

Análise de sistemas não-lineares

Profa. Vilma A. Oliveira José Ricardo Rosolen

Março 2018

1 Introdução

A abordagem de controle de sistemas não-lineares via aproximações lineares em torno de pontos de equilíbrio pode não ser eficiente para sistemas com dinâmica de alta velocidade e/ou de grande alcance. Existem duas categorias de controle: problema de estabilização (regulação) e o problema de seguimento de trajetória (tracking). Como exemplos do primeiro caso pode-se citar o controle de posição de robôs manipuladores, controle de atitude de aviões, e para o segundo caso o controle de avião para seguir um certo caminho específico, controle de manipulador robótico para desenhar linhas ou círculos. Nestas notas apresentam-se exemplos do uso de controle não linear para motivação, técnicas de análise de estabilidade de sistemas não lineares e finalmente, conceitos de mapas de Poincaré e bifurcações.

Os livros utilizados na elaboração destas notas no tema análise de estabilidade foram [1, 2] e no tema mapas de Poincaré e bifurcações [3, 4].

1.1 Alguns exemplos

Seja

$$\begin{aligned}\dot{x} &= \theta x^3 + u \\ y &= x\end{aligned}$$

com $\theta = 1$. Obter uma lei e controle para levar a saída para zero. Inicialmente obtém-se uma lei de controle do tipo $u = -kx$, considerando o sistema linearização em $x = 0$

$$\begin{aligned}\dot{x} &= u \\ y &= x\end{aligned}$$

O sistema a malha fechada é dado por

$$\begin{aligned}\dot{x} &= \theta x^3 - kx = x(x^2 - k/\theta) \\ y &= x\end{aligned}$$

que apresenta os seguintes pontos de equilíbrio $x = 0$ e $x = \pm\sqrt{k/\theta}$. O ponto $x = 0$ é estável e $x = \pm\sqrt{k/\theta}$ é instável. Portanto, não importa o valor de k , não se obtém estabilidade global assintótica. Suponha agora a lei de controle não linear

$$u = -\theta x^3 - kx$$

para $k > 0$. Com esta lei de controle obtém-se estabilidade global assintótica.

Seja a equação de fluxo de um sistema de controle de nível de um tanque

$$\begin{aligned} \dot{h} &= \frac{1}{A_T}(Q_i - Q_o) \\ y &= h \end{aligned}$$

onde $Q_o = \sqrt{h}$ é a vazão de saída, Q_i é a vazão de entrada e A_T é a área da seção do tanque. A lei de controle $u = A_T k_p e + Q_o$ com $e = h_d - h$ fornece a equação do erro $\dot{e} + k_p e = 0$ que estabiliza o sistema para algum $k > 0$. A lei de controle fornece a equação do erro que estabiliza o sistema para algum $k > 0$.

2 Análise de sistemas não-lineares

Os métodos mais conhecidos de análise de sistemas não-lineares são o **Plano de Fase** que é um método gráfico de análise de sistemas não-lineares de 2a. ordem a partir da solução do sistema não-linear do sistema em torno dos pontos de equilíbrio e a **Teoria de Lyapunov**. Na teoria de Lyapunov existem o método direto (generalização do conceito de energia associada a sistemas mecânicos) e método indireto (método de linearização). No método direto a idéia é construir funções escalares do tipo energia (função de Lyapunov) para o sistema e analisar se a energia decresce.

Tratam-se nestas aulas da análise de sistemas dinâmicos utilizando [1, 2], incluindo definições de estabilidade e bifurcação para sistemas contínuos e, e da construção de mapas de Poincaré utilizando [3, 4]. Os conceitos básicos de estabilidade de sistemas dinâmicos, incluindo linearização de sistemas e classificação de pontos de equilíbrios, tanto de sistemas contínuos no tempo quanto de mapas [4], [3] são revistos. Apresenta-se o método direto de Lyapunov que é também conhecido como 2o. método de Lyapunov. Finalmente, estabelece-se uma relação entre os pontos de equilíbrios dos mapas de Poincaré e as órbitas periódicas dos sistemas contínuos correspondentes. Um estudo aprofundado do *oscilador de Duffing* para ajudar no entendimento dos mapas de Poincaré é incluído, destacando-se como a topologia do sistema se altera conforme alteram-se os valores de parâmetros do sistema.

3 Linearização e Estabilidade Local

3.1 Sistemas contínuos no tempo

Considere um sistema da forma

$$\dot{x} = f(x; u) \tag{1}$$

em que u é o vetor das variáveis de controle.

Definição 1 Um estado x_e é um ponto de equilíbrio ou ponto de equilíbrio do sistema ou ponto de equilíbrio se uma vez $x(t)$ igual a x_e , $x(t)$ permanece em x_e para todo tempo futuro.

Definição 2 Diz-se que x_e é um ponto de equilíbrio para $u = u_e$, se $f(x_e, u_e) = 0$

Definição 3 O ponto de equilíbrio $x = 0$ é estável se para $\epsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que $\|x(0)\| < \delta$, então $\|x(t)\| < \epsilon$ para todo $t \geq 0$. Senão o equilíbrio é instável.

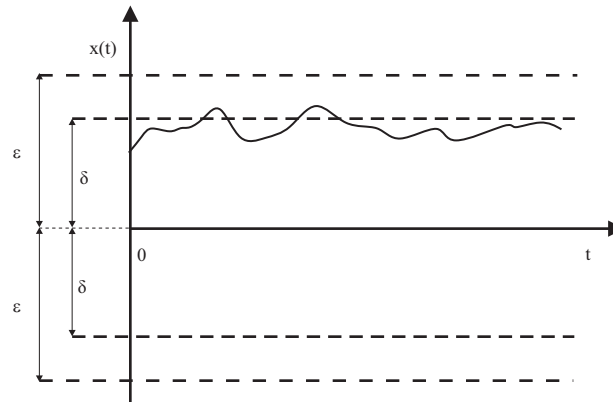


Figura 1: Ponto de equilíbrio estável.

Definição 4 Um ponto de equilíbrio $x = 0$ é assintoticamente estável se for estável e se em adição existe algum $\delta > 0$ tal que $\|x(0)\| < \delta$ implica $x(t) \rightarrow 0$ quando $t \rightarrow \infty$.

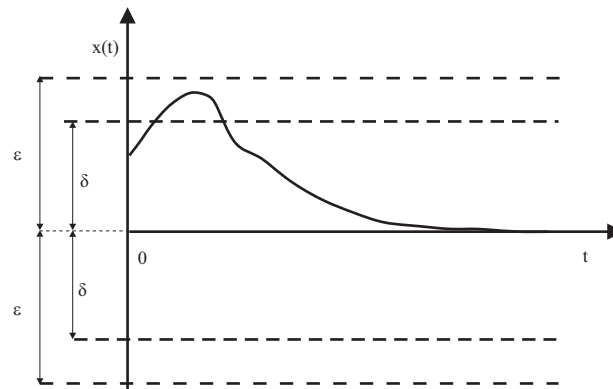


Figura 2: Ponto de equilíbrio assintoticamente estável.

3.1.1 Plano de fase

Considere o sistema de segunda ordem

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= f_1(x_1, x_2) \\ \dot{x}_2 &= f_2(x_1, x_2)\end{aligned}$$

com $x = [x_1, x_2]^T$ a solução do sistema acima para $x_0 = [x_{10}, x_{20}]^T$, ou seja, $x_0 = x(0)$. O lugar no plano $x_1 - x_2$ da solução $x(t)$ para $t \geq 0$ é uma curva que passa pelo ponto x_0 . Esta curva é chamada de trajetória ou órbita do sistema a partir de x_0 . O plano $x_1 - x_2$ é chamado plano de fase.

Exemplo 1 Considere o modelo espaço de estado de um circuito diodo túnel

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= \frac{1}{C}[-h(x_1) + x_2] \\ \dot{x}_2 &= \frac{1}{L}[-x_1 - Rx_2 + u]\end{aligned}$$

Adotando $u = 1.2V$, $R = 1.5k\Omega$, $C = 2pF$, $L = 5\mu H$, t em nanosegundos e a corrente x_2 e $h(x_1)$ em mA tem-se

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= 0.5[-h(x_1) + x_2] \\ \dot{x}_2 &= 0.2[-x_1 - 1.5x_2 + 1.2]\end{aligned}$$

Suponha

$$h(x_1) = 17.76x_1 - 103.79x_1^2 + 229.62x_1^3 - 226.31x_1^4 + 83.72x_1^5$$

Os pontos de equilíbrio correspondem a $h(x_1) = \frac{u}{R} - \frac{1}{R}x_1$ e são dados por $Q_1 = (0.063, 0.758)$, $Q_2 = (0.285, 0.61)$ e $Q_3 = (0.884, 0.21)$. A Figura 3 ilustra o comportamento do sistema na vizinhança dos pontos de equilíbrio.

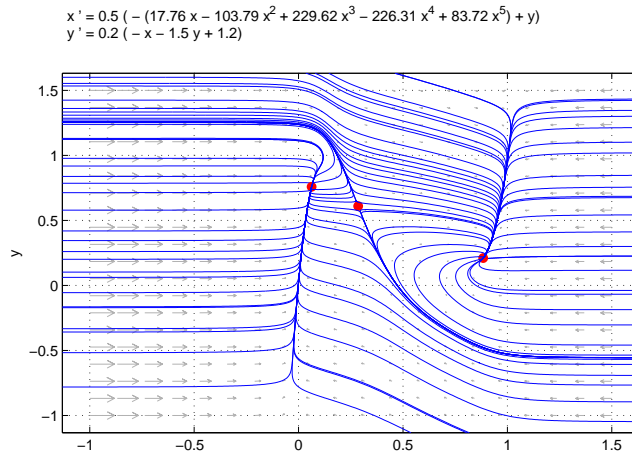


Figura 3: Plano de fase usando a função pplane8 do Matlab.

Exemplo 2 Considere as equações de um pêndulo simples:

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= (-10/0.5)\text{sen}(x_1) - (0.5/1)x_2\end{aligned}$$

Plotar o plano de fase pêndulo simples usando campo de vetores.

Programa Matlab

Plano de fase

```
n = 100
% Escala das setas
escala = .5
% Definir numero de pontos em cada eixo
npont=20;

% área onde será plotado os vetores
xp = [-5 5;-10 10]; %para pendulo
%xp = [-2 2;-4 4];
x1min = xp(1,1);
x1max = xp(1,2);
x2min = xp(2,1);
x2max = xp(2,2);

deltx1=(x1max-x1min)/npont;
deltx2=(x2max-x2min)/npont;
compr=sqrt(deltx1^2+deltx2^2)/2;

%seleciona o quadro gráfico
figure (1)
% Fixar Janela de Grafico
hold off;
i=0;
j=0;
% Desenhar o Campo de Vetores
for x1=x1min:deltx1:x1max           %varia de x1min a x1max com passo deltax1
    i=i+1;
    for x2=x2min:deltx2:x2max       %varia de x2min a x2max com passo deltax2
        x = [x1 x2]; t=0;
        xponto = sistema(t,x);      %calcula a xdot para t = 0 e x = [x1 x2]
        m = xponto(2)/(xponto(1)+1e-8);
        dx1 =compr/sqrt(1+m^2);
        j=j+1;
        dx2 = m*dx1;
```

```

        if x2 < 0
            dx2 = -dx2;
            dx1 = -dx1;
        end

        dx(j,i) = dx1*.5;
        dy(j,i) = dx2*.5;

        hold on;
    end
    j=j+1;
end

% Mapa vetorial
[x,y] = meshgrid(x1min:deltx1:x1max,x2min:deltx2:x2max);
quiver(x,y,dx*.5,dy*.5,escala);

axis([x1min x1max x2min+deltx2 x2max+deltx2]);

% Tempo
t=linspace(0,10,n);

R = 1;
Naux = 10;
Maux = 10;
N = round(Naux);
M = round(Maux);

for I = 1:N+1,
    for J = 1:M+1,
        A(R,1) = x1min+((x1max-x1min)/N)*(I-1);
        A(R,2) = x2min+((x2max-x2min)/M)*(J-1);
        R=R+1;
    end
end

xi = A;

% Obtem para a matriz de condiçoes iniciais xi as trajetórias de um pendulo
% simples

```

```

hold on;
for i = 1:(N*M),
    [tempo,x] = ode45('sistema',t,xi(i,:));
    plot(x(:,1),x(:,2));
end

```

%Abrir uma "new function" no Matlab e colocar:

```

function [xdot]=sistema(t,x);
%x(1) é theta (ângulo)
xdot=[x(2); (-10/0.5)*sin(x(1))-(0.5/1)*x(2)];
end

```

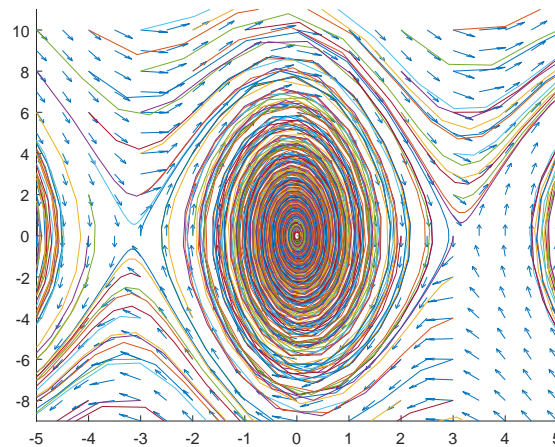


Figura 4: Ilustração do plano de fase do Exemplo 2.

3.1.2 Linearização na vizinhança de um ponto de equilíbrio (método indireto)

Pode-se estudar a estabilidade de (1) na vizinhança de um ponto de equilíbrio (também chamado de ponto de equilíbrio) de um sistema não linear qualquer, fazendo uma linearização neste ponto via o chamado método indireto ou primeiro método de Lyapunov). Suponha que x_e, u_e seja um ponto de equilíbrio de (1). Para uma pequena perturbação ζ e v tem-se

$$x = x_e + \zeta, u = u_e + v. \quad (2)$$

Substituindo agora (2) em (1) obtém-se

$$\dot{\zeta} = f(x_e + \zeta, u_e + v) \quad (3)$$

Assim, transforma-se o ponto de equilíbrio (x_e, u_e) de (1) no ponto de equilíbrio (ζ_e, v_e) de (3). Supondo F na classe C^1 , no mínimo, pode-se expandir (3) em uma série de Taylor

em torno do ponto (x_e, u_e) , e então

$$\dot{\zeta} = f(x_e, u_e) + [grad_x f]^T|_{x_e, u_e} \zeta + [grad_u f]^T|_{x_e, u_e} v + (\text{termos ordem superior})$$

onde $[grad_x f]^T = \frac{\partial f}{\partial x}$ e $[grad_u f]^T = \frac{\partial f}{\partial u}$ são as matrizes Jacobianas de $f(x, u)$ em relação a x e u , respectivamente. Dessa forma

$$\dot{\zeta} \approx [grad_x f]^T|_{x_e, u_e} \zeta + [grad_u f]^T|_{x_e, u_e} v = A\zeta + Bv \quad (4)$$

com A e B calculadas em (x_e, u_e)

$$A = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n} \\ \dots & \dots & \vdots & \dots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \frac{\partial f_n}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{bmatrix}_{x=x_e, u=u_e} \quad B = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial u_1} & \frac{\partial f_1}{\partial u_2} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial u_m} \\ \frac{\partial f_2}{\partial u_1} & \frac{\partial f_2}{\partial u_2} & \dots & \frac{\partial f_2}{\partial u_m} \\ \dots & \dots & \vdots & \dots \\ \frac{\partial f_n}{\partial u_1} & \frac{\partial f_n}{\partial u_2} & \dots & \frac{\partial f_n}{\partial u_m} \end{bmatrix}_{x=x_e, u=u_e}$$

Classificação de pontos de equilíbrio O ponto de equilíbrio agora é classificado analisando-se a natureza dos auto-valores da matriz A correspondente. Se todos os autovalores tiverem parte real não nula, então dizemos que o ponto de equilíbrio x_e é um *ponto de equilíbrio hiperbólico*, caso contrário, dizemos que x_e é um *ponto de equilíbrio não hiperbólico*.

Para haver estabilidade da origem requer-se que o ângulo entre o vetor x e vetor velocidade \dot{x} seja maior do que 90° quando uma componente do vetor velocidade aponta para a origem (a outra é ortornormal ao vetor x) [7], isto é:

$$\frac{x^T \dot{x}}{|x||\dot{x}|} = \cos(\theta) < 0. \quad (5)$$

De fato, uma vez que $\dot{x} = Ax$, tem-se que $x^T Ax < 0$, o que implica $\text{real}(\lambda(A)) < 0$ (ver ilustração de um sistema instável na Fig. 5).

-Pontos de equilíbrios hiperbólicos

Definição 5 Se todos os autovalores de A tem parte real negativa, diz-se que x_e é assintoticamente estável, pois $x \rightarrow x_e$ quando $t \rightarrow \infty$, e então o ponto de equilíbrio é chamado de *sumidouro (sink)*.

Há dois tipos de sumidouro: se todos os autovalores tiverem parte imaginária nula um *nó estável*, caso contrário, tem-se um *foco estável*.

Definição 6 Se todos os autovalores de A têm parte real positiva, então x se afasta de x_e quando $t \rightarrow \infty$, então x_e é um ponto de equilíbrio instável e é chamado de *fonte (source)*.

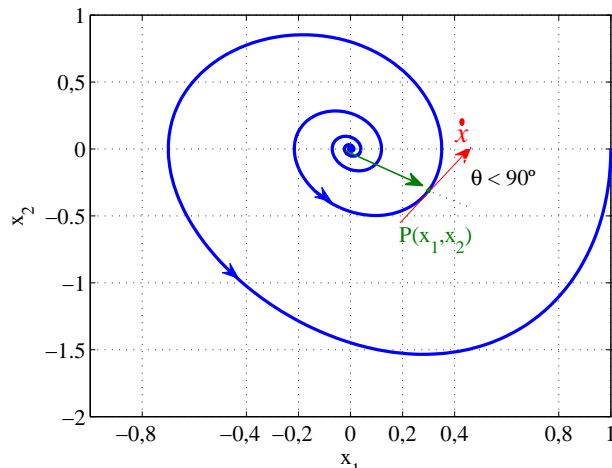


Figura 5: Ilustração do plano de fase de um sistema instável.

Da mesma maneira que no caso do sumidouro, tem-se dois tipos de fontes: o *foco instável*, se algum autovalor tiver parte imaginária não nula; e o *nó instável*, no caso contrário.

Definição 7 Se alguns dos autovalores, mas não todos, têm parte real positiva, enquanto o resto tem parte real negativa, x_e é chamado de ponto de sela. Como a sela tem alguns autovalores positivos, é também instável.

Definição 8 Um ponto de equilíbrio é instável se um ou mais autovalores de A tiver parte real positiva.

–Pontos de equilíbrios não hiperbólicos

Definição 9 Se um ou mais autovalores de A tiver parte real negativa enquanto os outros tiverem parte real nula, então x_e é um ponto de equilíbrio marginalmente estável.

Definição 10 Se todos os autovalores de A são puramente imaginários, o ponto de equilíbrio é então chamado de centro.

A Figura 6 mostra um resumo de todos os casos que podem acontecer a um sistema no \mathbb{R}^2 e a Figura 7 as respostas no tempo para pontos de equilíbrio do tipo foco, nó, sela e centro. Os autovalores das matrizes Jacobianas nos pontos de equilíbrio do Exemplo 1 são $(-3.57, -0.33)$, $(1.77, -0.25)$, $(-1.33, -0.4)$. Assim, Q_1 é um nó estável, Q_2 um ponto de sela e Q_3 um nó estável (colocar as setas no plano de fase).

Teorema 1 (Método de Linearização de Lyapunov) Se o sistema linearizado é assintoticamente estável então o ponto de equilíbrio do sistema não-linear é assintoticamente estável. Se o sistema linearizado é instável então o ponto de equilíbrio do sistema não-linear é instável.

Resumo da classificação dos pontos fixos em 2 dimensões (estabilidade linear).





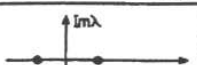

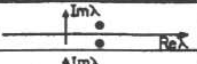
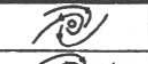
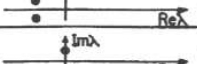

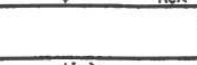
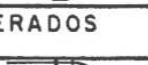
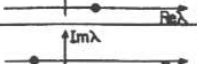


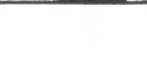
Autovalores	Sinal da parte real	Representação no plano complexo	Ponto fixo	Exemplo	Estabilidade
$\lambda_1 \neq \lambda_2, \lambda_1 \cdot \lambda_2 \neq 0$ $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$	$\lambda_1 \cdot \lambda_2 > 0$ $\lambda_1, \lambda_2 < 0$		nó (hiperbólico)		assintoticamente estável
	$\lambda_1 \cdot \lambda_2 > 0$ $\lambda_1, \lambda_2 > 0$		nó (hiperbólico)		instável
	$\lambda_1 \cdot \lambda_2 < 0$		sela (hiperbólico)		instável
$\lambda_1 = \lambda_2 = *$ (complexos conjugados)	positiva		foco (hiperbólico)		instável
	negativa		foco (hiperbólico)		assintoticamente estável
	nula		centro (elíptico) CASO DEGENERADO		estável (não assintoticamente)
$\lambda_1 \cdot \lambda_2 = 0$	nula	CASOS DEGENERADOS (elípticos)			
$\lambda_1 = \lambda_2, \neq 0 \in \mathbb{R}$	positiva		"inflected node" (hiperbólico)		instável
	negativa		"inflected node" (hiperbólico)		assintoticamente estável

Figura 6: Pontos de equilíbrios de sistemas no plano [4].

Assim, pode ser feita uma relação direta entre a estabilidade local de um ponto de equilíbrio de um sistema não-linear com a estabilidade de seu correspondente sistema linear. Por exemplo, se a correspondente linearização de um sistema apresentar um ponto de equilíbrio assintoticamente estável, então pode-se concluir que o ponto de equilíbrio correspondente do sistema não linear também é estável. Assim, justifica-se o uso de técnicas lineares para o controle de sistemas não-lineares na prática. Ressalta-se porém, que essa correspondência não é válida para o caso do sistema linearizado apresentar um ponto de equilíbrio marginalmente estável ou um centro, sendo nesse caso necessária uma análise mais profunda do sistema não-linear.

Definição 11 Um ponto de equilíbrio estável segundo Lyapunov o qual não é assintoticamente estável é dito ser marginalmente estável.

Exemplo 3 Considere as equações de um pêndulo simples:

$$MR^2\ddot{\theta} + b\dot{\theta} + MgR\sin\theta = 0$$

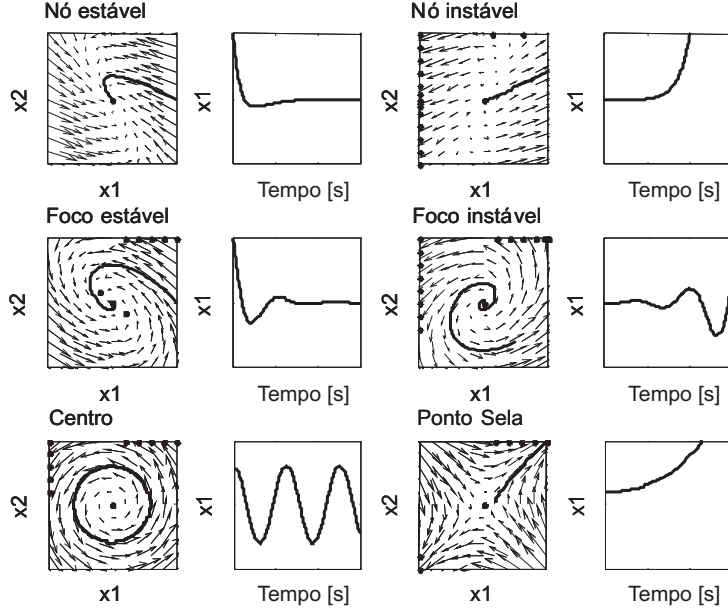


Figura 7: Trajetórias no plano de fase e trajetórias no tempo [7] (figequil.m).

definindo $x_1 = \theta$ e $x_2 = \dot{\theta}$, pode-se escrever

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= -\frac{b}{MR^2}x_2 - \frac{g}{L}\text{sen}x_1\end{aligned}$$

Os pontos de equilíbrio são localizados em $(n\pi, 0)$, para $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$. A partir da descrição física do pêndulo, é claro que o pêndulo tem somente duas posições de equilíbrio correspondente à posição vertical abaixo $(0, 0)$ e à posição vertical acima $(\pi, 0)$. Os outros pontos de equilíbrio são repetições destas duas posições a quais correspondem ao número de giros completos do pêndulo antes de parar em um dos dois pontos de equilíbrio. O sistema linearizado em torno de $(\pi, 0)$ é dado por $\ddot{\tilde{\theta}} + \frac{b}{MR^2}\dot{\tilde{\theta}} - \frac{g}{R}\tilde{\theta} = 0$ (usa-se a aproximação $\text{sen}\theta = \text{sen}(\tilde{\theta} + \pi) = \text{sen}\tilde{\theta}\cos\pi + \text{sen}\pi\cos(\tilde{\theta}) = -\text{sen}(\tilde{\theta}) \approx -\tilde{\theta}$ com $\tilde{\theta} := \theta - \pi$ (foi feita uma mudança de variável uma vez que o ponto de equilíbrio é diferente da origem). Observe que o sistema linearizado é instável e o sistema não-linear também é.

Para ilustrar quando o comportamento de um sistema não linear não corresponde ao do linearizado em torno do equilíbrio, apresenta-se a seguir um exemplo de um sistema cujas equações do sistema linearizado apresentam um ponto de equilíbrio não hiperbólico.

Exemplo 4 Considere o sistema

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= -x_2 - \mu x_1(x_1^2 + x_2^2) \\ \dot{x}_2 &= x_1 - \mu x_2(x_1^2 + x_2^2).\end{aligned}$$

Este sistema apresenta um ponto de equilíbrio na origem. O sistema linearizado possui autovalores $\pm j$ o que corresponde a um centro. O comportamento do sistema não linear pode ser analisado a partir da sua representação polar

$$x_1 = r \cos \theta, \quad x_2 = r \sin \theta, \quad \theta = \tan^{-1} \left(\frac{x_2}{x_1} \right) \quad (6)$$

fornecendo

$$\dot{r} = -\mu r^3, \quad \dot{\theta} = 1 \quad (7)$$

A partir destas equações pode-se ver que a solução do sistema não linear lembra um foco estável para $\mu > 0$ e um foco instável para $\mu < 0$. Portanto, o comportamento qualitativo descrito pela sua linearização no ponto de equilíbrio não corresponde ao comportamento do sistema não linear na vizinhança deste ponto.

3.1.3 Ciclo Limite

Oscilação é um importante fenômeno de sistemas dinâmicos. A solução de um sistema periódico ou oscilador é do tipo

$$x(t + T) = x(t) \quad \forall t > 0, T > 0 \quad (8)$$

Seja o sistema linear

$$\dot{x} = Ax, \quad A \in \mathfrak{R}^{2 \times 2} \quad (9)$$

Suponha que A tenha autovalores $\lambda_1 = j\beta, \lambda_2 = -j\beta$ e portanto o ponto de equilíbrio (origem) é um centro. A partir de uma transformação linear $z = Tx$ pode-se obter a forma de Jordan real para o sistema

$$\dot{z} = \begin{bmatrix} 0 & -\beta \\ \beta & 0 \end{bmatrix} z. \quad (10)$$

Utilizando coordenadas polares definidas por $z_1 = r \cos \theta$ e $z_2 = r \sin \theta$, pode-se reescrever o sistema (10) da seguinte forma

$$\begin{aligned} \dot{r} &= 0 \\ \dot{\theta} &= \beta \end{aligned} \quad (11)$$

A solução é portanto do tipo

$$\begin{aligned} z_1(t) &= r_0 \cos(\beta t + \theta_0) \\ z_2(t) &= r_0 \sin(\beta t + \theta_0) \end{aligned} \quad (12)$$

com $r_0 = \sqrt{z_1^2(0) + z_2^2(0)}$ e $\theta_0 = \tan^{-1} \frac{z_2(0)}{z_1(0)}$. Portanto, este sistema possui uma oscilação mantida de amplitude r_0 e é referenciado como um oscilador harmônico. Observe que a amplitude da oscilação depende das condições iniciais e também que esta oscilação mantida pode ser destruída com uma pequena perturbação nos autovalores complexos puros da matriz A que os transforme em autovalores complexos com parte real positiva. O que significa que este oscilador linear não é estruturalmente estável.

Observação 1 A matriz de transformação T para gerar a forma de Jordan é da forma $T = Q^{-1}$ com $Q = [q_1 \ q_2 \ \dots \ q_n]$, n a dimensão de x e $q_i, i = 1, \dots, n$ os autovetores da matriz A . Para obter a forma real de Jordan (conhecida como forma modal) a matriz de transformação é, p. exemplo, para $n = 2$ é

$$Q = [q_1 q_2] \begin{bmatrix} 0.5 & -0.5j \\ 0.5 & 0.5j \end{bmatrix}. \quad (13)$$

Assim, a matriz da forma modal do sistema denotada A_m pode ser obtida a partir da transformação $A_m = Q^{-1}AQ$.

Exercício 1 (Oscilador não linear) Considere o oscilador de Van Der Pol

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= -x_1 + \mu(1 - x_1^2)x_2. \end{aligned}$$

Verificar que este oscilador possui apenas a origem como ponto de equilíbrio e caracterizar a existência de um ciclo limite estável para μ positivo e instável para μ negativo utilizando as seguintes funções de energia

$$\begin{aligned} V(x) &= \frac{1}{2}x_1^2 + \frac{1}{2}x_2^2; \\ V(x) &= \frac{1}{2}\{x_1^2 + [\mu(\frac{x_1^3}{3} - x_1) + x_2]^2\}. \end{aligned}$$

Teorema 2 (Poincare) Se um ciclo limite existir em um sistema autônomo de segunda ordem então $N = S + 1$ com N número de nós, centros e focos contidos dentro do ciclo limite e S o número de selas também contidas dentro do ciclo limite

Teorema 3 (Poincare-Bendixson) Se uma trajetória de um sistema autônomo de segunda ordem permanecer em uma região finita Ω do plano de fase, então uma das seguintes situações ocorrem

1. a trajetória vai para o ponto de equilíbrio
2. a trajetória tende assintoticamente para um ciclo limite estável
3. a trajetória é um ciclo limite

O seguinte teorema estabelece uma condição suficiente para a não-existência de um ciclo limite.

Teorema 4 (Bendixson) Para o sistema não linear (2), nenhum ciclo limite pode existir em uma região Ω do plano de fase na qual

$$\frac{\partial f_1}{\partial x_1} + \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \quad (14)$$

não se anula e não troca de sinal.

Exemplo 5 Verificar que o sistema abaixo não apresenta ciclo limite:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= g(x_2) + 4x_1x_2^2 \\ \dot{x}_2 &= h(x_1) + 4x_1^2x_2. \end{aligned}$$

4 Segundo Método de Lyapunov

A idéia básica do 2o. Método de Lyapunov refere-se à energia total do sistema. Se um sistema possui um estado de equilíbrio estável x_e , então a energia total armazenada no sistema decresce com o tempo até a energia total atingir o seu valor mínimo no estado de equilíbrio x_e . A estabilidade é analisada via uma função escalar especial chamada função de Lyapunov.

Definição 12 A função de Lyapunov $V(x)$ satisfaz as seguintes condições para todo $t_1 > t_0$ e para todo x na vizinhança de $x = 0$, com $x = 0$ um ponto de equilíbrio do sistema $\dot{x} = f(x)$:

1. $V(x)$ e suas derivadas parciais são definidas e são contínuas.
2. $V(0) = 0$
3. $V(x) > 0$ para todo $x \neq 0$ e $\dot{V}(x) \leq 0$, onde $\dot{V}(x)$ é a derivada de $V(x)$ em relação às trajetórias de $\dot{x} = f(x)$, i.e.

$$\begin{aligned}\dot{V}(x) &= \frac{dV(x)}{dt} = [\text{grad}_x V]^T \dot{x} \\ &= \frac{\partial V}{\partial x} f(x)\end{aligned}$$

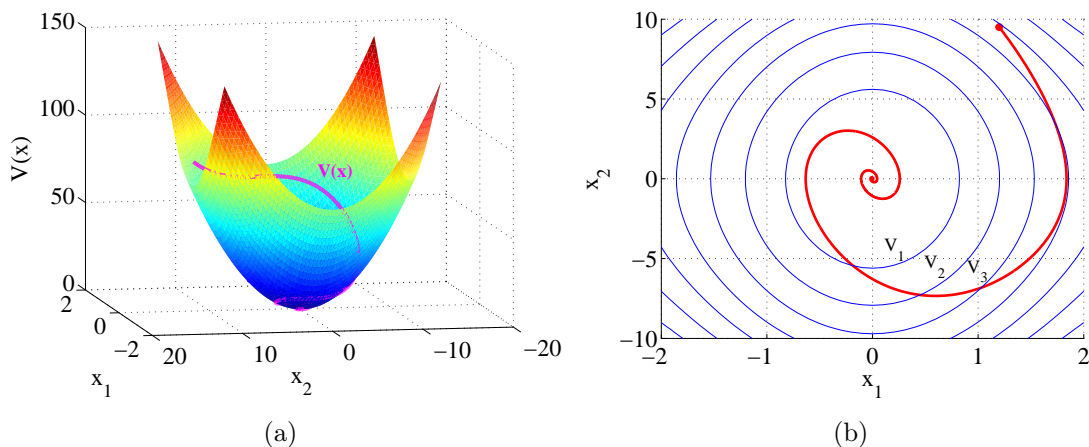


Figura 8: Representação geométrica de uma função de Lyapunov. (a) Representação 3D da função de Lyapunov ilustrando $V(x)$ ao longo de uma solução iniciando em x_0 , (b) Curvas de nível: $V_1 < V_2 < V_3$ e solução $x(t)$ iniciando em x_0 .

Na Figura 8 faz-se uma representação geométrica de uma função de Lyapunov. Nota-se que a condição $\dot{V}(x) \leq 0$ implica que a trajetória do sistema deve se aproximar da origem passando por curvas de nível com valores referentes a função de Lyapunov V cada vez menores. E se $\dot{V}(x) < 0$, então $x(t) \rightarrow 0$ quando $t \rightarrow \infty$.

Teorema 5 *Considere o sistema*

$$\dot{x} = f(x), \quad f(0) = 0.$$

Suponha que uma $V(x)$ possa ser determinada para o sistema. Então, o estado de equilíbrio $x = 0$ é assintoticamente estável se $\dot{V}(x)$ for negativa definida e estável no sentido de Lyapunov se $\dot{V}(x)$ for negativa semi-definida.

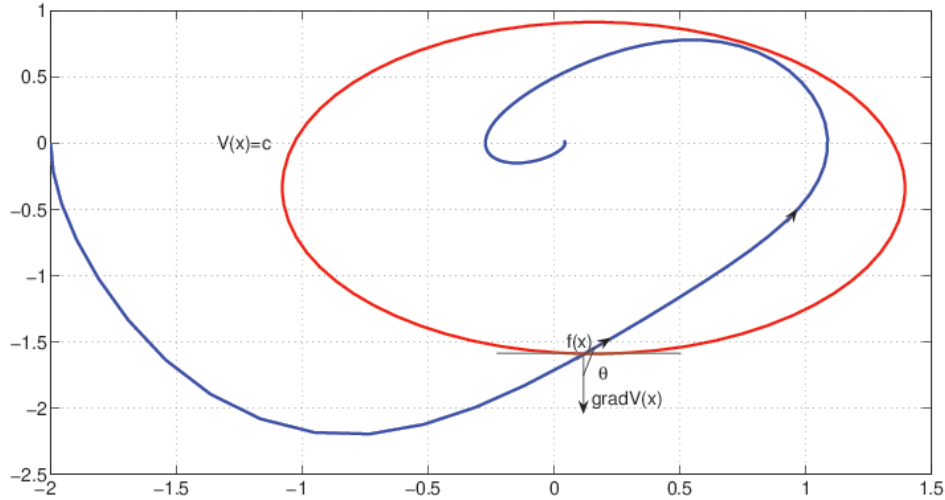


Figura 9: Sistema estável: $\cos\theta = \frac{\langle \text{Grad}_x V f(x) \rangle}{\|\text{Grad}_x V\| \|f(x)\|} < 0$.

Nota-se que a derivada de $V(x)$ é o produto escalar de dois vetores. A função $f(x)$ é um vetor que aponta no sentido da tangente da trajetória $x(t)$ do sistema naquele ponto, e $\text{grad}_x V(x)$ é um vetor normal, no sentido de crescimento de $V(x)$ em relação à uma curva de nível $V(x) = c, c > 0$. A Figura 9 ilustra o caso em que a derivada de $V(x)$ é negativa.

O teorema seguinte pode garantir a estabilidade assintótica do sistema mesmo que a derivada da função de Lyapunov V seja semidefinida negativa. Definição 13 é necessária para entender o teorema.

Um conjunto invariante com respeito a $\dot{x} = f(x)$ indica que se a solução pertence a \mathcal{M} em um instante t , então a solução pertence a \mathcal{M} para todo tempo futuro e passado.

Definição 13 *O conjunto \mathcal{M} é dito invariante com respeito às soluções do sistema dinâmico $\dot{x} = f(x)$ se toda trajetória iniciando em $x_0 = x(0)$ com $x_0 \in \mathcal{M}$ permanece em \mathcal{M} para todo $t \geq 0$.*

Teorema 6 (Princípio de invariância de La Salle) *Suponha $V(x) : \mathcal{R}^n \rightarrow \mathcal{R}$ tal que em $\omega_\ell = \{x \in \mathcal{R}^n : V(x) < \ell\}$ tem-se $\dot{V}(x) \leq 0$. Defina $E = \{x \in \omega_\ell : \dot{V}(x) = 0\}$. Então, toda solução do sistema iniciando em ω_ℓ é atraída para o maior conjunto invariante em E . Se E não conter outra trajetória a não ser $x = 0$ para $t \in [t_0, \infty]$, a origem $x = 0$ é assintoticamente estável.*

Exemplo 6 Seja o pêndulo simples com amortecimento viscoso

$$\ddot{\theta} + \dot{\theta} + \text{sen}\theta = 0$$

fazendo $x_1 = \theta$, $x_2 = \dot{\theta}$ tem-se

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= -x_2 - \text{sen}(x_1).\end{aligned}$$

Considere

$$V(x) = (1 - \cos x_1) + \frac{x_2^2}{2} \quad (15)$$

Na verdade, esta $V(x)$ representa a energia total do pêndulo, composta pela soma da energia potencial com a energia cinética. Observe que $V(x) > 0$, no conjunto $D = \{x \in \mathbb{R} : 0 \leq x_1 < \pi\}$ ($V(x) = 0$ para $x \neq 0$, por exemplo $x = (\pi, 0)$ não atende Definição 12 item 3)

$$\begin{aligned}\dot{V}(x) &= \text{sen}(x_1)\dot{x}_1 + x_2\dot{x}_2 \\ &= \text{sen}(x_1)x_2 + x_2(-x_2 - \text{sen}(x_1)) = -x_2^2 \leq 0\end{aligned} \quad (16)$$

tem-se então que $x = 0$ é estável localmente. Uma outra alternativa para tentar provar a estabilidade assintótica da origem seria usar o princípio de invariância de La Salle, o qual não exige que a derivada da função V seja definida negativa.

Seja $\ell \in \mathbb{R}$ tal que $\omega_\ell \subset D$. A derivada da função V dada por (16) é semidefinida negativa em ω_ℓ , então pelo Teorema 6 pode-se afirmar que a solução é atraída para o maior conjunto invariante em E . Pela Definição 13, tem-se que a origem é o único conjunto invariante em E . Portanto, a origem é um ponto de equilíbrio assintoticamente estável localmente.

Teorema 7 (Estabilidade global) Suponha uma função escalar $V(x)$ com derivadas contínuas tal que

1. $V(x) > 0$
2. $\dot{V}(x) < 0$
3. $V(x) \rightarrow \infty$ quando $\|x\| \rightarrow \infty$.

Então, o ponto de equilíbrio 0 é globalmente assintoticamente estável.

4.1 Caso sistemas lineares

Teorema 8 Considere o sistema linear $\dot{x} = Ax$ com $\det(A) \neq 0$ e $x_e = 0$. Considere $V(x) = x^T Px$, $P = P^T > 0$. Então, $V(x)$ é uma função de Lyapunov do sistema linear se e só se para qualquer $Q = Q^T > 0$ existe $P = P^T > 0$ tal que

$$A^T P + PA = -Q.$$

Prova. Para $V(x) = x^T Px$ tem-se $\dot{V}(x) = \dot{x}^T Px + x^T P\dot{x}$. Usando $\dot{x} = Ax$ pode-se escrever $\dot{V}(x) = x^T A^T Px + x^T PAx$. Então, $\dot{V}(x) = x^T [A^T P + PA]x = -x^T Qx < 0, \forall x \neq 0$.

Teorema 9 (*Estabilidade local*) Se em uma bola B_{R_0} existe uma função escalar $V(x)$ com derivadas contínuas tal que

1. $V(x) > 0$ localmente
2. $\dot{V}(x) \leq 0$ localmente em B_{R_0} .

Então o ponto de equilíbrio $x = 0$ é localmente estável. Se $\dot{V}(x) < 0$ em B_{R_0} então a estabilidade é assintótica.

4.2 Sistemas discretos no tempo: pontos de equilíbrios de mapas

Chama-se de *mapas* os sistemas dinâmicos que evoluem no tempo de uma forma discreta. Considere o mapa

$$x_{k+1} = F(x_k; u(k)) \quad (17)$$

onde $k \in \mathbb{Z}$.

Definição 14 Diz-se que x_e é um ponto de equilíbrio, para $u = u_e$, se $x_e = F(x_e; u_e)$.

Da mesma forma que no caso dos sistemas contínuos no tempo, para estudar a estabilidade de pontos de equilíbrios de mapas faz-se uma linearização na sua vizinhança. Assim, seja y uma pequena perturbação feita em x_e de tal forma que

$$x_e + y_{k+1} = F(x_e + y_k; u_e).$$

Expandindo F em série de Taylor em torno de x_e

$$x_e + y_{k+1} = F(x_e, u_e) + [grad_x F]^T|_{x_e, u_e} y_k + (\text{termos de ordem superior})$$

e usando o fato de que $x_e = F(x_e; u_e)$ fica-se com

$$y_{k+1} = [grad_x F]^T|_{x_e, u_e} y_k = Ay_k,$$

onde $A = [grad_x F]^T|_{x_e, u_e}$ é, como no caso dos sistemas contínuos, a matriz das derivadas parciais de F calculada em $(x_e; u_e)$.

A classificação da estabilidade do ponto de equilíbrio é feita com base nos autovalores da matriz A . Seja λ o vetor dos autovalores de A , diz-se que o ponto de equilíbrio x_e é *hiperbólico* se $|\lambda_i| \neq 1$, para todo i . Se pelo menos um dos autovalores tiver módulo igual a 1, diz-se que x_e é um ponto de equilíbrio *não hiperbólico*.

Definição 15 Se os módulos de alguns dos autovalores de A forem menor que 1, $|\lambda| < 1$, enquanto os outros forem maior que 1, $|\lambda| > 1$, o ponto de equilíbrio x_e é chamado de *sela*.

Definição 16 Se todos os autovalores de A tiverem módulo menor que 1, diz-se que o ponto de equilíbrio é *assintoticamente estável*.

Definição 17 Se pelo menos um dos autovalores de A tiverem módulo maior que 1 o ponto de equilíbrio é *instável*.

O estudo da estabilidade de um ponto de equilíbrio não hiperbólico é um pouco mais complicado, precisa-se fazer uma análise dos termos de segunda de ordem da aproximação, que despreza-se na linearização.

Um ponto x_e do mapa (13) que satisfaz a condição

$$x_e = F^k(x_e; u_e)$$

onde $k \geq 1$, é chamado *ponto periódico de ordem k* do mapa F . Nota-se que x_e pode também ser dito um ponto de equilíbrio do mapa $G = F^k$, que é formado por k iterações sucessivas do mapa F .

4.3 Bifurcações

O comportamento de sistemas dinâmicos dependem, em geral, de um vetor de parâmetros que é chamado de parâmetros de controle. Uma *bifurcação* é o que chama-se de uma mudança qualitativa no plano de fase do sistema dinâmico. No espaço de controle, o ponto onde essa mudança ocorre é chamado de *ponto de bifurcação*.

Do ponto de vista de estabilidade estrutural, o ponto de bifurcação é um ponto onde o sistema perde sua estabilidade. Nesse ponto podem, por exemplo, surgir ou desaparecer pontos de equilíbrios, ou pontos instáveis podem ser tornar estáveis e vice-versa. A seguir alguns tipos comuns de bifurcações são descritos.

4.3.1 Tipos de bifurcações

1. Bifurcação sela-nó (ou dobra)

Seja o sistema de dimensão um

$$\dot{x} = f_\mu(x) = \mu - x^2$$

onde $x, \mu \in \mathbb{R}$ e μ é o parâmetro de controle. Os pontos de equilíbrios são $x = \sqrt{\mu}$ e $x = -\sqrt{\mu}$. Para $\mu < 0$ não tem-se pontos de equilíbrios. Portanto, pelos critérios vistos,

- para $x = \sqrt{\mu}$, $\frac{df}{dx} = -2\sqrt{\mu} < 0 \rightarrow$ nó estável.
- para $x = -\sqrt{\mu}$, $\frac{df}{dx} = 2\sqrt{\mu} > 0 \rightarrow$ nó instável.

O ponto de bifurcação é o ponto $x = 0$, onde os dois ramos referentes aos pontos de equilíbrios instáveis e estáveis se unem, como visto na Figura 10. Na Figura 10, o equilíbrio estável é um nó (ramo superior), o equilíbrio instável é uma sela (ramo inferior), por isso a bifurcação associada é denominada sela-nó [6].

Seja o sistema de dimensão 2 dado por

$$\dot{x}_1 = -x_2 + x_1(\mu - x_1^2 - x_2^2) = f_\mu(x_1, x_2)$$

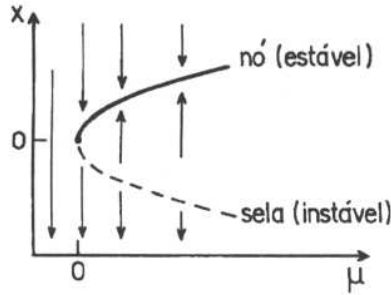


Figura 10: Bifurcação sela-nó [4].

$$\dot{x}_2 = -x_1 + x_2(\mu - x_1^2 - x_2^2) = g_\mu(x_1, x_2).$$

O único ponto de equilíbrio para todo μ é $(x_1, x_2) = (0, 0)$. Nesse ponto a matriz Jacobiana é

$$J = \begin{bmatrix} \mu & -1 \\ 1 & \mu \end{bmatrix}$$

Portanto, os autovalores de J são $\lambda_1 = \mu + i$ e $\lambda_2 = \mu - i$. Então, o equilíbrio é estável para $\mu < 0$ e instável para $\mu > 0$. Conclui-se que no ponto $\mu = 0$ tem-se uma perda de estabilidade. A seguir, estuda-se o que ocorre na região $\mu > 0$. Usando coordenadas polares, definidas por $x_1 = r\cos\theta$ e $x_2 = r\sin\theta$, pode-se reescrever o sistema da seguinte forma

$$\begin{aligned} \dot{r}\cos\theta - r\dot{\theta}\sin\theta &= -r\sin\theta + r\cos\theta(\mu - r^2), \\ \dot{r}\sin\theta + r\dot{\theta}\cos\theta &= r\cos\theta + r\sin\theta(\mu - r^2). \end{aligned}$$

Multiplicando a primeira equação por $\cos\theta$, a segunda por $\sin\theta$, e somando-as tem-se um novo sistema

$$\dot{r} = r(\mu - r^2),$$

e

$$\dot{\theta} = 1.$$

Verifica-se que existe uma órbita periódica para $\mu > 0$. De fato, em $r = \sqrt{\mu}$ tem-se $\dot{r} = 0$. Além disso, a órbita é estável já que $\dot{r} < 0$ para $r > \sqrt{\mu}$, e $\dot{r} > 0$ para $r < \sqrt{\mu}$. Pode-se ver claramente como isso ocorre na Figura 11.

A bifurcação que ocorre em $\mu = 0$, onde passa-se de um equilíbrio para uma oscilação periódica é chamada de *bifurcação de Hopf*. Esse tipo de bifurcação apresenta a interessante característica de ligar um equilíbrio a movimento periódico via variação de μ .

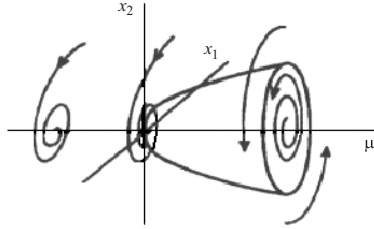


Figura 11: Bifurcação de Hopf.

4.4 Mapas e seção de Poincaré

Uma das maneiras pela qual um sistema contínuo dá origem a um mapa discreto é pela utilização de *seções de Poincaré*. A seção de Poincaré é uma maneira de reduzir o estudo de um fluxo num espaço de fase com n dimensões a uma aplicação discreta num espaço de fase com $(n - 1)$ dimensões, chamada *mapa de Poincaré*.

4.4.1 Sistema não autônomo

Em sistemas não autônomos, o período associado às órbitas periódicas, geralmente, está claramente explícito. Assim, o período de qualquer solução periódica que aparece no sistema é sempre múltiplo de um período fundamental T .

Suponha que tem-se um sistema não autônomo representado por uma equação diferencial da forma

$$\ddot{x} + g(x, \dot{x}) = f(t),$$

ou ainda por

$$\ddot{x} + a_1(t)\dot{x} + a_2(t)x = 0,$$

onde $f(t)$, $a_1(t)$ e $a_2(t)$ são funções periódicas de período T . Sabe-se que seu retrato de fase é portanto tridimensional, e cada estado é dado por (x, \dot{x}, t) . Nesse caso, o mapa de Poincaré pode ser obtido simplesmente considerando-se a interseção da trajetória com plano (x, \dot{x}) a cada período T , como mostrado na Figura 12.

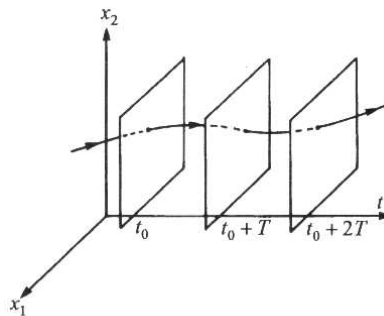


Figura 12: Construção do mapa de Poincaré para um sistema não

4.4.2 Sistema autônomo

Seja o sistema dinâmico autônomo n -dimensional, com soluções periódicas, dado por

$$\dot{x} = F(x).$$

Aqui $F(x)$ representa um campo vetorial não linear. Seja $\phi_t(x)$ o fluxo gerado e $\phi_t(x_0)$ uma órbita periódica de período T . Seja uma hipersuperfície $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ de dimensão $(n-1)$, que contenha x_0 , de tal maneira que o fluxo lhe seja transversal, ou seja, $\phi_t(x) \cdot n(x) \neq 0$, onde $n(x)$ é o vetor normal à hipersuperfície Ω . Seja ainda $U \subseteq \Omega$ uma vizinhança de x_0 .

Definição 18 Chama-se de mapa de Poincaré a aplicação $P : U \rightarrow \Omega$ definida para um ponto $x_1 \in U$ da seguinte maneira

$$P(x_1) = \phi(x_1, \tau)$$

onde $\tau = \tau(x_1)$ é o tempo necessário para que a órbita $\phi_t(x_1)$ que parte de x_1 retorne pela primeira vez em Ω .

A hipersuperfície Ω é chamada de *seção de Poincaré*. Pode-se ver geometricamente a construção de um mapa de Poincaré na Figura 13. Pela construção geométrica do mapa de Poincaré fica explícito a relação entre as órbitas periódicas de um sistema e os pontos de equilíbrios dos mapas de Poincaré. Se o mapa de Poincaré de um sistema apresenta um ponto de equilíbrio, isso mostra que a trajetória sempre passa por aquele ponto conforme o tempo evolui, indicando que o retrato de fase do sistema deve necessariamente apresentar uma órbita periódica. Como a seção de Poincaré tem dimensão menor que o espaço de fase do sistema correspondente, o mapa de Poincaré pode ser uma ferramenta útil no estudo das órbitas periódicas de um sistema qualquer.

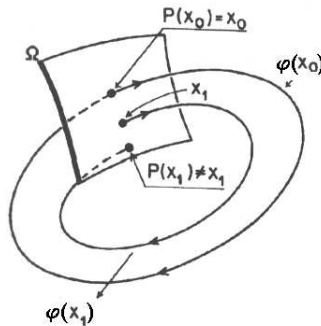


Figura 13: Significado geométrico.

Exemplo 7 (O oscilador de Duffing)

Seja o sistema massa mola simples do Exemplo 8, onde $F = mg$ e $F_{el} = x - x^3$ acrescido de uma excitação periódica $F(t) = \gamma \cos(\omega t)$ e de uma força dissipativa $F_d = -c\dot{x}$, como mostrado na Figura 14. A frequência da força externa é determinada pelo parâmetro γ e

a intensidade da força amortecedora por c . Esse sistema é conhecido como *oscilador de Duffing*. Sua equação de movimento, para $c = \epsilon$ e considerando agora que $x = 0$ está na posição de repouso do sistema, pode ser obtida pelo método visto na seção anterior, chegando a

$$\ddot{x} + \epsilon \dot{x} - x + x^3 - \gamma \cos(\omega t) = 0.$$

Usando o aplicativo *Matlab* traça-se o retrato de fase $x - \dot{x}$ e o mapa de Poincaré corres-

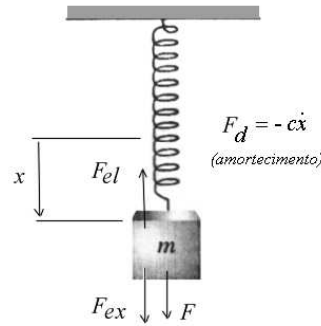


Figura 14: Oscilador de Duffing.

pondente do oscilador para $\gamma = -0.3$, $\omega = 1$, condição inicial igual a $(0, 0)$ e diferentes valores da constante de amortecimento ϵ . O programa desenvolvido para este exemplo encontra-se descrito no Apêndice (Seção B). Para $\epsilon = 0, 22$ as Figuras 15, 16 e 17 ilustram os resultados obtidos.

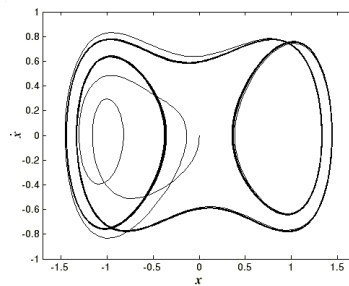


Figura 15: Retrato de fase para $\epsilon = 0, 22$ e $0 \leq t \leq 1000$.

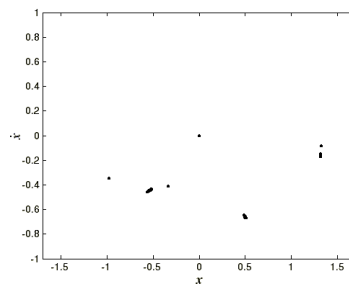


Figura 16: Seção de Poincaré para $\epsilon = 0, 22$ e $t = 2k\pi$, $k = 0, 1, \dots, 1000$.

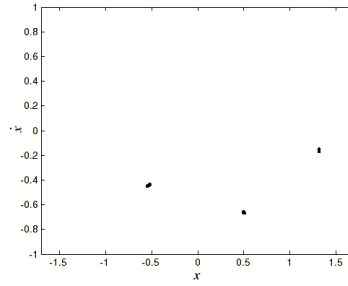


Figura 17: Seção de Poincaré para $\epsilon = 0,22$ e $t = 2k\pi$, $k = 0, 1, \dots, 1000$ sem transiente.

Observa-se que o mapa de poincaré (Figura 16) mostra claramente o que o retrato de fase (Figura 15) parece esconder um pouco: a presença de três órbitas periódicas, que ficam ainda mais visíveis quando elimina-se a parte do transiente do tempo e analisa-se o sistema em regime (Figura 16).

–Para $\epsilon = 0,25$ as Figuras 18, 19 ilustram os resultados obtidos.

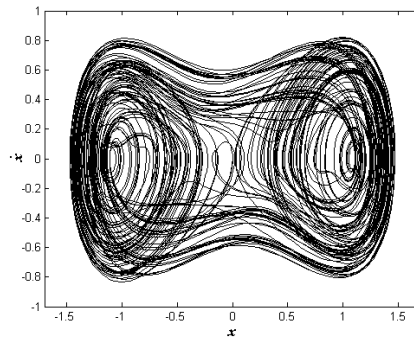


Figura 18: Retrato de fase para $\epsilon = 0,25$ e $0 \leq t \leq 1000$.

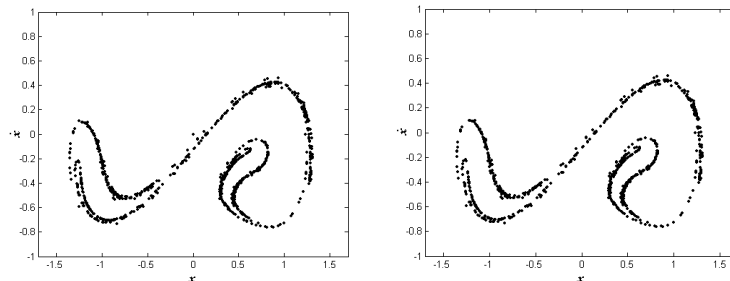


Figura 19: Seção de Poincaré para $\epsilon = 0,25$ e $t = 2k\pi$, $k = 0, 1, \dots, 1000$ com transiente (esquerda) e sem transiente para $k = 100, 101, \dots, 1000$ (direita)

Observa-se que aumentando o valor de ϵ para 0,25, o sistema deixa de apresentar as soluções periódicas que tinha anteriormente, conforme pode-se comprovar observando os mapa de poincaré obtidos, os quais agora possuem muitos pontos espalhados por todo o

plano $x - \dot{x}$, mesmo quando retirado o tempo transiente. Esse espalhamento nos mostra que dada uma condição inicial, a trajetória que descreve o comportamento do sistema no tempo dificilmente voltará a passar pelo mesmo ponto após um número inteiro do período T característico do sistema. Esse tipo de comportamento é uma característica de sistemas que apresentam caos.

Comparando as duas situações, pode-se concluir que provavelmente deve haver um ponto de bifurcação no espaço de estado-controle onde o sistema perde a característica de de comportamento periódico para assumir um comportamento caótico.

A Obtenção de Equações de Sistemas Dinâmicos via Equações de Lagrange

A.1 Formulação Lagrangeana

A formulação Lagrangeana nos dá uma forma alternativa, em relação as equações de Newton, para escrever as equações do movimento. Utiliza-se das expressões da energia de um sistema, como se fizesse um balanceamento das energias.

A.1.1 Sistemas conservativos

A equação que representa o movimento de uma partícula é dada por

$$F_i = \frac{d}{dt}(m_i \dot{x}_i) \quad (18)$$

onde F_i são as componentes da força em relação a cada uma das coordenadas x_i , e m_i é a massa da partícula. Sua energia cinética é definida como

$$T = \sum_i \frac{1}{2} m_i \dot{x}_i^2.$$

Se derivar-se a energia cinética T em relação a x_i , tem-se

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{x}_i} = 2 \frac{1}{2} (m_i \dot{x}_i) = m_i \dot{x}_i.$$

Substituindo esta derivada na equação do movimento tem-se

$$F_i = \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}_i} \right). \quad (19)$$

Da definição de sistema conservativo sabe-se que

$F_i = -\frac{\partial V}{\partial x_i}$, onde $V = V(x_i)$ é a energia potencial do sistema considerado. Substituindo agora esta equação em (19) tem-se

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}_i} \right) = -\frac{\partial V}{\partial x_i}. \quad (20)$$

Para simplificar, pode-se definir uma função L como

$$L = T - V$$

para obter

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial(L+V)}{\partial \dot{x}_i} \right) &= -\frac{\partial(T-L)}{\partial x_i} \\ \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} \right) + \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial V}{\partial \dot{x}_i} \right) &= -\frac{\partial T}{\partial x_i} + \frac{\partial L}{\partial x_i}. \end{aligned}$$

Por definição $\frac{\partial V}{\partial \dot{x}_i} = 0$ e $\frac{\partial T}{\partial x_i} = 0$ e a equação se simplifica em

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial x_i} = 0. \quad (21)$$

A função L é chamada de *função Lagrangiana* do sistema e a equação (21) é chamada equação de Lagrange. Com a formulação Lagrangiana, representa-se a função L do sistema, calculando sua energia potencial e cinética, e assim obtém-se a equação de Lagrange que representa seu movimento.

Como uma aplicação da formulação Lagrangiana, veja o exemplo a seguir, que, apesar de simples, mostra claramente que usando esta formulação obtém-se os mesmos resultados obtidos pelo método clássico de Newton.

Exemplo 8 *Considere um sistema massa-mola simples, como na Figura 20, sem excitação e sem atrito.*

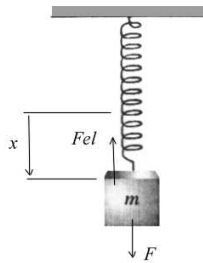


Figura 20: Sistema massa-mola.

A.1.2 –Pelas equações de Newton

:

$$F = mg,$$

$$F_{el} = -kx.$$

Analisando as forças no sistema tem-se

$$F + F_{el} = m \frac{d^2x}{dt^2}$$

$$mg - kx = m \frac{d^2x}{dt^2}$$

como $\frac{d^2x}{dt^2} = \ddot{x}$, a equação de movimento para o sistema é

$$\ddot{x} + \frac{k}{m}x - g = 0$$

A.1.3 Pelo Lagrangiano

$$T = \frac{1}{2}m\dot{x}^2$$

e

$$V = -mgx + \frac{1}{2}kx^2.$$

Então

$$L = T - V = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 - (-mgx + \frac{1}{2}kx^2)$$

e chega-se a

$$L = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + mgx - \frac{1}{2}kx^2.$$

A equação de Lagrange em relação a x é da forma

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial(\frac{1}{2}m\dot{x}^2 + mg - \frac{1}{2}kx^2)}{\partial \dot{x}} \right) - \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{2}m\dot{x}^2 + mgx - \frac{1}{2}kx^2 \right) = 0.$$

Assim

$$\frac{\partial(m\dot{x})}{\partial t} - (mg - kx) = 0$$

ou

$$\ddot{x} + \frac{k}{m}x - g = 0$$

Obtendo-se, portanto, a mesma equação diferencial.

A.1.4 Sistemas não-conservativos

A formulação Lagrangeana também pode ser aplicada, de uma maneira muito simples, a alguns casos de sistemas não-conservativos. Considera-se aqui o caso mais simples e mais típico dentre as forças dissipativas, que é quando estas variam com a velocidade na forma

$$F_{dis} = -k_i \dot{x}_i,$$

onde k_i é uma constante qualquer. Nesse caso define-se uma nova quantidade

$$R = \frac{1}{2}k_i \dot{x}_i^2$$

chamada *função dissipação de Rayleigh* [5]. Então,

$$F_{dis} = -\frac{\partial R}{\partial \dot{x}_i}.$$

Assim, a equação de Lagrange, incluindo a nova parcela referente às forças dissipativas, é dada por

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial x_i} + \frac{\partial R}{\partial \dot{x}_i} = 0.$$

Exemplo 9 Considere um sistema semelhante ao do Exemplo 8, onde adiciona-se mais uma força devido ao atrito, dada por

$$F_{dis} = -c\dot{x}.$$

A.1.5 –Pelas equações de Newton

$$F + F_{el} + F_{dis} = m\ddot{x}$$

portanto

$$mg - kx - c\dot{x} = m\ddot{x}$$

ou

$$\ddot{x} + c\dot{x} + \frac{k}{m}x - mg = 0.$$

A.1.6 –Pelo Lagrangeano

$$L = T - V = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + mgx - \frac{1}{2}kx^2$$

e

$$R = \frac{1}{2}c\dot{x}^2.$$

Aplicando a formulação para sistemas não-conservativos pode-se escrever

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial x_i} + \frac{\partial R}{\partial \dot{x}_i} = 0.$$

Substituindo L e R na equação de Lagrange, tem-se

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial(\frac{1}{2}m\dot{x}^2 + mgx - \frac{1}{2}kx^2)}{\partial \dot{x}_i} \right) - \frac{\partial(\frac{1}{2}m\dot{x}^2 + mgx - \frac{1}{2}kx^2)}{\partial x_i} + \frac{\partial(\frac{1}{2}c\dot{x}^2)}{\partial \dot{x}_i} = 0$$

e chega-se a

$$\frac{d}{dt}(m\dot{x}) - mg + kx + c\dot{x} = 0$$

ou

$$\ddot{x} + c\dot{x} + \frac{k}{m}x - mg = 0.$$

Novamente, neste exemplo, obtém-se as mesmas equações obtidas pelo método clássico.

B Programas no Matlab do oscilador de Duffing

Programa desenvolvido para obtenção do retrato de fase e do mapa de Poincaré para o Oscilador de Duffing utilizando o aplicativo *Matlab*

– Programa principal:

```
clear all (comandos de limpeza das variáveis)
close all
clc
```

```
t=[0:0.1:1000]; (Intervalo de tempo para obtenção do retrato de fase)
```

```
t1= [0:2*pi:2000*pi]; (Intervalo de tempo com período de equilíbrio para a obtenção do mapa de Poincaré)
```

```
x1=[0 0]; (Condições iniciais)
```

```
[t,x]=ode45('duf1',t,x1); (Obtenção do vetor de estados do sistema o retrato de fase utilizando a subrotina “duf1”)
```

```
[t,y]=ode45('duf1',t1,x1); (Obtenção do vetor de estados para o mapa de Poincaré utilizando a subrotina “duf1”)
```

```
for i=1:1001, (Eliminação da parte transiente)
j=100+i;
if j < 1001,
z(i,1)=y(j,1);
z(i,2)=y(j,2);
end;
end;
```

```
figure
plot(x(:,1),x(:,2)) (Gráfico  $x(t)$  vs.  $x'(t)$  do retrato de fase)
```

```
figure
plot(y(:,1),y(:,2),'.') (Gráfico  $x(t)$  vs.  $x'(t)$  do mapa de Poincaré (com transiente))
```

```
figure
plot(z(:,1),z(:,2),'.') (Gráfico  $x(t)$  vs.  $x'(t)$  do mapa de Poincaré (sem transiente))
```

– Subrotina de declaração da equação diferencial do sistema (para $\epsilon = 0, 22$)

```
function [xdot] = duf1c(t,x)
% [xdot]= naolinear(t,x)
```

```
% Simula um sistema dinâmico não- linear %  
epsilon=0.22; (Declara o valor da constante  $\epsilon$ )  
gama=-0.3; (Declara o valor da constante  $\gamma$ )  
omega=1; (Declara o valor da constante  $\omega$ )  
  
xdot=[x(2);x(1)-x(1)^3-epsilon*x(2)+gama*cos(omega*t)] (Equação diferencial do sistema);
```

Referências

- [1] Slotine, J.J.E. *Applied Nonlinear Control*, Prentice-Hall, 1991.
- [2] Khalil, H. *Nonlinear Systems*, Prentice-Hall, 1996.
- [3] Nayfeh, A. H. e Balachandram, B., *Applied Nonlinear Dynamics: Analytical, Computational, and Experimental Methods*, Wiley-Interscience Publication, 1995.
- [4] Fiedler-Ferrara, N. e Prado, C. P. C., *Caos: Uma Introdução*, Edgard Blücher, 1994.
- [5] Leech, J. W., *Mecânica Analítica*, ed. Ao Livro Técnico EDUSP,1971.
- [6] Argyris, J., Faust, C. e Haase, M., *An Exploration of Chaos*, North-Holland, 1994.
- [7] Jantzen, J., *Foundations of Fuzzy Control*, Wiley, 2007.