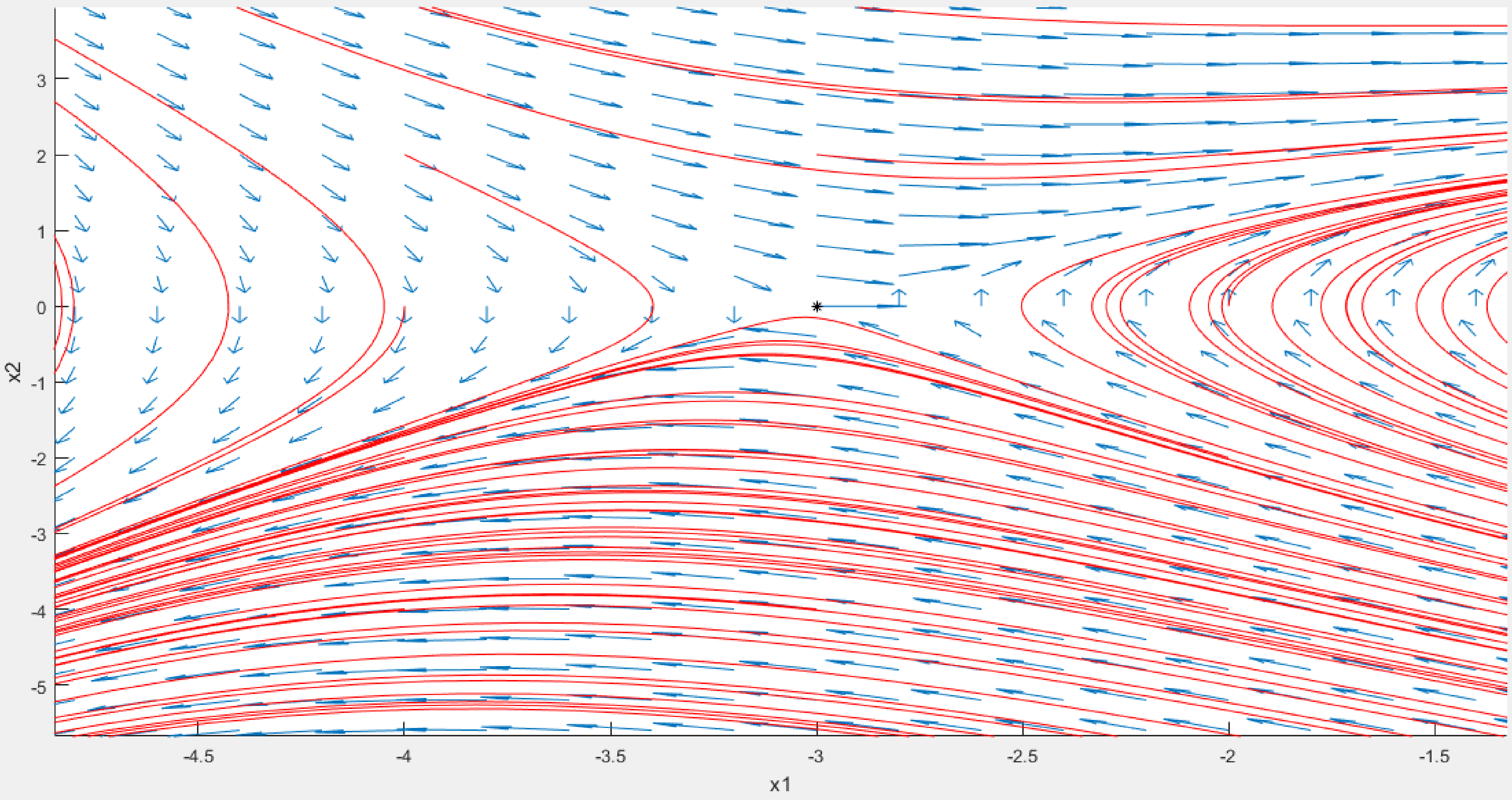
$P_{eq2} = (\pi,\ \ 0)$ é instável

- Um ponto de equilíbrio é instável se um ou mais autovalores de A tiver parte real positiva.
- Se alguns dos autovalores, mas não todos, têm parte real positiva, enquanto o resto tem parte real negativa, x_{eq} é chamado de ponto de sela

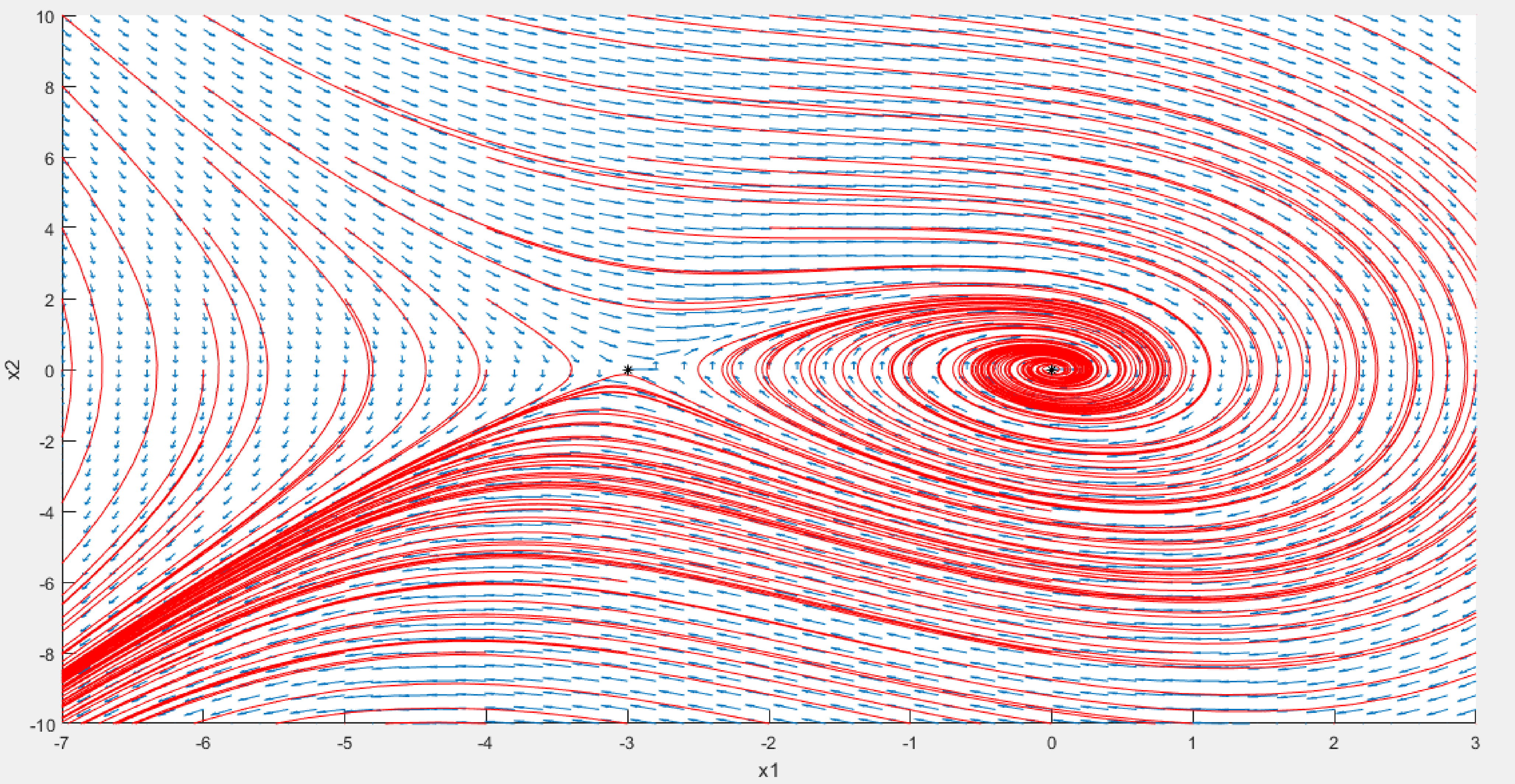
(D) RETRATO DE FASE PRÓXIMO AOS PONTOS DE EQUILÍBRIO



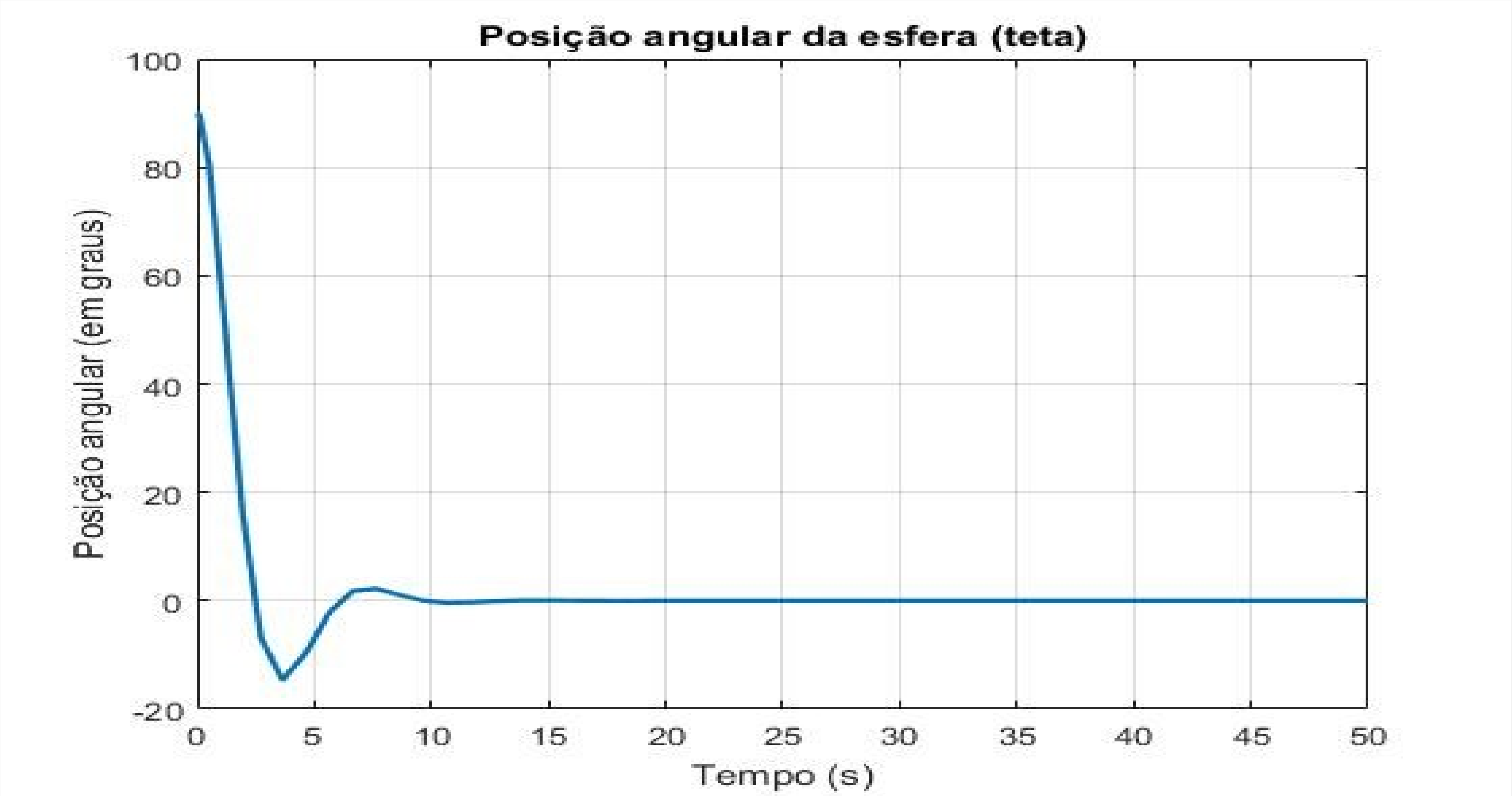
(D) RETRATO DE FASE PRÓXIMO AOS PONTOS DE EQUILÍBRIO



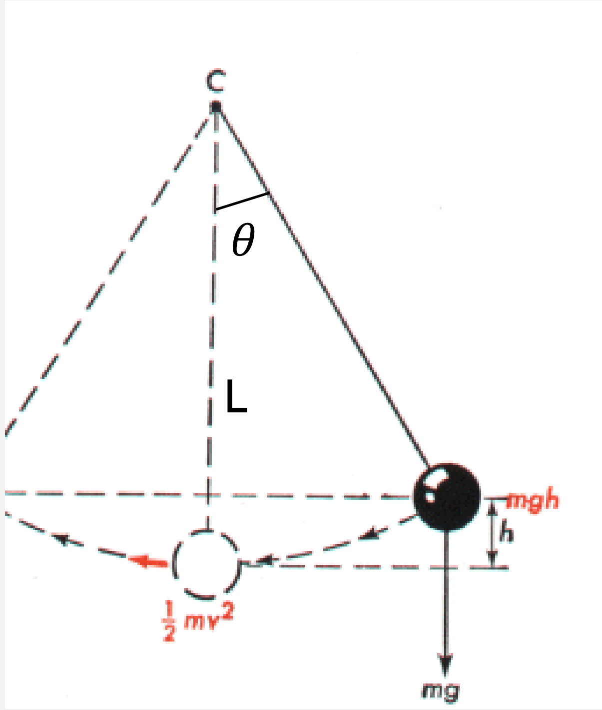
(E) RETRATO DE FASE COMPLETO



(F) SOLUÇÃO NO TEMPO (0;0)



PÊNDULO: 2º MÉTODO DE LYAPUNOV



- Define-se uma função de Lyapunov que descreva a energia do sistema.

- As energias envolvidas são a potencial e cinética, descritas respectivamente por: $\mathrm{m}gh$ e $\frac{\mathrm{mv}^2}{2}$.

- $h = \mathrm{L}\big(1 - \cos(\theta)\big) = L(1 - \cos(x_1))$

- $\mathrm{v} = \dot{\theta} = x_2$

PÊNDULO: 2° MÉTODO DE LYAPUNOV

- Fazendo as devidas substituições, temos a equação de Lyapunov:

- $V(x) = (1 - \cos(x_1)) + \frac{x_2^2}{2}$

- Para um conjunto $D = \{x \in R: 0 \leq x_1 < \pi\},\ V(x) > 0,\ (x_1 = \pi$ não atende uma das definições de Lyapunov, pois $V(x)$ = 0 para $x \neq 0$).

- O valor máximo de $|\cos(x_1)|$ é 1, portanto o valor mínimo para $(1 - \cos(x_1))$ é 0. Assim, os valores de x_2 não afetam o sinal da função $V(x)$.

PÊNDULO: 2º MÉTODO DE LYAPUNOV

- No ponto de equilíbrio $X_{eq} = (0,0)$, a função $V(x) = 0$

- Calculando – se a derivada:

- $\dot{V}(x) = \frac{dV(x)}{dt} = sen(x_1)\dot{x_1} + x_2\,\dot{x_2} = sen(x_1)x_2 + x_2\big(-x_2 - sen(x_1)\big) = -x_2^2 \leq 0$

- Portanto $x = 0$ é localmente estável no sentido de Lyapunov, mas sem garantia sobre estabilidade assintótica.

PÊNDULO: 2º MÉTODO DE LYAPUNOV

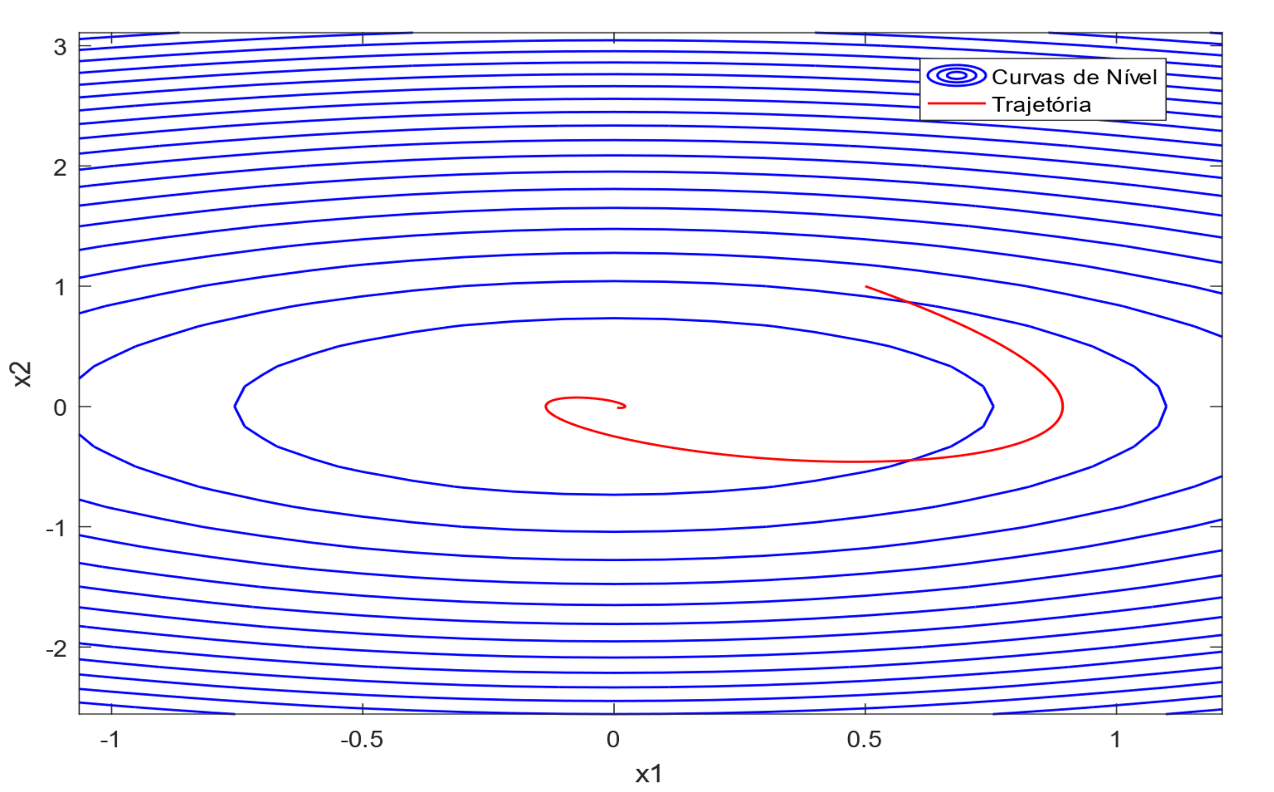
- Uma das formas de testar se o sistema é assintoticamente estável é pelo principio de invariância de La Salle, sem exigir que a derivada da função de Lyapunov seja definida negativa.

- Seja $l \in R$, tal que $\omega_l \ \subset D$, e um conjunto $E = \{x \in \omega_l : \dot{V}(x) = 0\}$.

- Ou seja, $\dot{V}(x) = -x_2^2 = 0$. Logo, $\forall x_1 \in D, \dot{V}(x) = 0$ se, e somente se, $x_2 = 0$

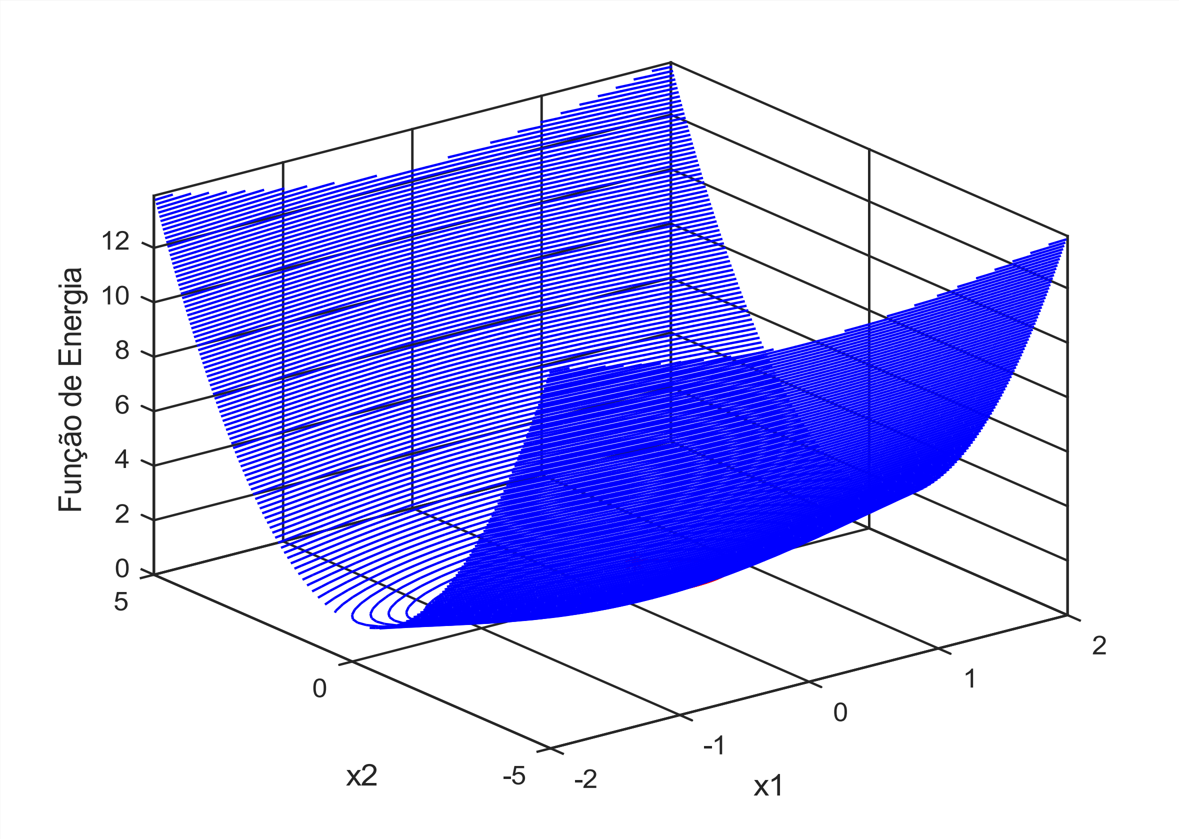
PÊNDULO: 2° MÉTODO DE LYAPUNOV

- A derivada da função V é semidefinida em ω_l. Logo toda solução do sistema iniciando em ω_l é atraída para o maior conjunto invariante em E.
- Como pode ser observado na imagem ao lado:



PÊNDULO: 2° MÉTODO DE LYAPUNOV

- E as curvas de nível em um panorama geral, nas três dimensões:



PÊNDULO: 2° MÉTODO DE LYAPUNOV

- Como a origem é o único conjunto invariante em E, a origem é um ponto de equilíbrio assintoticamente estável localmente.

- De outro modo, uma vez que a derivada da função de Lyapunov é uma reta passando pelo ponto de equilíbrio, a origem é o único conjunto invariante.