CAPÍTULO 3

Geometria Vetorial

3.1 VETORES

A palavra geometria em grego significa *medida da terra* e seus usos práticos remontam à Antigüidade. Na Grécia antiga, toda a matemática era vista como geometria, mas neste capítulo estaremos interessados especialmente em retas e planos do espaço. Nossa abordagem será olhar pontos como matrizes-coluna (chamados vetores neste contexto) e então usar a álgebra das matrizes para simplificar os cálculos.

3.1.1 Sistemas de Coordenadas

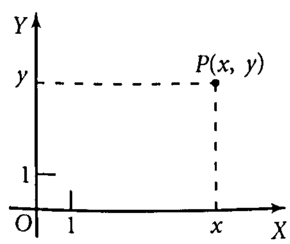


Figura 3.1

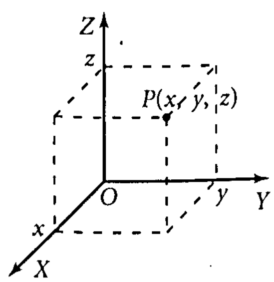


Figura 3.2

Os gregos praticavam **geometria sintética**, ou seja, lidavam com figuras geométricas sem o uso de um sistema de coordenadas. O uso de coordenadas foi iniciado por René Descartes[1] em 1637, e possibilitou o uso de equações algébricas para descrever figuras geométricas. Esse método, chamado **geometria analítica**, permite que o potencial computacional da aritmética seja usado para simplificar muitos cálculos geométricos e foi fundamental para o desenvolvimento da análise (cálculo diferencial e integral) no século XVIII. Por sua vez, o método torna claro o estudo de equações por meio da aplicação das idéias intuitivas e conceituais da geometria em seus gráficos.

No plano, as coordenadas são introduzidas da seguinte maneira: escolha um ponto O chamado **origem**, escolha duas retas perpendiculares passando por O, chamados **eixo X** e **eixo Y**, e coloque uma escala de números em cada eixo com O na origem.* Então cada ponto P determina um único par (x, y) de números que são as **coordenadas de P**, mostradas na Figura 3.1. Escrevemos $P = P(x, y)$ quando queremos enfatizar as coordenadas de P.**

Coordenadas no espaço são introduzidas da mesma maneira, exceto pelo fato que são escolhidos *três* eixos (orientados), mutuamente perpendiculares e que se interceptam na origem O, como mostra a Figura 3.2 (chamados **eixo X**, **eixo Y** e **eixo Z**). Com isso, um ponto P determina uma única tripla (x, y, z) de números (as **coordenadas** de P), e denotamos P por $P(x, y, z)$.***

3.1.2 Vetores e Escalares

Estamos todos familiarizados com grandezas que são completamente determinadas apenas por um número. Exemplos desse tipo são as medidas de tempo, área, massa, temperatura e pressão. Essas são chamadas grandezas **escalares**. Contudo, algumas grandezas não são escalares. Por exemplo, a velocidade de um avião não é completamente descrita se dissermos apenas que o avião está voando a 400 km/h; sua *direção* deve ser dada também, por exemplo – 400 km/h na direção *leste*. Uma grandeza que requer uma **magnitude** (também chamada **intensidade** ou **módulo**) e uma **direção** para descrevê-la é chamada grandeza **vetorial**.

* NTT: Os eixos são *orientados* no sentido do crescimento dos números na escala.

** NTT: Também é verdade que, uma vez fixados os dois eixos e a origem, cada par de números determina um único ponto do plano. Há, portanto, uma correspondência biunívoca entre o conjunto dos pares de números e o conjunto dos pontos de um plano.

*** NTT: Vale também que, uma vez fixados os três eixos e a origem, a cada tripla de números corresponde um único ponto do espaço.

[1] René Descartes (1596–1650), filósofo e matemático francês, teve seu método geométrico publicado pela primeira vez em seu livro *La géométrie*, em 1637.

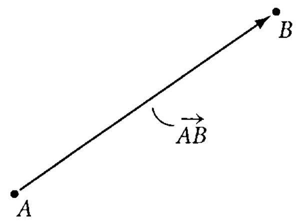


Figura 3.3

Assim, o vetor velocidade de nosso avião tem magnitude de 400 km/h (a *velocidade* escalar usual) e tem direção leste. Para podermos dizer que dois aviões têm o mesmo vetor velocidade, tanto as velocidades escalares como as direções têm que ser iguais. Em geral:

> *Duas grandezas vetoriais são iguais se, e somente se, elas têm a mesma magnitude e a mesma direção.*

Neste capítulo estaremos interessados apenas em vetores que aparecem em geometria. Se A e B forem dois pontos do plano ou do espaço, o segmento de reta orientado de A até B é chamado **vetor geométrico** (ou simplesmente **vetor**) de A a B, e é denotado por $\overrightarrow{AB}$. Como o nome sugere, é uma grandeza vetorial com direção de A a B e magnitude igual à distância entre A e B. O vetor $\overrightarrow{AB}$ é representado por uma seta que vai de A a B, como mostrado na Figura 3.3. O ponto A é chamado **origem** (ou ponto inicial) do vetor, e B é a **extremidade** (ou ponto final) de $\overrightarrow{AB}$. A magnitude de um vetor geométrico $\overrightarrow{AB}$ é chamada **comprimento** e é denotada por $\|\overrightarrow{AB}\|$.

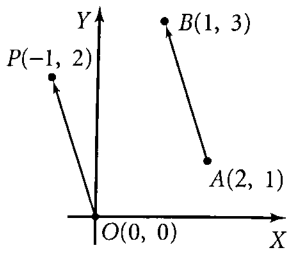


Figura 3.4

Ao longo deste capítulo, os vetores irão aparecer tanto em duas quanto em três dimensões. Em geral, vamos discutir o caso tridimensional, mas ambas as situações são análogas.

Dois vetores podem ser o mesmo embora tenham origens e extremidades diferentes. Por exemplo, $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OP}$ na Figura 3.4 porque eles têm o mesmo comprimento e a mesma direção (ambos se dirigem uma unidade para a esquerda e duas para cima).[2] Assim, o mesmo vetor pode mudar de uma posição para outra, por meio de uma translação. O que importa é que o comprimento e a direção permaneçam os mesmos, e não onde as origens e as extremidades estão localizadas. Por essa razão, freqüentemente denotaremos os vetores por $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$ etc. não fazendo referência às origens ou às extremidades.

3.1.3 Representação Matricial de um Vetor

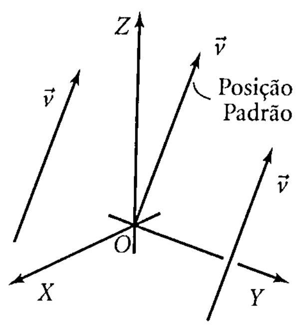


Figura 3.5

Um vetor $\vec{v}$ pode ter qualquer ponto como origem, como ilustrado na Figura 3.5. Em particular, dizemos que $\vec{v}$ está na **posição padrão** se seu ponto inicial coincidir com a origem O do sistema de coordenadas. Então $\vec{v} = \overrightarrow{OP}$ como na Figura 3.6 em que o ponto $P(x, y, z)$ é a extremidade do vetor, determinado de modo único. Escrevemos $\vec{v}$ como a matriz 3×1[3]

$$\vec{v} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = [x \quad y \quad z]^T.$$

Nesse caso dizemos que $\vec{v}$ está escrito[4] na **forma matricial**, que x, y e z são as **componentes** (ou também **coordenadas**) de $\vec{v}$ e que $\vec{v}$ é o **vetor posição** do ponto $P = P(x, y, z)$. Dessa forma, todo vetor $\vec{v}$ é o vetor posição de algum ponto P (unicamente determinado) e as coordenadas de P são as mesmas que as componentes do vetor $\vec{v}$. Além disso, todo ponto P *determina* um vetor $\vec{v} = \overrightarrow{OP}$.

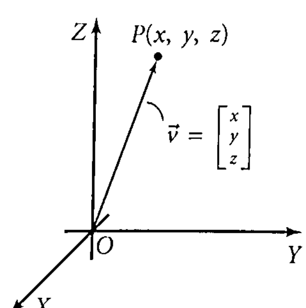


Figura 3.6

Da mesma maneira, um vetor bidimensional $\vec{v}$ tem a forma matricial $\vec{v} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ em que $\vec{v}$ é o vetor posição de $P = P(x, y)$. Assim, por exemplo, o vetor $\vec{v} = \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OP}$ na Figura 3.4 tem forma matricial $\vec{v} = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix}$.

Como podemos escrever vetores na forma matricial, podemos falar de somas e múltiplos escalares de vetores. Isso nos dá uma ferramenta muito poderosa porque essas operações com matrizes têm significados geométricos naturais. Em particular, cálculos geométricos podem ser feitos facilmente usando álgebra matricial. Esse método é chamado **geometria vetorial**, e seu estudo é o tema principal deste capítulo.

[2] Frações são outro exemplo em que quantidades podem ser a mesma mas parecem diferentes: $\frac{6}{9}$ e $\frac{14}{21}$ certamente parecem diferentes, mas são números iguais (de fato, ambos iguais a $\frac{2}{3}$).

[3] Como um vetor $\vec{v}$ é uma matriz, deveria ser denotado (como na Seção 1.1) por uma letra maiúscula, digamos $\vec{v} = V$. Entretanto, a notação $\vec{v}$ para vetores é padrão, e consistente com a notação $\overrightarrow{AB}$.

[4] A notação mais compacta $[x \quad y \quad z]^T$ é usada por conveniência na impressão.

Sejam $\vec{v} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = [x \;\; y \;\; z]^T$ e $\vec{w} = \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{bmatrix} = [x_1 \;\; y_1 \;\; z_1]^T$ vetores e seja a um escalar.
Definimos o **vetor nulo** $\vec{0}$, o **oposto** $-\vec{v}$, a **soma** $\vec{v} + \vec{w}$ e a **multiplicação por escalar** $a\vec{v}$ como sendo as matrizes:

$$\vec{0} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \qquad -\vec{v} = \begin{bmatrix} -x \\ -y \\ -z \end{bmatrix}, \qquad \vec{v} + \vec{w} = \begin{bmatrix} x+x_1 \\ y+y_1 \\ z+z_1 \end{bmatrix}, \qquad a\vec{v} = \begin{bmatrix} ax \\ ay \\ az \end{bmatrix}$$

Por serem operações matriciais, a adição de vetores e a multiplicação por escalar obedecem às regras básicas da aritmética matricial (Teoremas 1 e 2 da Seção 1.1). Repetimos aqui por conveniência: se $\vec{u}$, $\vec{v}$ e $\vec{w}$ são vetores (bi ou) tridimensionais, e se a e b são escalares, temos:

$$\begin{aligned} \vec{u} + \vec{v} &= \vec{v} + \vec{u} & (a+b)\vec{v} &= a\vec{v} + b\vec{v} \\ \vec{u} + (\vec{v} + \vec{w}) &= (\vec{u} + \vec{v}) + \vec{w} & a(\vec{u} + \vec{v}) &= a\vec{u} + a\vec{v} \\ \vec{0} + \vec{v} &= \vec{v} & a(b\vec{v}) &= (ab)\vec{v} \\ \vec{v} + (-\vec{v}) &= \vec{0} & 1\vec{v} &= \vec{v} \end{aligned}$$

No que segue, usaremos essas propriedades sem comentários. Elas são úteis para fazer
cálculos geométricos porque, como mencionado anteriormente, as operações matriciais têm
interpretações geométricas simples. Na verdade, o ponto de vista da geometria vetorial é o
seguinte: se desejar encontrar um ponto $P(x, y, z)$, em vez disso, encontre seu vetor posição
$\vec{p} = [x \;\; y \;\; z]^T$. Isso nos permite trazer todo o poder da álgebra matricial para enfrentar o
problema geométrico. Assim sendo, o restante desta seção será dedicado a esclarecer o
significado geométrico dessas operações matriciais.

3.1.4 Descrições Geométricas

Vamos descrever somas e multiplicações por escalar de vetores apenas em termos do
comprimento e direção dos vetores envolvidos. Tais descrições são chamadas **intrínsecas**
porque elas independem do sistema de coordenadas, um fato que é muito importante nas
aplicações (elas são, na verdade, as definições originais das operações com vetores em física).
Além disso, daremos outras traduções úteis entre a linguagem geométrica e a matricial.

Começamos com as descrições intrínsecas da igualdade de vetor, do vetor nulo, e do
oposto de um vetor. Elas derivam do teorema a seguir. O teorema também contém dois
resultados importantes sobre magnitude de um vetor $\vec{v}$, dos quais a fórmula na parte (2)
para calcular a magnitude de $\|\vec{v}\|$ a partir das coordenadas de $\vec{v}$ não é o menos importante.
Lembre-se que o valor absoluto de um número a é denotado por $|a|$.

TEOREMA 1 Sejam $\vec{v} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$ e $\vec{w} = \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{bmatrix}$ vetores.

(1) $\vec{v} = \vec{w}$ como vetores se, e somente se, $x = x_1$, $y = y_1$ e $z = z_1$.
(2) $\|\vec{v}\| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$.[5]
(3) $\vec{v} = \vec{0}$ se, e somente se, $\|\vec{v}\| = 0$.
(4) $\|a\vec{v}\| = |a|\,\|\vec{v}\|$ para qualquer escalar a.

DEMONSTRAÇÃO (1) Se $\vec{v}$ e $\vec{w}$ estão posicionados com seus pontos iniciais na origem do sistema como na Figura 3.7, as extremidades de $\vec{v}$ e $\vec{w}$ são os pontos $P(x, y, z)$ e $P_1(x_1, y_1, z_1)$, respectivamente. É claro, pela Figura 3.7, que $\vec{v} = \vec{w}$ (mesmo comprimento e direção) se, e somente se, P e P_1 são pontos iguais, isto é, se, e somente se, $x = x_1$, $y = y_1$ e $z = z_1$.

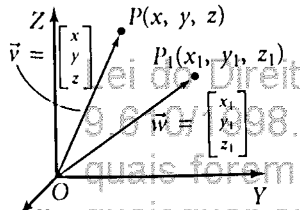


Figura 3.7

[5] Ao longo deste livro, $\sqrt{a}$ significa a raiz quadrada *positiva* de a.

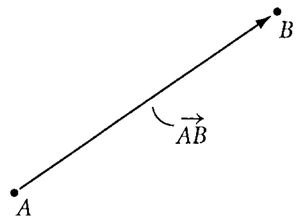


Figura 3.3

Assim, o vetor velocidade de nosso avião tem magnitude de 400 km/h (a *velocidade* escalar usual) e tem direção leste. Para podermos dizer que dois aviões têm o mesmo vetor velocidade, tanto as velocidades escalares como as direções têm que ser iguais. Em geral:

Duas grandezas vetoriais são iguais se, e somente se, elas têm a mesma magnitude e a mesma direção.

Neste capítulo estaremos interessados apenas em vetores que aparecem em geometria. Se A e B forem dois pontos do plano ou do espaço, o segmento de reta orientado de A até B é chamado **vetor geométrico** (ou simplesmente **vetor**) de A a B, e é denotado por $\overrightarrow{AB}$. Como o nome sugere, é uma grandeza vetorial com direção de A a B e magnitude igual à distância entre A e B. O vetor $\overrightarrow{AB}$ é representado por uma seta que vai de A a B, como mostrado na Figura 3.3. O ponto A é chamado **origem** (ou ponto inicial) do vetor, e B é a **extremidade** (ou ponto final) de $\overrightarrow{AB}$. A magnitude de um vetor geométrico $\overrightarrow{AB}$ é chamada **comprimento** e é denotada por $\|\overrightarrow{AB}\|$.

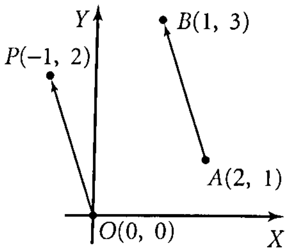


Figura 3.4

Ao longo deste capítulo, os vetores irão aparecer tanto em duas quanto em três dimensões. Em geral, vamos discutir o caso tridimensional, mas ambas as situações são análogas.

Dois vetores podem ser o mesmo embora tenham origens e extremidades diferentes. Por exemplo, $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OP}$ na Figura 3.4 porque eles têm o mesmo comprimento e a mesma direção (ambos se dirigem uma unidade para a esquerda e duas para cima).[2] Assim, o mesmo vetor pode mudar de uma posição para outra, por meio de uma translação. O que importa é que o comprimento e a direção permaneçam os mesmos, e não onde as origens e as extremidades estão localizadas. Por essa razão, freqüentemente denotaremos os vetores por $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$ etc. não fazendo referência às origens ou às extremidades.

3.1.3 Representação Matricial de um Vetor

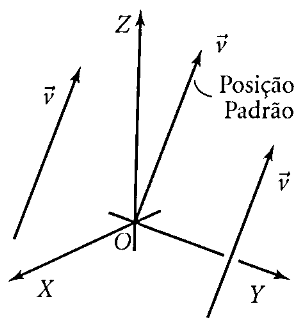


Figura 3.5

Um vetor $\vec{v}$ pode ter qualquer ponto como origem, como ilustrado na Figura 3.5. Em particular, dizemos que $\vec{v}$ está na **posição padrão** se seu ponto inicial coincidir com a origem O do sistema de coordenadas. Então $\vec{v} = \overrightarrow{OP}$ como na Figura 3.6 em que o ponto $P(x,\ y,\ z)$ é a extremidade do vetor, determinado de modo único. Escrevemos $\vec{v}$ como a matriz 3×1[3]

$$\vec{v} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = [x \quad y \quad z]^T.$$

Nesse caso dizemos que $\vec{v}$ está escrito[4] na **forma matricial**, que x, y e z são as **componentes** (ou também **coordenadas**) de $\vec{v}$ e que $\vec{v}$ é o **vetor posição** do ponto $P = P(x,\ y,\ z)$. Dessa forma, todo vetor $\vec{v}$ é o vetor posição de algum ponto P (unicamente determinado) e as coordenadas de P são as mesmas que as componentes do vetor $\vec{v}$. Além disso, todo ponto P *determina* um vetor $\vec{v} = \overrightarrow{OP}$.

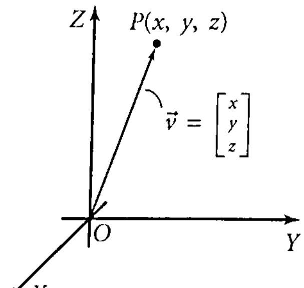


Figura 3.6

Da mesma maneira, um vetor bidimensional $\vec{v}$ tem a forma matricial $\vec{v} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ em que $\vec{v}$ é o vetor posição de $P = P(x,\ y)$. Assim, por exemplo, o vetor $\vec{v} = \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OP}$ na Figura 3.4 tem forma matricial $\vec{v} = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix}$.

Como podemos escrever vetores na forma matricial, podemos falar de somas e múltiplos escalares de vetores. Isso nos dá uma ferramenta muito poderosa porque essas operações com matrizes têm significados geométricos naturais. Em particular, cálculos geométricos podem ser feitos facilmente usando álgebra matricial. Esse método é chamado **geometria vetorial**, e seu estudo é o tema principal deste capítulo.

[2] Frações são outro exemplo em que quantidades podem ser a mesma mas parecem diferentes: $\frac{6}{9}$ e $\frac{14}{21}$ certamente parecem diferentes, mas são números iguais (de fato, ambos iguais a $\frac{2}{3}$).

[3] Como um vetor $\vec{v}$ é uma matriz, deveria ser denotado (como na Seção 1.1) por uma letra maiúscula, digamos $\vec{v} = V$. Entretanto, a notação $\vec{v}$ para vetores é padrão, e consistente com a notação $\overrightarrow{AB}$.

[4] A notação mais compacta $[x \quad y \quad z]^T$ é usada por conveniência na imp...

Sejam $\vec{v} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = [x \;\; y \;\; z]^T$ e $\vec{w} = \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{bmatrix} = [x_1 \;\; y_1 \;\; z_1]^T$ vetores e seja a um escalar. Definimos o **vetor nulo** $\vec{0}$, o **oposto** $-\vec{v}$, a **soma** $\vec{v} + \vec{w}$ e a **multiplicação por escalar** $a\vec{v}$ como sendo as matrizes:

$$\vec{0} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \qquad -\vec{v} = \begin{bmatrix} -x \\ -y \\ -z \end{bmatrix}, \qquad \vec{v} + \vec{w} = \begin{bmatrix} x+x_1 \\ y+y_1 \\ z+z_1 \end{bmatrix}, \qquad a\vec{v} = \begin{bmatrix} ax \\ ay \\ az \end{bmatrix}$$

Por serem operações matriciais, a adição de vetores e a multiplicação por escalar obedecem às regras básicas da aritmética matricial (Teoremas 1 e 2 da Seção 1.1). Repetimos aqui por conveniência: se $\vec{u}$, $\vec{v}$ e $\vec{w}$ são vetores (bi ou) tridimensionais, e se a e b são escalares, temos:

$$\begin{aligned} \vec{u} + \vec{v} &= \vec{v} + \vec{u} & (a + b)\vec{v} &= a\vec{v} + b\vec{v} \\ \vec{u} + (\vec{v} + \vec{w}) &= (\vec{u} + \vec{v}) + \vec{w} & a(\vec{u} + \vec{v}) &= a\vec{u} + a\vec{v} \\ \vec{0} + \vec{v} &= \vec{v} & a(b\vec{v}) &= (ab)\vec{v} \\ \vec{v} + (-\vec{v}) &= \vec{0} & 1\vec{v} &= \vec{v} \end{aligned}$$

No que segue, usaremos essas propriedades sem comentários. Elas são úteis para fazer cálculos geométricos porque, como mencionado anteriormente, as operações matriciais têm interpretações geométricas simples. Na verdade, o ponto de vista da geometria vetorial é o seguinte: se desejar encontrar um ponto $P(x,\ y,\ z)$, em vez disso, encontre seu vetor posição $\vec{p} = [x \;\; y \;\; z]^T$. Isso nos permite trazer todo o poder da álgebra matricial para enfrentar o problema geométrico. Assim sendo, o restante desta seção será dedicado a esclarecer o significado geométrico dessas operações matriciais.

3.1.4 Descrições Geométricas

Vamos descrever somas e multiplicações por escalar de vetores apenas em termos do comprimento e direção dos vetores envolvidos. Tais descrições são chamadas **intrínsecas** porque elas independem do sistema de coordenadas, um fato que é muito importante nas aplicações (elas são, na verdade, as definições originais das operações com vetores em física). Além disso, daremos outras traduções úteis entre a linguagem geométrica e a matricial.

Começamos com as descrições intrínsecas da igualdade de vetor, do vetor nulo, e do oposto de um vetor. Elas derivam do teorema a seguir. O teorema também contém dois resultados importantes sobre magnitude de um vetor $\vec{v}$, dos quais a fórmula na parte (2) para calcular a magnitude de $\|\vec{v}\|$ a partir das coordenadas de $\vec{v}$ não é o menos importante. Lembre-se que o valor absoluto de um número a é denotado por $|a|$.

TEOREMA 11 Sejam $\vec{v} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$ e $\vec{w} = \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{bmatrix}$ vetores.

(1) $\vec{v} = \vec{w}$ como vetores se, e somente se, $x = x_1$, $y = y_1$ e $z = z_1$.
(2) $\|\vec{v}\| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$.[5]
(3) $\vec{v} = \vec{0}$ se, e somente se, $\|\vec{v}\| = 0$.
(4) $\|a\vec{v}\| = |a|\,\|\vec{v}\|$ para qualquer escalar a.

DEMONSTRAÇÃO

(1) Se $\vec{v}$ e $\vec{w}$ estão posicionados com seus pontos iniciais na origem do sistema como na Figura 3.7, as extremidades de $\vec{v}$ e $\vec{w}$ são os pontos $P(x,\ y,\ z)$ e $P_1(x_1,\ y_1,\ z_1)$, respectivamente. É claro, pela Figura 3.7, que $\vec{v} = \vec{w}$ (mesmo comprimento e direção) se, e somente se, P e P_1 são pontos iguais, isto é, se, e somente se, $x = x_1$, $y = y_1$ e $z = z_1$.

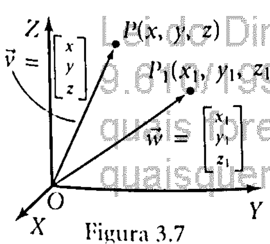


Figura 3.7

[5] Ao longo deste livro, $\sqrt{a}$ significa a raiz quadrada *positiva* de a.

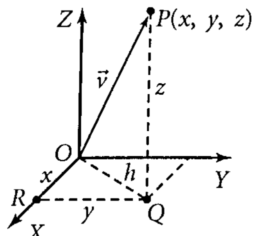


Figura 3.8

(2) Temos $\vec{v} = \overrightarrow{OP}$ como na Figura 3.8, em que $P = P(x, y, z)$. Como OQP é um triângulo retângulo, o Teorema de Pitágoras[6] fornece $\|\vec{v}\|^2 = h^2 + z^2$, e também $x^2 + y^2 = h^2$ quando aplicado ao triângulo retângulo ORQ. Então (2) é conseqüência da eliminação de h^2.

(3) Como $\vec{0} = \overrightarrow{OO}$ é o vetor posição da origem do sistema, é claro que $\|\vec{0}\| = 0$. Reciprocamente, se $\|\vec{v}\| = 0$ para algum vetor $\vec{v} = [x \;\; y \;\; z]^T$, então $\sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = 0$ por (2). Logo, $x = y = z = 0$ e, portanto, $\vec{v} = \vec{0}$.

(4) Se $\vec{v} = [x \;\; y \;\; z]^T$, então $a\vec{v} = [ax \;\; ay \;\; az]^T$ por definição. Logo, (2) fornece

$$\|a\vec{v}\|^2 = (ax)^2 + (ay)^2 + (az)^2 = a^2(x^2 + y^2 + z^2) = a^2\|\vec{v}\|^2.$$

A expressão (4) é conseqüência da extração das raízes quadradas positivas dos dois lados porque $\sqrt{a^2} = |a|$.

Exemplo 1 Se $\vec{v} = \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}$ e $\vec{w} = \begin{bmatrix} 4 \\ -3 \end{bmatrix}$, então $\|\vec{v}\| = \sqrt{3^2 + (-1)^2 + 2^2} = \sqrt{14}$ e

$\|\vec{w}\| = \sqrt{4^2 + (-3)^2} = \sqrt{25} = 5$.

Nossa definição de igualdade de vetores é intrínseca (mesmo comprimento e mesma direção) e a parte (1) do Teorema 1 mostra que ela é consistente com a igualdade de matrizes:

Igualdade de Vetores. Dois vetores são iguais como vetores (igualdade intrínseca) se, e somente se, eles são iguais como matrizes.

A parte (3) do Teorema 1 mostra que o vetor nulo tem uma descrição intrínseca:

Vetor Nulo. $\vec{0}$ é o único vetor de comprimento zero. Observe que, como $\vec{0}$ tem comprimento zero, não faz sentido falar na direção do vetor nulo.

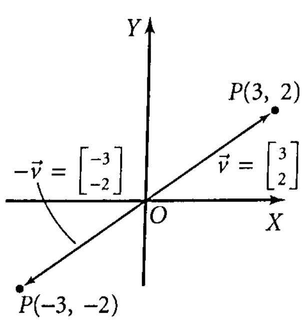


Figura 3.9

Podemos também dar uma descrição intrínseca do oposto de um vetor $\vec{v}$. Sabemos que $-\vec{v} = (-1)\vec{v}$. Logo, pelo Teorema 1, $\|-\vec{v}\| = |-1|\,\|\vec{v}\| = \|\vec{v}\|$. Daí $\vec{v}$ e $-\vec{v}$ têm o mesmo comprimento. Além disso, se $\vec{v} = \overrightarrow{OP}$ então $-\vec{v} = \overrightarrow{PO}$ (ver Figura 3.9 para o caso bidimensional) e, portanto, $-\vec{v}$ tem direção oposta à direção de $\vec{v}$. Daí:

Oposto de um Vetor. Se $\vec{v}$ é um vetor, então $-\vec{v}$ é o vetor com o mesmo comprimento que $\vec{v}$, mas com direção oposta.

3.1.5 Adição de Vetores

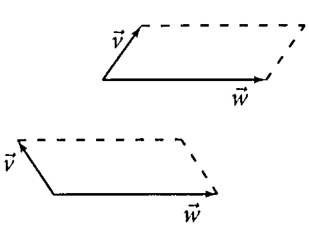


Figura 3.10

Se dois vetores $\vec{v}$ e $\vec{w}$ estão posicionados de modo que suas origens coincidam, eles determinam um paralelogramo,[7] chamado paralelogramo **determinado** por $\vec{v}$ e $\vec{w}$. Duas ilustrações disso são mostradas na Figura 3.10. Como esse paralelogramo é completamente determinado pelos comprimentos e direções de $\vec{v}$ e $\vec{w}$, a seguinte "regra" fornece uma descrição intrínseca da soma $\vec{v} + \vec{w}$.

Regra do Paralelogramo para a Adição de Vetores. No paralelogramo determinado por dois vetores $\vec{v}$ e $\vec{w}$, o vetor $\vec{v} + \vec{w}$ é a diagonal que contém o ponto inicial comum de $\vec{v}$ e $\vec{w}$ (ver Figura 3.11).

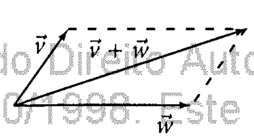


Figura 3.11

[6] O Teorema de Pitágoras afirma que se a e b são lados de um triângulo retângulo com hipotenusa h, então $a^2 + b^2 = h^2$. Uma demonstração é dada no final desta seção.

[7] Um **paralelogramo** é um polígono de quatro lados que tem lados opostos paralelos e de igual comprimento. Em particular, um retângulo é um paralelogramo cujos ângulos internos são retos.

Podemos supor que $\vec{v}$ e $\vec{w}$ estão na posição padrão já que os paralelogramos que eles determinam são translações uns dos outros, para qualquer escolha do ponto inicial comum. Verifiquemos a regra do paralelogramo no caso bidimensional; o caso tridimensional é análogo. Escreva

$\vec{v} = \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix}$ e $\vec{w} = \begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \end{bmatrix}$, de modo que $\vec{v} + \vec{w} = \begin{bmatrix} x_1 + x_2 \\ y_1 + y_2 \end{bmatrix}$. Então as extremidades de $\vec{v}$, $\vec{w}$ e $\vec{v} + \vec{w}$ são, respectivamente, $P_1(x_1, y_1)$, $P_2(x_2, y_2)$ e $P(x_1 + x_2, y_1 + y_2)$, mostrados na Figura 3.12. Devemos verificar que o polígono OP_1PP_2 é um paralelogramo. Mas isso segue do fato que os triângulos retângulos OAP_1 e P_2BP na Figura 3.12 são congruentes (pelo caso LAL). De fato, ambos têm lados verticais e horizontais de comprimentos $|y_1|$ e $|x_1|$, respectivamente. (A Figura 3.12 ilustra a situação em que x_1 e y_1 são positivos.) Isso prova a regra do paralelogramo.

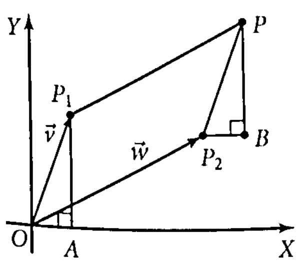


Figura 3.12

Observamos de passagem que a regra do paralelogramo para adição de vetores pode ser provada experimentalmente para vetores não geométricos como velocidade e força. Por isso é uma ferramenta importante em física.

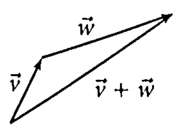


Figura 3.13

A regra do paralelogramo fornece uma descrição intrínseca da soma $\vec{v} + \vec{w}$ por dar o comprimento e direção de $\vec{v} + \vec{w}$ em termos do paralelogramo determinado por $\vec{v}$ e $\vec{w}$. Entretanto há uma outra maneira de olhar o vetor adição, que é mais conveniente do que a regra do paralelogramo na maioria das situações, e muito útil nas aplicações. Ela é descrita como segue:

Método Alternativo para a Adição de Vetores. Dados dois vetores $\vec{v}$ e $\vec{w}$, coloque a origem de $\vec{w}$ na extremidade de $\vec{v}$ como na Figura 3.13. Então, $\vec{v} + \vec{w}$ é o vetor que liga a origem de $\vec{v}$ na extremidade de $\vec{w}$.

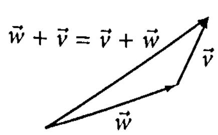


Figura 3.14

Isso pode ser descrito como o método "primeiro $\vec{v}$ depois $\vec{w}$" de calcular $\vec{v} + \vec{w}$, e de fato fornece $\vec{v} + \vec{w}$ porque o diagrama na Figura 3.13 é a "metade de cima" do paralelogramo determinado por $\vec{v}$ e $\vec{w}$. É claro que esses vetores também poderiam ser somados fazendo "primeiro $\vec{w}$ depois $\vec{v}$" para obter $\vec{w} + \vec{v} = \vec{v} + \vec{w}$, como na Figura 3.14.

Contudo, o fato mais importante é que dois (ou mais) vetores podem ser somados graficamente colocando-os em uma seqüência "origem de um na extremidade do outro". Isso é ilustrado para três vetores na Figura 3.15 e fornece uma "imagem" bastante útil da soma de vários vetores em seqüência.

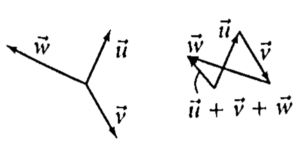


Figura 3.15

Exemplo 2 Encontre o resultado final de uma caminhada de 1 km na direção nordeste mais 1 km na direção leste.

SOLUÇÃO Denote por $\vec{w}_1$ e $\vec{w}_2$ as caminhadas para nordeste e para leste, respectivamente. Se primeiro for feita a caminhada $\vec{w}_1$ e depois $\vec{w}_2$, o resultado será $\vec{w}_1 + \vec{w}_2$, como no primeiro diagrama da Figura 3.16. No entanto, se $\vec{w}_2$ for feita primeiro, o resultado é $\vec{w}_2 + \vec{w}_1$ como no segundo diagrama. O resultado final é a caminhada $\vec{w}_1 + \vec{w}_2 = \vec{w}_2 + \vec{w}_1$.

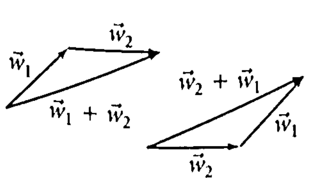


Figura 3.16

O método alternativo da adição de vetores toma uma forma fácil de ser lembrada quando usado com a notação $\overrightarrow{AB}$ nos vetores geométricos. De fato, se A, B e C são pontos, ele afirma que

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$$

Assim, com essa notação, a adição de vetores torna-se uma questão de "seguir as letras", como ilustrado na Figura 3.17. Eis uma ilustração de como isso pode ser usado em geometria.

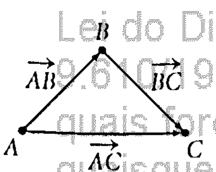


Figura 3.17

Exemplo 3 Mostre que as diagonais de um paralelogramo qualquer se interceptam no ponto médio de cada uma.

SOLUÇÃO Sejam A, B, C e D os quatro vértices do paralelogramo, em ordem, como na Figura 3.18, e seja M o ponto médio da diagonal AC. Devemos provar que M é também ponto médio da diagonal BD. Para fazer isso, é suficiente mostrar que $\overrightarrow{BM} = \overrightarrow{MD}$, pois o fato desses vetores terem a mesma direção mostra que M está *sobre* a diagonal BD; o fato que eles têm o mesmo comprimento mostra que M é o *ponto médio* de BD.

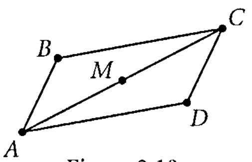


Figura 3.18

Observe agora que $\overrightarrow{BA} = \overrightarrow{CD}$ porque $ABCD$ é um paralelogramo, e $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{MC}$ porque M é o ponto médio de AC. Então o método alternativo de adição de vetores (usado duas vezes) fornece

$$\overrightarrow{BM} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AM} = \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{MC} = \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{MD}.$$

Isso é o que queríamos.

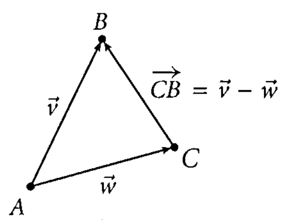


Figura 3.19

Há uma maneira geométrica simples de visualizar a **diferença** $\vec{v} - \vec{w}$ de dois vetores $\vec{v}$ e $\vec{w}$. Posicione $\vec{v}$ e $\vec{w}$ com uma origem comum A como na Figura 3.19, e sejam B e C as respectivas extremidades. O método alternativo da adição fornece $\vec{w} + \overrightarrow{CB} = \vec{v}$, logo $\overrightarrow{CB} = \vec{v} - \vec{w}$. Assim, obtemos uma descrição intrínseca da subtração de vetores.

Subtração de Vetores. $\vec{v} - \vec{w}$ é o vetor que vai da extremidade de $\vec{w}$ até a extremidade de $\vec{v}$.

Assim, no paralelogramo determinado por $\vec{v}$ e $\vec{w}$, ambos $\vec{v} - \vec{w}$ e $\vec{v} + \vec{w}$ aparecem como diagonais (Figura 3.20).

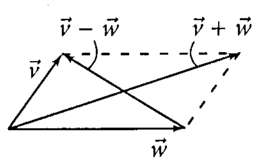


Figura 3.20

Uma das razões da importância da subtração de vetores é que ela fornece uma maneira simples de encontrar, na forma de matriz, o vetor que liga um ponto a outro. Esse fato aparece no teorema a seguir, junto com uma fórmula para a distância entre pontos.

TEOREMA 2 Sejam $P_1(x_1,\ y_1,\ z_1)$ e $P_2(x_2,\ y_2,\ z_2)$ dois pontos. Então:

(1) $\overrightarrow{P_1P_2} = \begin{bmatrix} x_2 - x_1 \\ y_2 - y_1 \\ z_2 - z_1 \end{bmatrix}$.

(2) A distância entre P_1 e P_2 é $\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$.

DEMONSTRAÇÃO (1) Escreva $\vec{p}_1 = \overrightarrow{OP_1}$ e $\vec{p}_2 = \overrightarrow{OP_2}$ como na Figura 3.21, de modo que $\vec{p}_1 = [x_1\ \ y_1\ \ z_1]^T$ e $\vec{p}_2 = [x_2\ \ y_2\ \ z_2]^T$. Então a discussão acima sobre subtração de vetores fornece

$\overrightarrow{P_1P_2} = \vec{p}_2 - \vec{p}_1 = [x_2 - x_1\ \ y_2 - y_1\ \ z_2 - z_1]^T$, como queríamos demonstrar.

(2) A distância é $\|\overrightarrow{P_1P_2}\| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$, usando (1) e o Teorema 1.

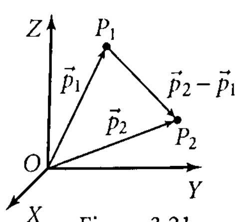


Figura 3.21

É claro que a versão bidimensional do Teorema 2 também é válida: se $P_1(x_1,\ y_1)$ e $P_2(x_2,\ y_2)$ são pontos, então $\overrightarrow{P_1P_2} = \begin{bmatrix} x_2 - x_1 \\ y_2 - y_1 \end{bmatrix}$, e a distância entre P_1 e P_2 é $\|\overrightarrow{P_1P_2}\| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$.

Exemplo 4 Dados os pontos $P_1(3,\ -1,\ 2)$ e $P_2(1,\ 2,\ 0)$, o vetor de P_1 até P_2 é

$$\overrightarrow{P_1P_2} = [1 - 3\quad 2 - (-1)\quad 0 - 2]^T = [-2\quad 3\quad -2]^T$$

e a distância entre P_1 e P_2 é $\|\overrightarrow{P_1P_2}\| = \sqrt{(-2)^2 + 3^2 + (-2)^2}$

$$= \sqrt{4 + 9 + 4} = \sqrt{17}.$$

3.1.6 Multiplicação por Escalar

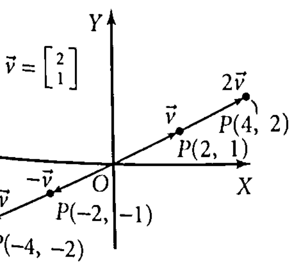


Figura 3.22

Como na adição de vetores, queremos dar uma descrição intrínseca da multiplicação por escalar $a\vec{v}$, descrevendo seu comprimento e sua direção em termos do escalar a e do comprimento e direção do vetor $\vec{v}$. O comprimento $\|a\vec{v}\| = |a|\,\|\vec{v}\|$ do vetor $a\vec{v}$ já foi determinado no Teorema 1. Para descrever a direção de $a\vec{v}$, precisamos apenas lidar com o caso $a\vec{v} \neq \vec{0}$ porque o vetor nulo $\vec{0}$ não tem direção. Assim, restringimos nossa atenção ao caso $a\vec{v} \neq \vec{0}$ na parte (2) do seguinte resultado.

Descrição Geométrica da Multiplicação por Escalar. Se a é um escalar e $\vec{v}$ é um vetor, então:

(1) O comprimento de $a\vec{v}$ é $\|a\vec{v}\| = |a|\,\|\vec{v}\|$.

(2) Se $a\vec{v} \neq \vec{0}$, a direção de $a\vec{v}$ é $\begin{cases} \text{a mesma que } \vec{v} \text{ se } a > 0; \\ \text{oposta à de } \vec{v} \text{ se } a < 0. \end{cases}$

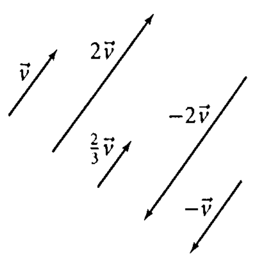


Figura 3.23

De fato, (1) é a parte (4) do Teorema 1. Para verificar (2), observe primeiramente que cada coordenada de $a\vec{v}$ é igual a a vezes a coordenada correspondente de $\vec{v}$. Se $a > 0$, isso significa que $a\vec{v}$ tem a mesma direção que $\vec{v}$, como ilustrado na Figura 3.22 para o vetor $\vec{v} = [2 \;\; 1]^T$. Se $a < 0$, escreva $b = -a$. Então $b > 0$ e, portanto, $b\vec{v}$ e $\vec{v}$ têm a mesma direção (pelo que acabamos de provar). Mas $a\vec{v} = -(b\vec{v})$, logo $a\vec{v}$ tem direção oposta à de $b\vec{v}$ e, portanto, oposta à de $\vec{v}$.

Essa descrição da multiplicação por escalar é ilustrada na Figura 3.23 em que vários múltiplos escalares de um vetor $\vec{v}$ são mostrados.

Damos dois exemplos que ilustram a utilidade, em geometria, da descrição geométrica da multiplicação por escalar acima. Lembre-se que o vetor posição de um ponto $P(x, y, z)$ é o vetor $\vec{p} = \overrightarrow{OP} = [x \;\; y \;\; z]^T$ da origem até P.

Exemplo 5 Encontre as coordenadas do ponto médio $M(x, y, z)$ do segmento PQ, sendo $P(3, -1, 5)$ e $Q(-1, 2, 3)$.

SOLUÇÃO Sejam $\vec{p} = [3 \;\; -1 \;\; 5]^T$, $\vec{q} = [-1 \;\; 2 \;\; 3]^T$, e $\vec{m} = [x \;\; y \;\; z]^T$ os vetores posição de P, Q e M, respectivamente, como na Figura 3.24. Encontramos o ponto M calculando seu vetor posição $\vec{m}$. Temos $\overrightarrow{PQ} = \vec{q} - \vec{p}$. Logo, como M é o ponto médio de PQ, obtemos $\overrightarrow{PM} = \frac{1}{2}\overrightarrow{PQ} = \frac{1}{2}(\vec{q} - \vec{p})$. Portanto,

$$\vec{m} = \overrightarrow{OM} = \vec{p} + \overrightarrow{PM} = \vec{p} + \tfrac{1}{2}(\vec{q} - \vec{p}) = \tfrac{1}{2}(\vec{p} + \vec{q}) = \tfrac{1}{2}\begin{bmatrix} 3-1 \\ -1+2 \\ 5+3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{1}{2} \\ 4 \end{bmatrix}.$$

Segue que $M = M(1, \frac{1}{2}, 4)$ é o ponto médio desejado.

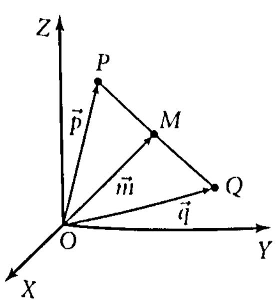


Figura 3.24

O método no Exemplo 5 funciona em geral: o vetor posição $\vec{m}$ do ponto médio de um segmento PQ *qualquer* é a média $\vec{m} = \frac{1}{2}(\vec{p} + \vec{q})$ dos vetores posição $\vec{p}$ e $\vec{q}$ dos dois pontos.

Exemplo 6 Um *quadrilátero* é uma figura poligonal com quatro lados e quatro vértices. Mostre que os pontos médios dos lados de qualquer quadrilátero são vértices de um paralelogramo.

SOLUÇÃO Sejam A, B, C e D os quatro vértices do quadrilátero, em ordem, e sejam E, F, G e H os pontos médios, como mostrado na Figura 3.25. É suficiente provar que $\overrightarrow{EF} = \overrightarrow{HG}$ já que, então, os lados correspondentes são paralelos (porque $\overrightarrow{EF}$ e $\overrightarrow{HG}$ têm a mesma direção) e de mesmo comprimento (porque $\|\overrightarrow{EF}\| = \|\overrightarrow{HG}\|$).

Observe agora que $\overrightarrow{EB} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$ porque E é o ponto médio de AB e, analogamente, $\overrightarrow{BF} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$. Assim, a adição de vetores fornece

$$\overrightarrow{EF} = \overrightarrow{EB} + \overrightarrow{BF} = \tfrac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \tfrac{1}{2}\overrightarrow{BC} = \tfrac{1}{2}\left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}\right) = \tfrac{1}{2}\overrightarrow{AC}.$$

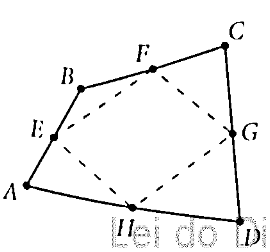


Figura 3.25

Um argumento similar mostra que $\overrightarrow{HG} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$ também. Logo, $\overrightarrow{EF} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{HG}$, como pedido.

A noção de paralelismo tem sido, por séculos, um conceito central em geometria. Definimos esse conceito em termos de vetores da seguinte maneira: dois vetores não nulos são ditos **paralelos** se eles têm a mesma direção ou direções opostas. Concluímos esta seção mostrando uma importante conexão entre vetores paralelos e a multiplicação por escalar.

TEOREMA 3 As seguintes condições são equivalentes para vetores não nulos $\vec{v}$ e $\vec{w}$:

(1) $\vec{v}$ e $\vec{w}$ são paralelos.

(2) Cada um dos vetores $\vec{v}$ e $\vec{w}$ é múltiplo escalar do outro.

(3) Um dos vetores $\vec{v}$ ou $\vec{w}$ é múltiplo escalar do outro.

DEMONSTRAÇÃO A implicação (2)⇒(3) é óbvia e (3)⇒(1) vale, pela Parte (2) da definição geométrica de multiplicação por escalar. Logo, mostraremos que (1)⇒(2). Suponhamos que $\vec{v}$ e $\vec{w}$ sejam paralelos. Há dois casos:

Caso 1. *$\vec{v}$ e $\vec{w}$ têm a mesma direção.* Nesse caso, mostraremos que $\vec{v} = t\vec{w}$ com $t = \frac{\|\vec{v}\|}{\|\vec{w}\|}$. (Então $\vec{w} = \frac{1}{t}\vec{v}$.) De fato, se t é positivo, $\vec{v}$ e $t\vec{w}$ têm a mesma direção (a direção comum entre $\vec{v}$ e $\vec{w}$). Além disso, o Teorema 1 fornece $\|t\vec{w}\| = |t|\,\|\vec{w}\| = t\,\|\vec{w}\| = \|\vec{v}\|$ e, portanto, $\vec{v}$ e $t\vec{w}$ também têm o mesmo comprimento. Logo, $\vec{v} = t\vec{w}$ como queríamos demonstrar.

Caso 2. *$\vec{v}$ e $\vec{w}$ têm direções opostas.* Nesse caso, $\vec{v} = -t\vec{w}$ em que $t = \frac{\|\vec{v}\|}{\|\vec{w}\|}$. Os detalhes (análogos aos do Caso 1) são deixados para você.

Exemplo 7 Mostre que $\vec{v} = [7 \quad -28 \quad 35]^T$ e $\vec{w} = [-5 \quad 20 \quad -25]^T$ são paralelos, enquanto $\vec{u} = [2 \quad -3 \quad 6]^T$ e $\vec{z} = [1 \quad -2 \quad 3]^T$ não são paralelos.

SOLUÇÃO Temos que $\vec{v} = -\frac{7}{5}\vec{w}$, logo $\vec{v}$ e $\vec{w}$ são paralelos (e têm direções opostas). Se $\vec{u}$ e $\vec{z}$ fossem paralelos, então cada um seria um múltiplo escalar do outro, digamos $\vec{u} = t\vec{z}$ para algum escalar t. Comparando as coordenadas, obtemos $2 = t, -3 = -2t$, e $6 = 3t$. É claro que tal número t não existe. Assim, $\vec{u}$ e $\vec{z}$ não são paralelos.

3.17 Uma Demonstração do Teorema de Pitágoras

Pitágoras (550 a.C.) fundou uma escola semi-religiosa cujo lema era "Tudo é número". Seus estudos eram chamados *mathema* ("o que se aprende") e consistiam de música, astronomia, geometria e aritmética. O Teorema de Pitágoras era conhecido e usado anteriormente, mas a Pitágoras é creditado ter sido o primeiro a dar uma demonstração lógica e dedutiva do resultado. Várias demonstrações do Teorema de Pitágoras são conhecidas; a que vamos dar usa propriedades básicas de semelhança de triângulos.

TEOREMA 4 **Teorema de Pitágoras.** Dado um triângulo retângulo com hipotenusa h e catetos a e b, então

$$a^2 + b^2 = h^2.$$

DEMONSTRAÇÃO Suponha que o triângulo tenha vértices A, B e C, com ângulo reto em A, como na Figura 3.26. Desenhe uma perpendicular de A até o ponto D na hipotenusa e sejam p e q os comprimentos de BD e DC, respectivamente. Então os triângulos ABC e DBA são semelhantes (pelo caso AA de semelhança de triângulos) e, portanto, $\frac{p}{a} = \frac{a}{h}$. Isso significa que $a^2 = ph$. Da mesma maneira, a semelhança de ABC e DAC fornece $\frac{q}{b} = \frac{b}{h}$, e, conseqüentemente, $b^2 = qh$. Mas, então,

$$a^2 + b^2 = ph + qh = (p+q)h = h^2$$

pois $p + q = h$. Isso prova o Teorema de Pitágoras.

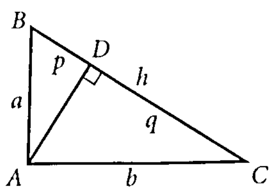


Figura 3.26

Exercícios 3.1

1. Considere os pontos $P(6,\ 7)$ e $Q(-12,\ 3)$ no plano XY.

a) Localize esses dois pontos. Explique qual é a diferença entre eles e os pontos $P'(7,\ 6)$ e $Q'(3,\ -12)$.

b) Forme o vetor $\overrightarrow{PQ}$ do ponto P ao ponto Q. Explique como ele difere do vetor $\overrightarrow{QP}$ do ponto Q ao ponto P.

c) Faça uma translação do vetor $\overrightarrow{PQ}$ para a posição padrão e dê as coordenadas do ponto na extremidade, as componentes do vetor e sua forma matricial.

d) Encontre o comprimento do vetor $\overrightarrow{PQ}$. Qual é a conexão com a distância entre os dois pontos P e Q?

e) Repita **c)** e **d)** para os novos pontos $P(2,\ -1,\ 4)$ e $Q(-8,\ -7,\ 3)$ no espaço tridimensional XYZ.

2. Considere os pontos $P(3,\ -2)$ e $Q(-1,\ 6)$ no plano XY.

a) Represente os vetores posição $\vec{p}$ e $\vec{q}$ of P de P e Q na forma de matriz e calcule seus comprimentos.

b) Desenhe e determine as formas de matriz e comprimentos dos vetores $\vec{p}+\vec{q}$, $\vec{p}-\vec{q}$, $3\vec{p}$, $-2\vec{q}$ e $3\vec{p}-2\vec{q}$.

c) Repita as questões anteriores com os novos pontos $P(4,\ 1,\ -3)$ e $Q(-2,\ 4,\ -8)$ do espaço tridimensional XYZ.

3. Em cada caso, calcule $\overrightarrow{PQ}$ e $\|\overrightarrow{PQ}\|$.

a) $P(2,\ -1,\ 3)$ e $Q(0,\ 1,\ 1)$

b) $P(0,\ 2,\ -3)$ e $Q(4,\ -1,\ 2)$

c) $P(2,\ 0,\ -5)$ e $Q(0,\ 5,\ 7)$

d) $P(1,\ 2,\ 3)$ e $Q(3,\ 2,\ 1)$

4. a) Dado o ponto $P(3,\ -2,\ 1)$, encontre o ponto Q tal que $\overrightarrow{PQ} = [-1\ \ 2\ \ 5]^T$.

b) Dado o ponto $Q(0,\ -1,\ 3)$, encontre o ponto P tal que $\overrightarrow{PQ} = [3\ \ 0\ \ -2]^T$.

5. Sejam $\vec{u} = [2\ \ -1\ \ 3]^T$, $\vec{v} = [0\ \ 2\ \ -3]^T$, e $\vec{w} = [-5\ \ 1\ \ 2]^T$. Calcule:

a) $3\vec{u} - 5\vec{v} + 7\vec{w}$ **b)** $7\vec{u} + 2\vec{v} - 5\vec{w}$

c) $\|3\vec{u} - \frac{1}{2}\vec{v} + \vec{w}\|$ **d)** $\|\frac{1}{2}(\vec{u} + \vec{v} + 2\vec{w})\|$

6. a) Encontre um vetor $\vec{u}$ de comprimento 1 que tenha a mesma direção que $\vec{v} = [3\ \ -1\ \ 2]^T$.

b) Se $\vec{v} \neq \vec{0}$, mostre que $\vec{u} = \frac{1}{\|\vec{v}\|}\vec{v}$ é um vetor de comprimento 1 na mesma direção que $\vec{v}$.

7. Em cada caso, simplifique a expressão:

a) $3(2\vec{w} - 2\vec{u} - \vec{v}) - 2(\vec{u} + \vec{w} - 5\vec{v}) + 2(4\vec{u} + 4\vec{v} - 2\vec{w})$

b) $5(\vec{u} - \vec{v} - 2\vec{w}) + 3(2\vec{v} + 3\vec{w} - 3\vec{u}) - 2(3\vec{u} + \vec{v} + 8\vec{w})$

8. Sejam $\vec{u} = [-2\ \ 3\ \ -5]^T$ e $\vec{v} = [1\ \ -2\ \ 2]^T$. Em cada caso, encontre o vetor $\vec{x}$.

a) $3\vec{u} - 5\vec{x} = \frac{3}{2}(4\vec{x} - \vec{v})$

b) $3\vec{x} - \|\vec{v}\|\vec{x} = 5(\vec{u} - 3\vec{x})$

c) $2\vec{x} - 3\vec{v} = \|\vec{u}\|^2(\vec{u} + 4\vec{x})$

d) $4(5\vec{x} - 2\vec{u}) = 3(5\vec{v} + 6\vec{x})$

9. Sejam $\vec{u} = [2\ \ -1\ \ 3]^T$, $\vec{v} = [0\ \ 2\ \ -3]^T$ e $\vec{w} = [6\ \ 1\ \ 3]^T$. Em cada caso, determine se existem ou não números a, b e c tais que $\vec{x} = a\vec{u} + b\vec{v} + c\vec{w}$. Justifique sua resposta.

a) $\vec{x} = [1\ \ 0\ \ 0]^T$ **b)** $\vec{x} = [2\ \ -1\ \ 3]^T$

c) $\vec{x} = [9\ \ 3\ \ 0]^T$ **d)** $\vec{x} = [1\ \ 0\ \ 1]^T$

10. Em cada caso, determine se $\vec{v}$ e $\vec{w}$ são paralelos. Justifique sua resposta.

a) $\vec{u} = [10\ \ -15\ \ 25]^T$ e $\vec{v} = [14\ \ -21\ \ 35]^T$

b) $\vec{u} = [3\ \ -2\ \ 1]^T$ e $\vec{v} = [-6\ \ 4\ \ -2]^T$

c) $\vec{u} = [2\ \ 3\ \ -5]^T$ e $\vec{v} = [-8\ \ 12\ \ 20]^T$

d) $\vec{u} = [-3\ \ 5\ \ 7]^T$ e $\vec{v} = [6\ \ -10\ \ 0]^T$

11. Encontre todos os vetores $\vec{u}$ que são paralelos a $\vec{v} = [3\ \ 5\ \ -1]^T$ e satisfazem $\|\vec{u}\| = 3\|\vec{v}\|$.

12. Em cada caso, encontre todos os pontos Q a uma distância 5 de P e tal que $\overrightarrow{PQ}$ seja paralelo a $\vec{d}$.

a) $P = P(5,\ 0,\ -3)$, $\vec{d} = [1\ \ 2\ \ -2]^T$

b) $P = P(1,\ 2,\ -5)$, $\vec{d} = [0\ \ -3\ \ 2]^T$

13. Em cada caso, P, Q e R são três vértices de um paralelogramo $PQRS$. Encontre o outro vértice S.

a) $P(3,\ -1,\ -1)$, $Q(1,\ -2,\ 0)$, $R(1,\ -1,\ 2)$

b) $P(2,\ 0,\ -1)$, $Q(-2,\ 4,\ 1)$, $R(3,\ -1,\ 0)$

14. Em cada caso, encontre o ponto médio do segmento PQ, sendo dados:

a) $P(2,\ -3,\ 5)$, $Q(-1,\ 7,\ -3)$;

b) $P(1,\ 2,\ 3)$, $Q(-3,\ 5,\ -3)$.

15. Dados $P(1,\ 1,\ 3)$ e $Q(0,\ -3,\ 5)$, encontre:

a) o ponto A que está a $\frac{1}{3}$ do caminho (em linha reta) de P a Q;

b) o ponto B que está a $\frac{1}{4}$ do caminho (em linha reta) de Q a P.

16. Sejam P e Q dois pontos com vetor posição $\vec{p}$ e $\vec{q}$, respectivamente. Se $0 \le r \le 1$, mostre que o ponto A que está a uma fração r do caminho (em linha reta) de P a Q tem vetor posição $\vec{a} = (1-r)\vec{p} + r\vec{q}$.

17. Em cada caso, ou demonstre que a afirmação é verdadeira ou dê um exemplo mostrando que ela é falsa. Por todo o exercício, $\vec{u}$, $\vec{v}$ e $\vec{w}$ denotam vetores.

a) O vetor nulo $\vec{0}$ é o único vetor de comprimento 0.

b) Se $\|\vec{v} - \vec{w}\| = \vec{0}$, então $\vec{v} = \vec{w}$.

c) Se $\vec{v} = -\vec{v}$, então $\vec{v} = \vec{0}$.

d) Se $\|\vec{v}\| = \|\vec{w}\|$, então $\vec{v} = \vec{w}$.

e) Se $\|\vec{v}\| = \|\vec{w}\|$, então $\vec{v} = \pm\vec{w}$.

f) Se $\vec{w} = t\,\vec{v}$ para algum escalar t, então $\vec{v}$ e $\vec{w}$ têm a mesma direção.

g) Se $\vec{v}$ e $\vec{v} + \vec{w}$ são paralelos, então $\vec{v}$ e $\vec{w}$ são paralelos.

h) $\|(-5)\vec{v}\| = -5\|\vec{v}\|$ para todo $\vec{v}$.

i) Se $\|\vec{v}\| = \|2\vec{v}\|$, então $\vec{v} = \vec{0}$.

j) $\|\vec{v} + \vec{w}\| = \|\vec{v}\| + \|\vec{w}\|$ para todo $\vec{v}$ e $\vec{w}$.

18. Considere um triângulo com vértices A, B e C, e sejam E e F os pontos médios dos lados AB e BC.

a) Explique por que $\overrightarrow{EB} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{BF} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$.

b) Mostre que o segmento de reta que liga E a F é paralelo a AC e tem metade de seu comprimento.

19. Considere um triângulo de vértices A, B e C sendo $A = A(1,\ 0,\ 0)$ e $\overrightarrow{AC} = [2\ \ 0\ \ 1]^T$, $\overrightarrow{BC}$ paralelo ao eixo Y e $\|\overrightarrow{AB}\| = 3$; encontre todas as possibilidades para B.

20. Sejam A, B, C, D, E e F os seis vértices, em ordem, de um hexágono regular. Mostre que

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AE} + \overrightarrow{AF} = 3\overrightarrow{AD}.$$

21. Seja $P = P(x,\ y)$ um ponto arbitrário do plano com vetor posição $\vec{p} = [x \quad y]^T$. Denote por $\mathcal{C}$ a circunferência de centro na origem e raio $r > 0$.

a) Se P está sobre a circunferência $\mathcal{C}$, explique geometricamente por que $\|\vec{p}\| = r$.

b) Se $\|\vec{p}\| = r$, explique geometricamente por que P está sobre a circunferência $\mathcal{C}$.

c) Use **a)** e **b)** para mostrar que a equação da circunferência $\mathcal{C}$ é $x^2 + y^2 = r^2$.

22. Seja $P = P(x,\ y,\ z)$ um ponto arbitrário do espaço com vetor posição $\vec{p} = [x \quad y \quad z]^T$. Denote por $\mathcal{S}$ a esfera de centro na origem e raio $r > 0$.

a) Se P está sobre a esfera $\mathcal{S}$, explique geometricamente por que $\|\vec{p}\| = r$.

b) Se $\|\vec{p}\| = r$, explique geometricamente por que P está sobre a esfera $\mathcal{S}$.

c) Use **a)** e **b)** para mostrar que a equação da esfera $\mathcal{S}$ é $x^2 + y^2 + z^2 = r^2$.

3.2 PRODUTO ESCALAR E PROJEÇÕES

O conceito de perpendicularismo é fundamental em geometria. É necessário no enunciado do Teorema de Pitágoras e é básico no estudo de trigonometria. Para usarmos vetores para estudar perpendicularismo, desenvolvemos um teste simples para saber quando dois vetores não nulos têm direções ortogonais. O teste consiste em saber se um certo número (chamado produto escalar dos dois vetores) é igual a zero ou não. Como quase sempre acontece com uma boa idéia, o produto escalar tem outras aplicações: ele pode ser usado para encontrar o ângulo entre qualquer par de vetores não nulos, e conduz a um método de resolução de certos problemas de otimização em geometria. Por exemplo, vamos (na Seção 3.3) poder encontrar o ponto sobre um plano que está mais próximo de um ponto arbitrário.

3.2.1 O Produto Escalar

Dados dois vetores $\vec{v}$ e $\vec{w}$, como eles são matrizes coluna, podemos calcular o produto de matrizes $\vec{v}^T\vec{w}$, resultando em uma matriz de tamanho 1×1, que tratamos como número. Esse número é chamado **produto escalar** $\vec{v} \cdot \vec{w}$ de $\vec{v}$ e $\vec{w}$. Em termos das coordenadas, a definição é a seguinte:

$$\text{Se } \vec{v} = \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{bmatrix} \text{ e } \vec{w} = \begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{bmatrix}, \text{ então } \vec{v} \cdot \vec{w} = \vec{v}^T\vec{w} = x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2.$$

$$\text{Se } \vec{v} = \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix} \text{ e } \vec{w} = \begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \end{bmatrix}, \text{ então } \vec{v} \cdot \vec{w} = \vec{v}^T\vec{w} = x_1x_2 + y_1y_2.$$

Em palavras, o produto escalar de dois vetores é formado multiplicando-se as coordenadas correspondentes e somando-se os resultados. Mesmo $\vec{v}$ e $\vec{w}$ sendo vetores, o produto $\vec{v} \cdot \vec{w}$ é um *número*. Daí vem o nome **produto escalar** de $\vec{v}$ e $\vec{w}$.

Exemplo 1 Se $\vec{v} = \begin{bmatrix} 6 \\ -2 \\ 5 \end{bmatrix}$ e $\vec{w} = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ -3 \end{bmatrix}$, então $\vec{v} \cdot \vec{w} = 6 \cdot 2 + (-2)(-1) + 5(-3) = -1$.

O produto escalar $\vec{v} \cdot \vec{w}$ é o conceito central nesta seção, e o seguinte teorema agrupa muitas de suas propriedades básicas.

TEOREMA 11 Sejam $\vec{u}$, $\vec{v}$ e $\vec{w}$ vetores, e seja a um número. Então:

(1) $\vec{v} \cdot \vec{w}$ é um número.
(2) $\vec{v} \cdot \vec{w} = \vec{w} \cdot \vec{v}$.
(3) $\vec{v} \cdot \vec{0} = 0 = \vec{0} \cdot \vec{w}$.
(4) $\vec{v} \cdot \vec{v} = \|\vec{v}\|^2$.
(5) $(a\vec{v}) \cdot \vec{w} = a(\vec{v} \cdot \vec{w}) = \vec{v} \cdot (a\vec{w})$.
(6) $\vec{v} \cdot (\vec{u} + \vec{w}) = \vec{v} \cdot \vec{u} + \vec{v} \cdot \vec{w}$.
(7) $\vec{v} \cdot (\vec{u} - \vec{w}) = \vec{v} \cdot \vec{u} - \vec{v} \cdot \vec{w}$.

DEMONSTRAÇÃO A afirmação (1) vale pela definição de $\vec{v} \cdot \vec{w}$, e (4) deriva da parte (2) do Teorema 1 da Seção 3.1. Para demonstrar (2), escreva $\vec{v} = [x_1 \;\; y_1 \;\; z_1]^T$ e $\vec{w} = [x_2 \;\; y_2 \;\; z_2]^T$. Então:

$$\vec{v} \cdot \vec{w} = x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2 = x_2x_1 + y_2y_1 + z_2z_1 = \vec{w} \cdot \vec{v}.$$

O restante das asserções contidas no teorema são propriedades da aritmética matricial. Por exemplo, (6) é verificada como segue:

$$\vec{v} \cdot (\vec{u} + \vec{w}) = \vec{v}^T(\vec{u} + \vec{w}) = \vec{v}^T \vec{u} + \vec{v}^T \vec{w} = \vec{v} \cdot \vec{u} + \vec{v} \cdot \vec{w}.$$

As demonstrações de (3), (5) e (7) são análogas e são deixadas para você, no Exercício 17.

As propriedades no Teorema 1 podem ser combinadas para permitir cálculos como o seguinte:

$$3\vec{u} \cdot (\vec{v} - 2\vec{w} + 5\vec{z}) = 3(\vec{u} \cdot \vec{v}) - 6(\vec{u} \cdot \vec{w}) + 15(\vec{u} \cdot \vec{z}).$$

Tais cálculos serão feitos sem comentários no que segue. Eis uma ilustração.

Exemplo 2 Verifique que $\|\vec{v} + \vec{w}\|^2 = \|\vec{v}\|^2 + 2(\vec{v} \cdot \vec{w}) + \|\vec{w}\|^2$ para quaisquer vetores $\vec{v}$ e $\vec{w}$.

SOLUÇÃO Aplicamos o Teorema 1 muitas vezes:

$$\begin{aligned}\|\vec{v} + \vec{w}\|^2 &= (\vec{v} + \vec{w}) \cdot (\vec{v} + \vec{w}) \\ &= \vec{v} \cdot \vec{v} + \vec{v} \cdot \vec{w} + \vec{w} \cdot \vec{v} + \vec{w} \cdot \vec{w} \\ &= \|\vec{v}\|^2 + 2(\vec{v} \cdot \vec{w}) + \|\vec{w}\|^2.\end{aligned}$$

Isso é o que queríamos.

3.2.2 Ângulos

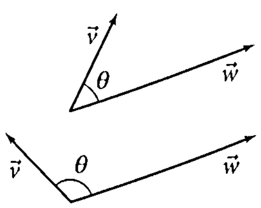


Figura 3.27

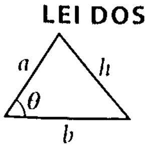
Suponha que dois vetores não-nulos $\vec{v}$ e $\vec{w}$ estejam posicionados com uma origem comum. Então eles determinam um único ângulo θ no intervalo[8]

$$0 \le \theta \le \pi$$

chamado **ângulo entre os vetores** $\vec{v}$ e $\vec{w}$. A Figura 3.27 ilustra os casos em que θ é agudo (menor do que $\frac{\pi}{2}$) e obtuso (maior do que $\frac{\pi}{2}$). Se ou $\vec{v}$ ou $\vec{w}$ for o vetor nulo, o ângulo entre ambos não é definido.

Existe uma conexão próxima entre o produto escalar $\vec{v} \cdot \vec{w}$ e o ângulo entre $\vec{v}$ e $\vec{w}$. A relação depende de uma extensão do Teorema de Pitágoras conhecida como a

LEI DOS COSSENOS Se a, b e h são os lados de um triângulo e θ é o ângulo oposto a h (como na Figura 3.28), então



$$h^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\theta.$$

DEMONSTRAÇÃO Para ver isso, considere o caso em que θ é agudo; o caso obtuso é análogo. Tendo a Figura 3.29 como referência, vemos, pela trigonometria do triângulo retângulo, que $p = a \operatorname{sen} \theta$ e $q = b - a\cos\theta$. Então o Teorema de Pitágoras fornece

$$h^2 = p^2 + q^2 = a^2 \operatorname{sen}^2 \theta + [b^2 - 2ab\cos\theta + a^2\cos^2\theta] = a^2 + b^2 - 2ab\cos\theta,$$

onde usamos o fato que $\operatorname{sen}^2\theta + \cos^2\theta = 1$, para qualquer ângulo θ.

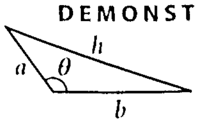


Figura 3.28

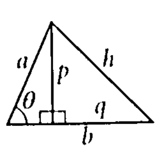


Figura 3.29

[8] Usamos medida de ângulos em radianos. Assim, π radianos corresponde a 180°, $\frac{\pi}{2}$ corresponde a 90°, etc. Ver Apêndice A.1 para uma discussão sobre ângulos.

Observe que a lei dos cossenos se reduz ao Teorema de Pitágoras se θ for um ângulo reto porque, nesse caso, $\theta = \frac{\pi}{2}$ e, portanto, $\cos\theta = \cos\frac{\pi}{2} = 0$.

De posse da lei dos cossenos, podemos deduzir uma conexão importante entre ângulos e produtos escalares.

TEOREMA 2 Se θ é o ângulo entre dois vetores não nulos $\vec{v}$ e $\vec{w}$, então

$$\vec{v} \cdot \vec{w} = \|\vec{v}\|\,\|\vec{w}\| \cos\theta.$$

DEMONSTRAÇÃO Vamos calcular $\|\vec{v} - \vec{w}\|^2$ de duas maneiras e comparar os resultados. Se aplicarmos a lei dos cossenos ao triângulo da Figura 3.30, o resultado será

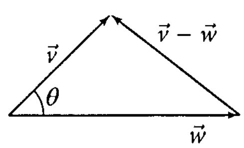


Figura 3.30

$$\|\vec{v} - \vec{w}\|^2 = \|\vec{v}\|^2 + \|\vec{w}\|^2 - 2\|\vec{v}\|\,\|\vec{w}\| \cos\theta.$$

Por outro lado, o Teorema 1 fornece

$$\begin{aligned}\|\vec{v} - \vec{w}\|^2 &= (\vec{v} - \vec{w}) \cdot (\vec{v} - \vec{w}) \\ &= \vec{v} \cdot \vec{v} - \vec{v} \cdot \vec{w} - \vec{w} \cdot \vec{v} + \vec{w} \cdot \vec{w} \\ &= \|\vec{v}\|^2 - 2\vec{v} \cdot \vec{w} + \|\vec{w}\|^2.\end{aligned}$$

A comparação dessas expressões prova o Teorema 2.

O Teorema 2 dá uma descrição intrínseca do produto escalar porque a expressão $\|\vec{v}\|\,\|\vec{w}\| \cos\theta$ depende apenas dos comprimentos dos vetores $\vec{v}$ e $\vec{w}$ e do ângulo θ entre eles, e não depende do sistema de coordenadas usado para descrever os vetores. Além disso, se $\vec{v}$ e $\vec{w}$ são não nulos, ele fornece a fórmula para o cosseno do ângulo θ entre eles:

$$\cos\theta = \frac{\vec{v} \cdot \vec{w}}{\|\vec{v}\|\,\|\vec{w}\|}.$$

Mostramos aqui como a fórmula é usada.

Exemplo 3 Encontre o ângulo θ entre $\vec{v} = \begin{bmatrix} -1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}$ e $\vec{w} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$.

SOLUÇÃO Usando o Teorema 2, calculamos

$$\cos\theta = \frac{\vec{v} \cdot \vec{w}}{\|\vec{v}\|\,\|\vec{w}\|} = \frac{-2 - 2 + 1}{\sqrt{1 + 4 + 1}\sqrt{4 + 1 + 1}} = \frac{-3}{\sqrt{6}\sqrt{6}} = -\frac{1}{2}.$$

Lembramos agora que $\cos\theta$ e $\operatorname{sen}\theta$ são definidos[9] de modo que o par $(\cos\theta, \operatorname{sen}\theta)$ seja o ponto sobre a circunferência unitária determinado pelo ângulo θ (medido a partir do eixo X no sentido anti-horário, como na Figura 3.31). No exemplo presente, temos $\cos\theta = -\frac{1}{2}$ e $0 \leq \theta \leq \pi$, logo segue que $\theta = \frac{2\pi}{3}$ ou 120°.

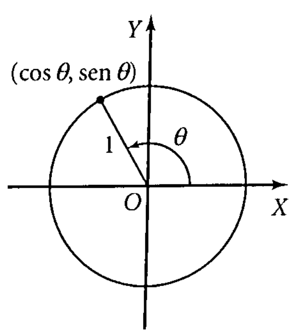


Figura 3.31

Seja θ o ângulo entre os vetores não nulos $\vec{v}$ e $\vec{w}$, logo $0 \leq \theta \leq \pi$. Segue da fórmula $\cos\theta = \frac{\vec{v} \cdot \vec{w}}{\|\vec{v}\|\|\vec{w}\|}$ que $\vec{v} \cdot \vec{w}$ e $\cos\theta$ têm o mesmo sinal. Mas $\cos\theta$ é a coordenada X do ponto sobre a circunferência unitária determinada por θ (ver Figura 3.31), logo $\cos\theta$ é positivo, zero, ou negativo se, e somente se, $\theta < \frac{\pi}{2}$, $\theta = \frac{\pi}{2}$, ou $\theta > \frac{\pi}{2}$, respectivamente. Portanto, obtemos a seguinte relação entre o sinal de $\vec{v} \cdot \vec{w}$ e o tamanho de θ:

$\vec{v} \cdot \vec{w} > 0$ se, e somente se, θ é **agudo** $\left(0 \leq \theta < \frac{\pi}{2}\right)$

$\vec{v} \cdot \vec{w} = 0$ se, e somente se, θ é um **ângulo reto** $\left(\theta = \frac{\pi}{2}\right)$

$\vec{v} \cdot \vec{w} < 0$ se, e somente se, θ é **obtuso** $\left(\frac{\pi}{2} < \theta \leq \pi\right)$

O segundo desses três casos é o mais importante. Os vetores não nulos $\vec{v}$ e $\vec{w}$ são ditos **ortogonais** se o ângulo θ entre eles for um ângulo reto, isto é, se $\theta = \frac{\pi}{2}$. A discussão anterior prova o seguinte resultado fundamental.

9 Uma revisão de trigonometria básica é dada no Apêndice A.1.

TEOREMA 3 Sejam $\vec{v}$ e $\vec{w}$ vetores não nulos. Então:

$$\vec{v} \text{ e } \vec{w} \text{ são ortogonais se, e somente se, } \vec{v} \cdot \vec{w} = 0.$$

O Teorema 3 será usado freqüentemente porque a ortogonalidade desempenha um papel bem básico em geometria. A razão para esse uso é que se pode testar se duas retas são ortogonais verificando-se se dois vetores não nulos que apontam nas mesmas direções que as retas são ortogonais.* Os três exemplos a seguir ilustram essa situação.

Exemplo 4 Mostre que os pontos $A(3,\ -1,\ 2)$, $B(5,\ -2,\ 5)$ e $C(2,\ 0,\ 3)$ são vértices de um triângulo retângulo.

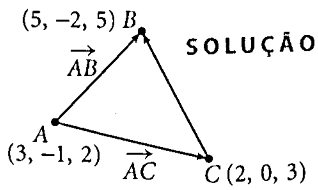


Figura 3.32

SOLUÇÃO Temos $\overrightarrow{AB} = [2\ \ -1\ \ 3]^T$, $\overrightarrow{AC} = [-1\ \ 1\ \ 1]^T$ e $\overrightarrow{BC} = [-3\ \ 2\ \ -2]^T$. Agora observe que $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = -2 - 1 + 3 = 0$. Logo, pelo Teorema 3, os vetores $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{AC}$ são ortogonais. Como esses vetores apontam nas direções dos lados AB e AC do triângulo (Figura 3.32), isso significa que o ângulo no vértice A é um ângulo reto.

Exemplo 5 Um **losango** é um paralelogramo no qual todos os lados têm comprimentos iguais. Mostre que as diagonais de qualquer losango são perpendiculares.

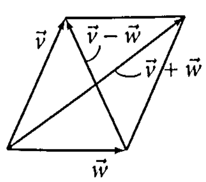


Figura 3.33

SOLUÇÃO Sejam $\vec{v}$ e $\vec{w}$ os vetores representados por dois lados adjacentes do losango como na Figura 3.33. Então, $\vec{v} + \vec{w}$ e $\vec{v} - \vec{w}$ representam as diagonais e calculamos

$$\begin{aligned}(\vec{v} - \vec{w}) \cdot (\vec{v} + \vec{w}) &= \vec{v} \cdot \vec{v} + \vec{v} \cdot \vec{w} - \vec{w} \cdot \vec{v} - \vec{w} \cdot \vec{w} \\ &= \|\vec{v}\|^2 - \|\vec{w}\|^2 \\ &= 0\end{aligned}$$

porque $\|\vec{v}\| = \|\vec{w}\|$ (é um losango). Então, $\vec{v} + \vec{w}$ e $\vec{v} - \vec{w}$ são ortogonais pelo Teorema 3 e, portanto, as diagonais são perpendiculares.

Exemplo 6 A reta que passa pelo vértice de um triângulo e é perpendicular ao lado oposto a esse vértice é uma **altura** do triângulo. Mostre que as três alturas de qualquer triângulo são concorrentes (isto é, se encontram) em um mesmo ponto.

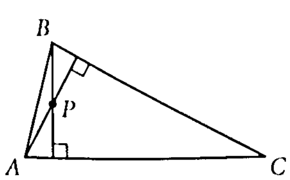


Figura 3.34

SOLUÇÃO Sejam A, B e C os vértices do triângulo e seja P o ponto de interseção das alturas que passam por A e por B, como na Figura 3.34. É suficiente mostrar que $\overrightarrow{PC}$ é ortogonal a $\overrightarrow{AB}$; isto é, que $\overrightarrow{PC} \cdot \overrightarrow{AB} = 0$. Temos $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{BC}$, logo

$$\overrightarrow{PC} \cdot \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{PC} \cdot (\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{BC}) = \overrightarrow{PC} \cdot \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{PC} \cdot \overrightarrow{BC}$$

Escrevendo $\overrightarrow{PC}$ de duas maneiras diferentes no lado direito, obtemos

$$\begin{aligned}\overrightarrow{PC} \cdot \overrightarrow{AB} &= (\overrightarrow{PB} + \overrightarrow{BC}) \cdot \overrightarrow{AC} - (\overrightarrow{PA} + \overrightarrow{AC}) \cdot \overrightarrow{BC} \\ &= \overrightarrow{PB} \cdot \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{BC} - \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BC} \\ &= 0 + \overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{AC} - 0 - \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BC} \\ &= 0\end{aligned}$$

pois $\overrightarrow{PB} \cdot \overrightarrow{AC} = 0$ e $\overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{BC} = 0$ porque P está sobre ambas as alturas. Isso é o que queríamos.

*NTT: Duas retas ortogonais que se interceptam são chamadas *perpendiculares*.

3.2.3 Projeções

Em aplicações em que vetores são usados é freqüentemente útil escrever um vetor como soma de dois vetores ortogonais. Aqui está um exemplo.

Exemplo 7 Suponha que um bloco de 10 kg é colocado em uma superfície plana com inclinação de 30° em relação à horizontal, como na Figura 3.35. Desprezando o atrito, quanta força é necessária para evitar que o bloco deslize pela superfície?

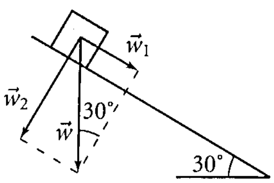


Figura 3.35

SOLUÇÃO Seja $\vec{w}$ o peso (força da gravidade) exercido pelo bloco. Então $\|\vec{w}\| = 10$ e a direção de $\vec{w}$ é vertical, apontando para baixo, como na Figura 3.35.

A idéia é escrever $\vec{w}$ como uma soma $\vec{w} = \vec{w}_1 + \vec{w}_2$ em que $\vec{w}_1$ é paralelo à superfície inclinada e $\vec{w}_2$ é ortogonal à superfície. Como não há atrito, a força pedida no problema é $-\vec{w}_1$ porque a força $\vec{w}_2$ não tem efeito na direção paralela à superfície. Como o ângulo entre $\vec{w}$ e $\vec{w}_2$ é 30° (Figura 3.35), temos $\frac{\|\vec{w}_1\|}{\|\vec{w}\|} = \text{sen } 30° = \frac{1}{2}$. Logo, $\|\vec{w}_1\| = \frac{1}{2}\|\vec{w}\| = \frac{1}{2}10 = 5$. Assim, a força pedida tem magnitude de 5 kg, apontando para cima paralelamente à superfície.

A idéia-chave na resolução do Exemplo 7 foi escrever $\vec{w}$ como uma soma de dois vetores, um paralelo à superfície e outro ortogonal à superfície. Esse tipo de decomposição surge freqüentemente em aplicações, e há uma maneira simples de encontrá-la. A formulação geral do problema é a seguinte.

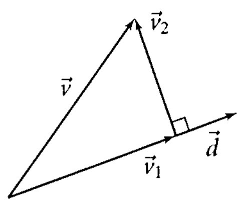


Figura 3.36

Suponha que $\vec{v}$ e $\vec{d}$ sejam vetores dados, com $\vec{d} \neq \vec{0}$. Queremos escrever $\vec{v}$ como uma soma

$$\vec{v} = \vec{v}_1 + \vec{v}_2$$

sendo $\vec{v}_1$ paralelo a $\vec{d}$ e $\vec{v}_2$ ortogonal a $\vec{d}$ (ver Figura 3.36). Como $\vec{v}_1$ é paralelo a $\vec{d}$, deve ser da forma

$$\vec{v}_1 = t\vec{d}$$

em que t é algum escalar. Esse escalar t é determinado pelo fato que $\vec{v}_2$ é ortogonal a $\vec{d}$, isto é, $\vec{v}_2 \cdot \vec{d} = 0$. De fato, como $\vec{v}_2 = \vec{v} - \vec{v}_1$, essa condição fica na forma

$$0 = \vec{v}_2 \cdot \vec{d} = (\vec{v} - \vec{v}_1) \cdot \vec{d} = (\vec{v} - t\vec{d}) \cdot \vec{d} = \vec{v} \cdot \vec{d} - t(\vec{d} \cdot \vec{d}) = \vec{v} \cdot \vec{d} - t\|\vec{d}\|^2.$$

Em outras palavras, é necessário que $t\|\vec{d}\|^2 = \vec{v} \cdot \vec{d}$. Como $\|\vec{d}\|^2 \neq \vec{0}$ (porque $\vec{d} \neq \vec{0}$), obtém-se

$$t = \frac{\vec{v} \cdot \vec{d}}{\|\vec{d}\|^2}$$

Daí $\vec{v}_1 = \left(\frac{\vec{v} \cdot \vec{d}}{\|\vec{d}\|^2}\right)\vec{d}$ e $\vec{v}_2 = \vec{v} - \vec{v}_1$ são determinados de modo único por $\vec{v}$ e $\vec{d}$.

O vetor $\vec{v}_1$ é chamado **projeção de $\vec{v}$ sobre** $\vec{d}$, e denotado por

$$\vec{v}_1 = proj_{\vec{d}}(\vec{v}).$$

Isso prova o teorema útil a seguir.

TEOREMA 4 **Teorema da Projeção.** Sejam $\vec{v}$ e $\vec{d} \neq \vec{0}$ vetores.

(1) A projeção de $\vec{v}$ sobre $\vec{d}$ é dada por

$$proj_{\vec{d}}(\vec{v}) = \left(\frac{\vec{v} \cdot \vec{d}}{\|\vec{d}\|^2}\right)\vec{d}.$$

(2) O vetor $\vec{v} - proj_{\vec{d}}(\vec{v})$ é ortogonal a $\vec{d}$.

(3) O vetor $\vec{v}$ pode ser escrito de modo único na forma $\vec{v} = \vec{v}_1 + \vec{v}_2$ com $\vec{v}_1$ paralelo a $\vec{d}$ e $\vec{v}_2$ ortogonal a $\vec{d}$. De fato, $\vec{v}_1 = proj_{\vec{d}}(\vec{v})$ e $\vec{v}_2 = \vec{v} - \vec{v}_1$.

Observe que a projeção $\vec{v}_1 = proj_{\vec{d}}(\vec{v})$ tem a mesma direção que $\vec{d}$ se o ângulo θ entre $\vec{v}$ e $\vec{d}$ for menor do que $\frac{\pi}{2}$ e $\vec{v}_1$ tem direção oposta a $\vec{d}$ se θ for maior que $\frac{\pi}{2}$. Essas duas situações são ilustradas na Figura 3.37. É claro que se $\vec{v}$ e $\vec{d}$ forem ortogonais (isto é, se $\theta = \frac{\pi}{2}$), então $proj_{\vec{d}}(\vec{v}) = \vec{v}_1 = \vec{0}$.

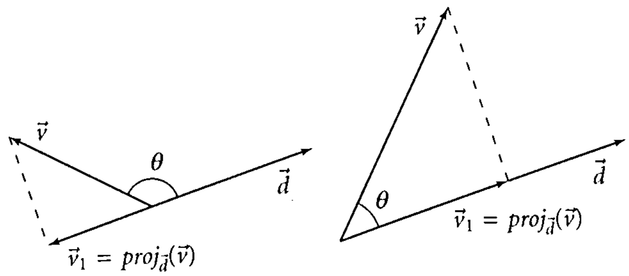


Figura 3.37

Exemplo 8 Se $\vec{v} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{bmatrix}$ e $\vec{d} = \begin{bmatrix} 4 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$, expresse $\vec{v}$ na forma $\vec{v} = \vec{v}_1 + \vec{v}_2$, com $\vec{v}_1$ paralelo a $\vec{d}$ e $\vec{v}_2$ paralelo a $\vec{d}$.

SOLUÇÃO Pelo Teorema da Projeção, $\vec{v}_1$ é a projeção de $\vec{v}$ sobre $\vec{d}$, isto é,

$$\vec{v}_1 = proj_{\vec{d}}(\vec{v}) = \left(\frac{\vec{v} \cdot \vec{d}}{\|\vec{d}\|^2}\right)\vec{d} = \left(\frac{4 - 2 - 3}{4^2 + (-1)^2 + 1^2}\right)\vec{d} = \left(\frac{-1}{18}\right)\vec{d} = \frac{1}{18}\begin{bmatrix} -4 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

Como $\vec{v} = \vec{v}_1 + \vec{v}_2$, podemos calcular $\vec{v}_2$ da seguinte maneira:

$$\begin{aligned} \vec{v}_2 = \vec{v} - \vec{v}_1 &= \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{bmatrix} - \frac{1}{18}\begin{bmatrix} -4 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{18}\left(\begin{bmatrix} 18 \\ 36 \\ -54 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -4 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}\right) \\ &= \frac{1}{18}\begin{bmatrix} 22 \\ 35 \\ -53 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Uma boa forma de conferir as contas é verificar se $\vec{v}_2$ é de fato ortogonal a $\vec{d}$. Neste caso, temos $\vec{v}_2 \cdot \vec{d} = \frac{1}{18}(22 \cdot 4 + 35\,(-1) + (-53) \cdot 1) = 0$, logo o vetor $\vec{v}_2$ é realmente ortogonal a $\vec{d}$.

Exercícios 3.2

1. Em cada caso, calcule $\vec{v} \cdot \vec{w}$.

a) $\vec{v} = [5 \;\; -3]^T, \vec{w} = [2 \;\; 6]^T$
b) $\vec{v} = [4 \;\; 0]^T, \vec{w} = [1 \;\; -1]^T$
c) $\vec{v} = [2 \;\; -1 \;\; 3]^T, \vec{w} = [1 \;\; 2 \;\; -5]^T$
d) $\vec{v} = [3 \;\; -1 \;\; 4]^T, \vec{w} = \vec{v}$
e) $\vec{v} = [2 \;\; 2 \;\; -1]^T, \vec{w} = -3[1 \;\; -1 \;\; 5]^T$
f) $\vec{v} = [3 \;\; -1 \;\; 5]^T, \vec{w} = [4 \;\; 2 \;\; -2]^T$
g) $\vec{v} = [-5 \;\; 7 \;\; 2]^T, \vec{w} = [9 \;\; 7 \;\; -2]^T$
h) $\vec{v} = [5 \;\; -6 \;\; 2]^T, \vec{w} = [-3 \;\; 4 \;\; -2]^T$

2. Em cada caso, calcule $\vec{v} \cdot \vec{v}$ e $\|\vec{v}\|$.

a) $\vec{v} = [2 \;\; -1 \;\; 3]^T$ **b)** $\vec{v} = [1 \;\; -2 \;\; 2]^T$
c) $\vec{v} = \frac{\sqrt{2}}{10}[3 \;\; -5 \;\; 4]^T$ **d)** $\vec{v} = [1 \;\; -1 \;\; 1]^T$

3. Para cada par de vetores a seguir, determine se o ângulo entre $\vec{v}$ e $\vec{w}$ é agudo, obtuso ou reto.

a) $\vec{v} = [5 \;\; -3]^T, \vec{w} = [2 \;\; 6]^T$
b) $\vec{v} = [4 \;\; 0]^T, \vec{w} = [1 \;\; -1]^T$
c) $\vec{v} = [2 \;\; -1 \;\; 3]^T, \vec{w} = [1 \;\; 2 \;\; -5]^T$
d) $\vec{v} = [3 \;\; -1 \;\; 4]^T, \vec{w} = \vec{v}$
e) $\vec{v} = [2 \;\; 2 \;\; -1]^T, \vec{w} = -3[1 \;\; -1 \;\; 5]^T$
f) $\vec{v} = [3 \;\; -1 \;\; 5]^T, \vec{w} = [4 \;\; 2 \;\; -2]^T$
g) $\vec{v} = [-5 \;\; 7 \;\; 2]^T, \vec{w} = [9 \;\; 7 \;\; -2]^T$
h) $\vec{v} = [5 \;\; -6 \;\; 2]^T, \vec{w} = [-3 \;\; 4 \;\; -2]^T$

4. Em cada caso, encontre o ângulo entre $\vec{v}$ e $\vec{w}$.

a) $\vec{v} = [3 \;\; 1]^T, \vec{w} = [1 \;\; 2]^T$
b) $\vec{v} = [1 \;\; 1]^T, \vec{w} = [-1 \;\; 1]^T$

c) $\vec{v} = [2 \;\; 1 \;\; 1]^T, \vec{w} = [1 \;\; 1 \;\; 0]^T$
d) $\vec{v} = [2 \;\; 3 \;\; 4]^T, \vec{w} = [3 \;\; -4 \;\; 7]^T$
e) $\vec{v} = [7 \;\; 3 \;\; -1]^T, \vec{w} = [1 \;\; -1 \;\; 4]^T$
f) $\vec{v} = [0 \;\; -1 \;\; 1]^T, \vec{w} = [1 \;\; 1 \;\; 0]^T$

5. Encontre todos os possíveis a, b e c de modo que $\vec{u} = [a \;\; b \;\; c]^T$ seja ortogonal a ambos os vetores $\vec{v} = [2 \;\; -1 \;\; 3]^T$ e $\vec{w} = [1 \;\; 1 \;\; -2]^T$.

6. Considere o triângulo de vértices $A(2,\ -3,\ 0)$, $B(5,\ 1\ ,-2)$, e $C(7,\ 3,\ 5)$.
a) Mostre que ABC é um triângulo retângulo.
b) Encontre os comprimentos dos três lados e verifique se satisfazem o Teorema de Pitágoras.

7. Mostre que a reta que passa por $A(1,\ -2,\ 1)$ e $B(0,\ 2,\ 5)$ é ortogonal à reta que passa por $C(2,\ 1,\ -1)$ e $D(2,\ 3,\ -3)$.

8. Em cada caso, considere a reta que passa por A e B e a reta que passa por C e D, e determine se essas retas são paralelas, ortogonais ou nenhuma dessas posições relativas. Justifique sua resposta.
a) $A(2,\ -1,\ 3)$, $B(3,\ 1,\ -1)$, $C(1,\ 1,\ 0)$, $D(0,\ -1,\ 4)$
b) $A(5,\ 0,\ -2)$, $B(1,\ 1,\ 2)$, $C(3,\ -2,\ 5)$, $D(4,\ -2,\ 3)$
c) $A(3,\ 2,\ 1)$, $B(1,\ 1,\ 1)$, $C(-5,\ -1,\ 0)$, $D(4,\ -3,\ 2)$
d) $A(-1,\ 2,\ 5)$, $B(9,\ -3,\ 2)$, $C(0,\ -3,\ 2)$, $D(1,\ -4,\ 7)$
e) $A(5,\ 4,\ -1)$, $B(8,\ 3,\ 3)$, $C(2,\ 4,\ 6)$, $D(1,\ 5,\ 7)$
f) $A(3,\ 0,\ -2)$, $B(6,\ -5,\ 2)$, $C(4,\ 4,\ -3)$, $D(-2,\ 14,\ -11)$

9. Em cada caso, calcule a projeção de $\vec{v}$ sobre $\vec{w}$.
a) $\vec{v} = [-2 \;\; 3]^T, \vec{w} = [1 \;\; 2]^T$
b) $\vec{v} = [-1 \;\; 3]^T, \vec{w} = [5 \;\; 0]^T$
c) $\vec{v} = [3 \;\; -1 \;\; 1]^T, \vec{w} = [2 \;\; 0 \;\; -3]^T$
d) $\vec{v} = [-2 \;\; 0 \;\; 12]^T, \vec{w} = [5 \;\; -4 \;\; 4]^T$
e) $\vec{v} = [6 \;\; -1 \;\; 2]^T, \vec{w} = [-1 \;\; 2 \;\; 4]^T$
f) $\vec{v} = [5 \;\; -1 \;\; 1]^T, \vec{w} = [1 \;\; -3 \;\; -2]^T$

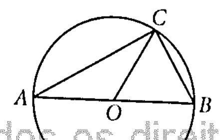
10. Em cada caso, escreva $\vec{v}$ como uma soma $\vec{v} = \vec{v}_1 + \vec{v}_2$ com $\vec{v}_1$ paralelo a $\vec{w}$ e $\vec{v}_2$ ortogonal a $\vec{w}$.
a) $\vec{v} = [1 \;\; -1 \;\; 3]^T, \vec{w} = [2 \;\; -1 \;\; 1]^T$
b) $\vec{v} = [3 \;\; 1 \;\; 2]^T, \vec{w} = [-2 \;\; 1 \;\; 4]^T$
c) $\vec{v} = [2 \;\; -1 \;\; 0]^T, \vec{w} = [3 \;\; 2 \;\; -1]^T$
d) $\vec{v} = [3 \;\; -2 \;\; 1]^T, \vec{w} = [1 \;\; 4 \;\; -1]^T$

11. Sejam A, B, C e D os vértices, em ordem, de um paralelogramo $ABCD$. Dados $A(1,\ -1,\ 2)$, $C(2,\ 1,\ 0)$ e o ponto médio $M(1,\ 0,\ -3)$ do lado AB, encontre $\overrightarrow{BD}$.

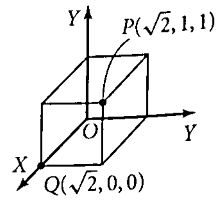
12. Sejam A, B e C os vértices de um triângulo e seja M o ponto médio de BC. Dados $A(2,\ -1,\ 3)$, $\overrightarrow{BC} = [4 \;\; 1 \;\; -2]^T$ e $\overrightarrow{AM} = [2 \;\; 0 \;\; -1]^T$, encontre B e C.

13. Mostre que se as diagonais de um paralelogramo são perpendiculares, ele é necessariamente um losango. (Ver Exemplo 5.)

14. Sejam A e B as extremidades do diâmetro de uma circunferência, como mostrado no diagrama. Se C for um ponto qualquer na circunferência, mostre que os segmentos de reta AC e BC são perpendiculares.



15. Considere o paralelepípedo reto-retângulo com lados de comprimentos 1, 1 e $\sqrt{2}$. Encontre o ângulo entre uma diagonal e um dos lados com o maior comprimento.



16. Em cada caso, ou demonstre que a afirmação é verdadeira ou dê um exemplo mostrando que ela é falsa. Em todos os itens, $\vec{u}$, $\vec{v}$ e $\vec{w}$ representam vetores.
a) Se $\vec{v} \cdot \vec{w} = 0$, então ou $\vec{v} = \vec{0}$ ou $\vec{w} = \vec{0}$.
b) Se $\vec{v}$ e $\vec{w}$ são ortogonais, então $2\vec{v}$ e $-3\vec{w}$ também são ortogonais.
c) Se $-\vec{v}$ é ortogonal a $\vec{w}$, então $\vec{v}$ é paralelo a $\vec{w}$.
d) Se o ângulo entre $\vec{v}$ e $\vec{w}$ é agudo, então o ângulo entre $-\vec{v}$ e $\vec{w}$ é obtuso.
e) Se a projeção $proj_{\vec{d}}(\vec{v}) = \vec{0}$, então $\vec{v} = \vec{0}$.
f) Se $proj_{\vec{d}}(\vec{v}) = \vec{0}$, então $\vec{v}$ é ortogonal a $\vec{d}$.
g) Se $\vec{v}$ é paralelo a $\vec{d}$, então $proj_{\vec{d}}(\vec{v}) = \vec{v}$.

17. Prove as seguintes partes do Teorema 1:
a) Parte (3) b) Parte (5) c) Parte (7).

18. Se $\vec{v}$ e $\vec{w}$ são ortogonais, mostre que
$$\|\vec{v} + \vec{w}\|^2 = \|\vec{v}\|^2 + \|\vec{w}\|^2.$$

19. Mostre que $(\vec{v} + \vec{w}) \cdot (\vec{v} - \vec{w}) = \|\vec{v}\|^2 - \|\vec{w}\|^2$.

20. Mostre que $\|\vec{v} + \vec{w}\|^2 + \|\vec{v} - \vec{w}\|^2 = 2\left(\|\vec{v}\|^2 + \|\vec{w}\|^2\right)$.

21. Se cada um dos vetores $\vec{u}$, $\vec{v}$ e $\vec{w}$ é ortogonal aos outros dois, mostre que $\|\vec{u} + \vec{v} + \vec{w}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 + \|\vec{w}\|^2$.

22. Verifique as duas propriedades da projeção a seguir:
a) $proj_{\vec{d}}(\vec{v} + \vec{w}) = proj_{\vec{d}}(\vec{v}) + proj_{\vec{d}}(\vec{w})$ para quaisquer vetores $\vec{v}$ e $\vec{w}$.
b) $proj_{\vec{d}}(a\vec{v}) = a\,proj_{\vec{d}}(\vec{v})$ para todo escalar a e todo vetor $\vec{v}$. (Por causa dessas propriedades, a função $proj_{\vec{d}}(\ )$ é dita uma **transformação linear**. Esse assunto será tratado adiante, na Seção 3.4.)

23. Se $\vec{v}$ é um vetor não nulo, sejam α, β e γ os ângulos que $\vec{v}$ faz com os semi-eixos positivos X, Y e Z, respectivamente. Então $\cos\alpha$, $\cos\beta$ e $\cos\gamma$ são chamados **cossenos diretores** do vetor $\vec{v}$.
a) Se $\vec{v} = [a \;\; b \;\; c]^T$, mostre que $\cos\alpha = \frac{a}{\|\vec{v}\|}$, $\cos\beta = \frac{b}{\|\vec{v}\|}$ e $\cos\gamma = \frac{c}{\|\vec{v}\|}$.
b) Mostre que $\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$.

24. Considere a reta $y = mx$ que passa pela origem e tem inclinação m.
a) Mostre que $\vec{d} = [1 \;\; m]^T$ é um vetor que aponta na direção da reta.
b) Mostre que as retas $y = m_1x$ e $y = m_2x$ são perpendiculares se, e somente se, $m_1m_2 = -1$.

25. Suponha que $\vec{d}$ e $\vec{d'}$ sejam vetores paralelos não nulos. Use a parte (1) do Teorema 4 para mostrar que $proj_{\vec{d}}(\vec{v}) = proj_{\vec{d'}}(\vec{v})$ para todo vetor $\vec{v}$.

26. a) Mostre que $|\vec{v} \cdot \vec{w}| \leq \|\vec{v}\|\|\vec{w}\|$ para todos os vetores $\vec{v}$ e $\vec{w}$. Essa é a chamada **desigualdade de Cauchy-Schwarz**.
b) Mostre que $|\vec{v} \cdot \vec{w}| = \|\vec{v}\|\|\vec{w}\|$ se, e somente se, $\vec{v}$ e $\vec{w}$ são paralelos.

3.3 RETAS E PLANOS

Vamos agora focalizar nossa atenção para descrever dois dos mais importantes objetos em geometria: retas e planos. Teremos uma abordagem vetorial, e a principal ferramenta será o conceito de vetor posição de um ponto.

3.3.1 Vetor Posição

Seja $P = P(x,\ y,\ z)$ o ponto do espaço com coordenadas (x, y, z). O **vetor posição** $\vec{p}$ de P foi definido na Seção 3.1 como sendo o vetor da origem até P:

$$\vec{p} = \overrightarrow{OP} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = [x \ \ y \ \ z]^T.$$

Analogamente, o vetor posição de $P(x,\ y)$ no plano é $\vec{p} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = [x \ \ y]^T$. Dessa forma, todo ponto determina um único vetor posição. Reciprocamente, todo vetor é o vetor posição de um único ponto (coloque o vetor com seu ponto inicial na origem do sistema de coordenadas, o ponto será a extremidade do vetor). Assim, vetor posição é apenas uma outra maneira de descrever ponto.

O uso de vetor posição traz uma nova perspectiva em geometria: para calcular as *coordenadas* x, y e z de um ponto $P(x,\ y,\ z)$, encontramos o vetor posição $\vec{p} = [x \ \ y \ \ z]^T$ de P e determinamos suas *componentes* x, y e z. São os mesmos três números, mas essa mudança de interpretação permite o uso de métodos vetoriais em geometria e, portanto, proporciona uma nova abordagem a esse assunto. Essa perspectiva vetorial é particularmente eficiente para o estudo de retas e planos e, portanto, tem importância central nesta seção.

3.3.2 Retas

Dado um ponto P, do ponto de vista geométrico é evidente que há exatamente uma reta que passa por P e é paralela a um vetor não nulo dado. Usaremos essa observação para dar uma descrição precisa de retas no espaço. Com isso em mente, um vetor não nulo $\vec{d}$ é chamado **vetor diretor** de uma reta se ele for paralelo à reta; isto é, se $\vec{d}$ é paralelo a $\overrightarrow{AB}$ para dois pontos distintos A e B da reta. Dessa forma, o próprio vetor $\overrightarrow{AB}$ é um vetor diretor da reta, mas há muitos outros. Na verdade, todo múltiplo escalar não nulo de um vetor diretor é também um vetor diretor.

Um vetor diretor de uma reta no espaço descreve a direção da reta. Esse papel é desempenhado pela inclinação das retas no plano, e o exemplo a seguir relaciona os dois conceitos.

Exemplo 1 Mostre que $\vec{d} = \begin{bmatrix} 1 \\ m \end{bmatrix}$ é um vetor diretor de toda reta com inclinação m no plano.

SOLUÇÃO Uma reta de inclinação m no plano tem equação $y = mx + b$ para algum número b. Tomando $x = 0$ e $x = 1$, obtemos dois pontos $P(0,\ b)$ e $Q(1,\ m + b)$ sobre a reta. Dessa forma, o vetor $\vec{d} = \overrightarrow{PQ} = \begin{bmatrix} 1-0 \\ (m+b)-b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ m \end{bmatrix}$ é paralelo à reta (ver Figura 3.38) e, portanto, servirá como um vetor diretor para a reta.

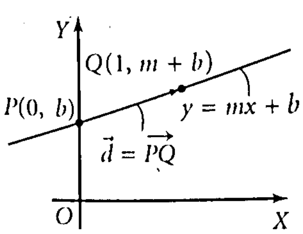


Figura 3.38

Suponha agora que sejam dados um ponto $P_0(x_0,\ y_0,\ z_0)$ e um vetor não nulo $\vec{d} = [a \ \ b \ \ c]^T$. Queremos determinar a única reta que passa por P_0 e tem a direção de $\vec{d}$, isto é, queremos dar uma condição para que um ponto $P = P(x,\ y,\ z)$ arbitrário esteja sobre essa reta. Sejam $\vec{p}_0 = [x_0 \ \ y_0 \ \ z_0]^T$ e $\vec{p} = [x \ \ y \ \ z]^T$ os vetores posição de P_0 e P respectivamente, de modo que $\overrightarrow{P_0P} = \vec{p} - \vec{p}_0$ (ver Figura 3.39).

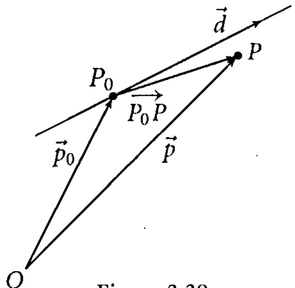


Figura 3.39

A idéia-chave é que P está sobre a reta se, e somente se, $\vec{p} - \vec{p}_0 = \overrightarrow{P_0P}$ for paralelo a $\vec{d}$, isto é, se, e somente se,

$$\vec{p} - \vec{p}_0 = t\vec{d} \qquad \text{para algum escalar } t.$$

Em outras palavras, o ponto P está sobre a reta se, e somente se, seu vetor posição $\vec{p}$ é da forma $\vec{p} = \vec{p}_0 + t\vec{d}$ para algum escalar t. Esta equação tem um nome.

Equação Vetorial da Reta. Considere a reta com vetor diretor $\vec{d} \neq \vec{0}$ que passa pelo ponto cujo vetor posição é $\vec{p}_0$. O ponto com vetor posição $\vec{p}$ está sobre a reta se, e somente se,

$$\vec{p} = \vec{p}_0 + t\vec{d} \qquad \text{para algum escalar } t.$$

Escrevendo as componentes dos vetores, a equação vetorial da reta torna-se

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{bmatrix} + t\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}$$

Igualando componente a componente, obtemos uma outra descrição da reta.

Equações Paramétricas de uma Reta. A reta que passa pelo ponto $P_0(x_0,\ y_0,\ z_0)$ com vetor diretor $\vec{d} = [a \quad b \quad c]^T \neq \vec{0}$ é dada por

$$\begin{aligned} x &= x_0 + ta \\ y &= y_0 + tb \qquad \text{para todo escalar } t \\ z &= z_0 + tc \end{aligned}$$

Em outras palavras, um ponto $P(x,\ y,\ z)$ está sobre a reta se, e somente se, existir um número real t tal que $x = x_0 + ta$, $y = y_0 + tb$ e $z = z_0 + tc$.

Observe que um vetor diretor $\vec{d}$ pode ser "lido" nas equações paramétricas de uma reta porque as componentes de $\vec{d}$ são os coeficientes do parâmetro t. Isso é análogo à "leitura" de que a inclinação da reta $y = 3 - 4x$ é o coeficiente -4 de x.

Os seguintes exemplos ilustram como essas equações são usadas para descrever retas e resolver problemas sobre retas.

Exemplo 2 Determine se $A(1,\ -5,\ 15)$ e $B(-1,\ 1,\ 4)$ estão sobre a reta de equações paramétricas

$$\begin{cases} x = -2 + t \\ y = 4 - 3t \\ z = -3 + 6t \end{cases}$$

SOLUÇÃO Todo ponto P sobre a reta é da forma $P(-2 + t,\ 4 - 3t,\ -3 + 6t)$ para algum t. Logo, A está sobre a reta se um número t puder ser encontrado de modo que $-2 + t = 1$, $4 - 3t = -5$, e $-3 + 6t = 15$. Como $t = 3$ satisfaz essas equações, o ponto A está de fato sobre a reta. Da mesma forma, B está sobre a reta se $-2 + t = -1$, $4 - 3t = 1$ e $-3 + 6t = 4$ para algum t. As duas primeiras equações indicam que $t = 1$, mas esse valor não satisfaz $-3 + 6t = 4$. Logo, não existe tal número t e, portanto, B não está sobre a reta.

Exemplo 3 Se $P(3,\ -1,\ 4)$ e $\vec{d} = [5 \quad -2 \quad 8]^T$, a reta que passa por P e tem vetor diretor $\vec{d}$ tem equação vetorial $\vec{p} = \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \\ 4 \end{bmatrix} + t\begin{bmatrix} 5 \\ -2 \\ 8 \end{bmatrix}$ e equações paramétricas $\begin{cases} x = 3 + 5t \\ y = -1 - 2t. \\ z = 4 + 8t \end{cases}$

Exemplo 4 Encontre as equações paramétricas da reta $\boxed{\text{que passa}}$ pelos pontos $A(2,\ 0,\ -3)$ e $B(1,\ 1,\ -5)$.

SOLUÇÃO Como ambos os pontos A e B estão sobre a reta, o vetor

$$\overrightarrow{AB} = \begin{bmatrix} 1-2 \\ 1-0 \\ -5-(-3) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix}$$

é um vetor paralelo à reta. Assim sendo, podemos usar $\vec{d} = \overrightarrow{AB}$ como um vetor diretor da reta. Usando $A(2,\ 0,\ -3)$ como o ponto sobre a reta, as equações paramétricas são

$$\begin{cases} x = 2 - t \\ y = t \\ z = -3 - 2t \end{cases}$$

Exemplo 5 Determine se as retas

$$\begin{aligned} x &= 2 - 5t \\ y &= -1 + t \\ z &= 3t \end{aligned} \qquad \text{e} \qquad \begin{aligned} x &= t \\ y &= -3 + 2t \\ z &= 5 + t \end{aligned}$$

são ortogonais.

SOLUÇÃO Os vetores $\vec{d}_1 = [-5\ \ 1\ \ 3]^T$ e $\vec{d}_2 = [1\ \ 2\ \ 1]^T$ são vetores diretores dessas retas e eles são ortogonais porque $\vec{d}_1 \cdot \vec{d}_2 = -5 + 2 + 3 = 0$. Logo, as retas são ortogonais.

Exemplo 6 Encontre as equações paramétricas da reta que passa por $A(4,\ -1,\ 5)$ e é paralela à reta

$$\begin{cases} x = 5 \\ y = 2 - t \\ z = -1 + 3t \end{cases}$$

SOLUÇÃO Um vetor diretor da reta dada é $\vec{d} = [0\ \ -1\ \ 3]^T$ e ele serve como vetor diretor da reta que queremos porque as retas são paralelas. Como o ponto $A(4,\ -1,\ 5)$ está sobre a reta que queremos, as equações paramétricas são $\begin{cases} x = 4 \\ y = -1 - t. \\ z = 5 + 3t \end{cases}$

Exemplo 7 Determine se as retas

$$\begin{aligned} x &= 2 - t \\ y &= 5 + 2t \\ z &= -1 + 3t \end{aligned} \qquad \text{e} \qquad \begin{aligned} x &= 3 + 2s \\ y &= 2 - 3s \\ z &= -6 - 4s \end{aligned}$$

se interceptam e, em caso afirmativo, encontre o ponto de interseção.

SOLUÇÃO Suponha que $P(x,\ y,\ z)$ seja o ponto de interseção. Então ele está sobre *ambas* as retas e, portanto, devem existir números reais t e s tais que $\begin{bmatrix} 2-t \\ 5+2t \\ -1+3t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3+2s \\ 2-3s \\ -6-4s \end{bmatrix}$.

Igualando as componentes, obtemos três equações em duas indeterminadas s e t:

$$\begin{aligned} 2 - t &= 3 + 2s \\ 5 + 2t &= 2 - 3s \\ -1 + 3t &= -6 - 4s \end{aligned}$$

Essas equações têm uma única solução $s = 1$ e $t = -3$, logo as retas se encontram no ponto $P(5,\ -1,\ -10)$ correspondente. (É claro que, se essas equações em s e t não tivessem uma solução, as retas não iriam se interceptar.)

Em um plano, duas retas são paralelas se tiverem a mesma inclinação. O próximo exemplo usa métodos vetoriais para deduzir um teste bastante conhecido para saber quando duas retas no plano são ortogonais.

Exemplo 8 Mostre que, em um plano, duas retas com inclinações m_1 e m_2 são perpendiculares se, e somente se, $m_1 m_2 = -1$.

SOLUÇÃO As duas retas têm vetores diretores $\vec{d}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ m_1 \end{bmatrix}$ e $\vec{d}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ m_2 \end{bmatrix}$ pelo Exemplo 1. Daí, as retas serão perpendiculares se, e somente se, $\vec{d}_1$ e $\vec{d}_2$ forem ortogonais, isto é (pelo Teorema 3 da Seção 3.2), se, e somente se, $\vec{d}_1 \cdot \vec{d}_2 = 0$. Mas essa última condição equivale a $1 + m_1 m_2 = 0$.[*]

Em aplicações de geometria, é freqüente a necessidade de se resolver um problema de otimização, isto é, maximizar ou minimizar alguma quantidade. Tais problemas podem, às vezes, ser resolvidos usando projeções. O exemplo a seguir fornece uma ilustração.

Exemplo 9 Encontre a menor distância do ponto $P(3,\ 5,\ 6)$ à reta que passa por $P_0(6,\ 1,\ -3)$ e tem a direção do vetor $\vec{d} = [-1\ \ 3\ \ 0]^T$. Depois, encontre o ponto Q sobre a reta que está mais próximo de P.

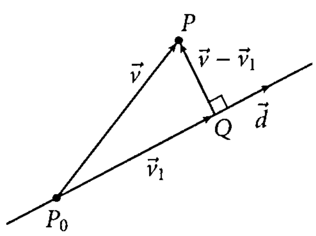


Figura 3.40

SOLUÇÃO Escreva $\vec{v} = \overrightarrow{P_0P} = [-3\ \ 4\ \ 9]^T$. Tendo a Figura 3.40 como referência, a distância pedida é $\|\vec{v} - \vec{v}_1\|$ em que $\vec{v}_1$ é a projeção de $\vec{v}$ sobre $\vec{d}$. Podemos calcular $\vec{v}_1$ da seguinte maneira:

$$\vec{v}_1 = proj_{\vec{d}}(\vec{v}) = \left(\frac{\vec{v} \cdot \vec{d}}{\|\vec{d}\|^2}\right)\vec{d} = \left(\frac{3+12+0}{1+9+0}\right)\vec{d} = \frac{3}{2}\begin{bmatrix} -1 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Então, a menor distância de P à reta é

$$\|\overrightarrow{QP}\| = \|\vec{v} - \vec{v}_1\| = \left\| \begin{bmatrix} -3 \\ 4 \\ 9 \end{bmatrix} - \frac{3}{2}\begin{bmatrix} -1 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix} \right\| = \left\| \frac{1}{2}\begin{bmatrix} -3 \\ -1 \\ 18 \end{bmatrix} \right\| = \frac{1}{2}\sqrt{334}.$$

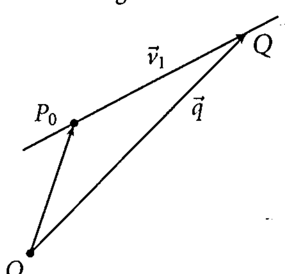


Figura 3.41

Observe que não tivemos que determinar o ponto Q para encontrar a distância. Entretanto, é fácil encontrar Q. Sejam $\vec{p}_0 = [6\ \ 1\ \ -3]^T$ e $\vec{q} = [x\ \ y\ \ z]^T$ os vetores posição de P_0 e Q, respectivamente. Então, a Figura 3.41 fornece

$$\vec{q} = \vec{p}_0 + \vec{v}_1 = \begin{bmatrix} 6 \\ 1 \\ -3 \end{bmatrix} + \frac{3}{2}\begin{bmatrix} -1 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{9}{2} \\ \frac{11}{2} \\ -3 \end{bmatrix}.$$

Segue que $Q = Q\left(\frac{9}{2},\ \frac{11}{2},\ -3\right)$ é o ponto da reta mais próximo de P.

3.3.3 Planos

A direção de uma reta é descrita especificando-se um vetor diretor para a reta. Analogamente, a orientação de um plano no espaço pode ser descrita por um vetor da seguinte maneira. Um vetor não nulo é um vetor **normal** ao plano se ele for ortogonal a todo vetor representado no plano. Como no caso dos vetores diretores, há muitos vetores normais a um plano dado. Em particular, todo múltiplo escalar não nulo de um vetor normal é também um vetor normal.

Dado um ponto $P_0(x_0,\ y_0,\ z_0)$ e um vetor não nulo $\vec{n} = [a\ \ b\ \ c]^T$, é claro geometricamente que há exatamente um plano com vetor normal $\vec{n}$ que contém o ponto P_0. Nossa meta agora é descrever esse único plano. Em outras palavras, fornecido um ponto arbitrário $P(x,\ y,\ z)$, devemos dar uma condição (que acaba sendo uma equação) para que P esteja sobre o plano.

[*]NTT: Convencionamos dizer que duas retas são *ortogonais* se seus vetores diretores forem ortogonais e são *perpendiculares* se, além disso, elas se interceptarem. No caso de retas no plano, se elas forem ortogonais, serão necessariamente perpendiculares. No que se refere às de retas no espaço, isso pode não acontecer, já que elas podem ser ortogonais, mas estarem contidas em planos paralelos distintos.

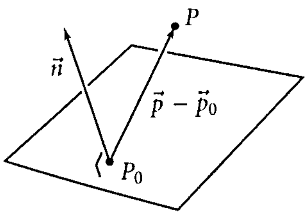


Figura 3.42

Sejam $\vec{p}_0$ e $\vec{p}$ be os vetores posição de P_0 e P, respectivamente. Então (ver Figura 3.42), P está sobre o plano se, e somente se, $\vec{n}$ for ortogonal a $\overrightarrow{P_0P} = \vec{p} - \vec{p}_0$, isto é, se, e somente se, $\vec{n} \cdot (\vec{p} - \vec{p}_0) = 0$. Essa é a

Equação Normal de um Plano. Considere o plano com vetor normal $\vec{n} \neq \vec{0}$ que contém o ponto $P_0(x_0,\ y_0,\ z_0)$. O ponto cujo vetor posição é $\vec{p}$ está sobre esse plano se, e somente se,

$$\vec{n} \cdot (\vec{p} - \vec{p}_0) = 0.$$

Sejam agora $\vec{n}$, $\vec{p}_0$ e $\vec{p}$ dados na forma de matriz, digamos $\vec{n} = [a \ \ b \ \ c]^T$, $\vec{p}_0 = [x_0 \ \ y_0 \ \ z_0]^T$ e $\vec{p} = [x \ \ y \ \ z]^T$. Então $\vec{p} - \vec{p}_0 = [x - x_0 \ \ y - y_0 \ \ z - z_0]^T$. Logo, a equação normal $\vec{n} \cdot (\vec{p} - \vec{p}_0) = 0$ torna-se uma descrição escalar do plano.

Equação Geral de um Plano. O plano que passa por $P_0(x_0,\ y_0,\ z_0)$ e tem vetor normal $\vec{n} = [a \ \ b \ \ c]^T \neq \vec{0}$ tem equação

$$a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0.$$

Em outras palavras, um ponto $P(x,\ y,\ z)$ está no plano se, e somente se, x, y e z satisfazem essa equação.

Exemplo 10 O plano que passa por $P_0(-2,\ 3,\ 5)$ e tem vetor normal $\vec{n} = [7 \ \ -4 \ \ 8]^T$ tem equação

$$7(x - (-2)) - 4(y - 3) + 8(z - 5) = 0.$$

Isso se simplifica para $7x - 4y + 8z = 14$.

A equação geral $a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0$ de um plano pode ser escrita da seguinte maneira:

$$ax + by + cz = ax_0 + by_0 + cz_0.$$

A quantidade $ax_0 + by_0 + cz_0$ no lado direito é uma constante que depende de P_0 e $\vec{n}$. Se a escrevermos como k, teremos provado a parte (1) do teorema a seguir.

TEOREMA 1 Seja $\vec{n} = [a \ \ b \ \ c]^T \neq \vec{0}$ um vetor não nulo fixado.

(1) Todo plano com vetor normal $\vec{n}$ tem equação $ax + by + cz = k$ para alguma constante k.

(2) Para toda constante k, o gráfico da equação $ax + by + cz = k$ é um plano com vetor normal $\vec{n}$.

DEMONSTRAÇÃO Resta demonstrar (2). Como $\vec{n} \neq \vec{0}$, uma das componentes a, b e c é não nula. Se $a \neq 0$, a equação $ax + by + cz = k$ pode ser escrita como

$$a\left(x - \tfrac{k}{a}\right) + b(y - 0) + c(z - 0) = 0$$

e, portanto, é a equação do plano que passa por $P_0\left(\tfrac{k}{a},\ 0,\ 0\right)$ com vetor normal $\vec{n}$. Um argumento análogo funciona se $b \neq 0$ ou $c \neq 0$.

Em particular, se for dada a equação $ax + by + cz = k$ de um plano, as componentes de um vetor normal $\vec{n} = [a \ \ b \ \ c]^T$ ao plano podem ser "lidas" como os coeficientes de x, y e z na equação.

Exemplo 11 Encontre a equação do plano que passa por $P(4,\ 0,\ -1)$ e é paralelo ao plano de equação $3x - 2y + z = 9$.

SOLUÇÃO O plano dado tem $\vec{n} = [3 \ \ -2 \ \ 1]^T$ como vetor normal pelo Teorema 1. Logo, $\vec{n}$ será vetor normal ao plano que queremos (porque os dois planos são paralelos). Daí, nosso plano tem equação $3x - 2y + z = k$ para alguma constante k, novamente pelo Teorema 1. A constante k é determinada pelo fato que $P(4,\ 0,\ -1)$ está no plano. Na verdade, isso quer dizer que $3 \cdot 4 - 2 \cdot 0 + (-1) = k$, donde $k = 11$. Portanto, a equação pedida é $3x - 2y + z = 11$.

Exemplo 12 Encontre a distância mais curta do ponto $P(1,\ 5,\ 5)$ ao plano de equação $2x - y + 3z = 5$,* e encontre o ponto Q no plano que está mais perto de P.

Há duas abordagens para este problema e nós apresentamos as duas para ilustrar as técnicas.

SOLUÇÃO 1 Escolha qualquer ponto P_0 no plano, digamos $P_0(1,\ 0,\ 1)$, e calcule $\vec{v} = \overrightarrow{P_0P} = [0\ \ 5\ \ 4]^T$. Posicione o vetor normal $\vec{n} = [2\ \ -1\ \ 3]^T$ com sua origem em P_0 como na Figura 3.43, e calcule a projeção $\vec{v}_1$ de $\vec{v}$ sobre $\vec{n}$:

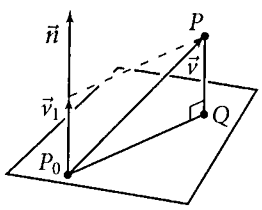


Figura 3.43

$$\vec{v}_1 = proj_{\vec{n}}(\vec{v}) = \frac{\vec{v} \cdot \vec{n}}{\|\vec{n}\|^2}\vec{n} = \frac{0-5+12}{4+1+9}\vec{n} = \frac{1}{2}\vec{n}.$$

Observe agora que $\overrightarrow{QP} = \vec{v}_1$, como na Figura 3.43. Assim, a distância pedida é

$$\|\overrightarrow{QP}\| = \|\vec{v}_1\| = \left\|\tfrac{1}{2}\vec{n}\right\| = \tfrac{1}{2}\|\vec{n}\| = \tfrac{1}{2}\sqrt{14}.$$

Observe que não tivemos de encontrar Q para sermos capazes de calcular a menor distância. Entretanto, não é difícil encontrar o ponto Q. Sejam $\vec{p}$ e $\vec{q}$ os vetores posição de P e Q, respectivamente. Assim, $\vec{p} = \vec{q} + \overrightarrow{QP} = \vec{q} + \vec{v}_1$ pela Figura 3.44 e, então,

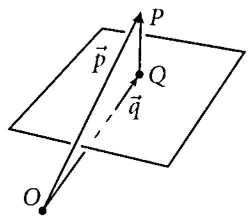


Figura 3.44

$$\vec{q} = \vec{p} - \vec{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 5 \\ 5 \end{bmatrix} - \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{11}{2} \\ \frac{7}{2} \end{bmatrix}.$$

Assim, $Q = Q\left(0,\ \frac{11}{2},\ \frac{7}{2}\right)$.

SOLUÇÃO 2 O ponto Q é o ponto de interseção do plano dado com a reta que passa por P e é perpendicular ao plano (ver Figura 3.45). Mas $\vec{n} = [2\ \ -1\ \ 3]^T$ é um vetor diretor para essa reta, logo a reta é dada pela equação

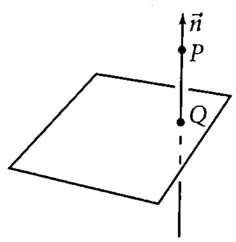


Figura 3.45

$$[x\ \ y\ \ z]^T = [1\ \ 5\ \ 5]^T + t[2\ \ -1\ \ 3]^T, \text{ sendo } t \text{ escalar.}$$

Como Q está nessa reta, temos $Q = Q(1 + 2t,\ 5 - t,\ 5 + 3t)$ para algum t. Mas Q também está no plano, logo suas coordenadas devem satisfazer a equação do plano:

$$2(1 + 2t) - (5 - t) + 3(5 + 3t) = 5$$

Resolvendo a equação em t, obtemos $t = -\frac{1}{2}$. Logo,

$$Q = Q\left(1 - 1,\ 5 + \tfrac{1}{2},\ 5 - \tfrac{3}{2}\right) = Q\left(0,\ \tfrac{11}{2},\ \tfrac{7}{2}\right) \text{ como antes.}$$

Além disso, tendo encontrado Q, a distância pedida é

$$\|\overrightarrow{QP}\| = \|\vec{p} - \vec{q}\| = \left\|\left[1\ \ \tfrac{-1}{2}\ \ \tfrac{3}{2}\right]^T\right\| = \left\|\tfrac{1}{2}[2\ \ -1\ \ 3]^T\right\| = \tfrac{1}{2}\sqrt{14}.$$

Novamente, isso está de acordo com a Solução 1.

3.3.4 O Produto Vetorial

É bastante claro do ponto de vista geométrico, que há um único plano que contém três pontos A, B e C que não estejam todos em uma mesma reta. Para determinar a equação desse plano a dificuldade é encontrar um vetor normal ao plano. Como qualquer vetor não nulo ortogonal a ambos os vetores $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{AC}$ será um vetor normal ao plano, o que precisamos é de uma forma sistemática de encontrar um vetor não nulo ortogonal a quaisquer dois vetores não paralelos. O produto vetorial resolve esse problema (e tem outros usos também, como veremos na Seção 3.5).

Dados vetores $\vec{v} = \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{bmatrix}$ e $\vec{w} = \begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{bmatrix}$, o vetor

$$\vec{v} \times \vec{w} = \begin{bmatrix} y_1z_2 - y_2z_1 \\ -(x_1z_2 - x_2z_1) \\ x_1y_2 - x_2y_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} det\begin{bmatrix} y_1 & y_2 \\ z_1 & z_2 \end{bmatrix} \\ -det\begin{bmatrix} x_1 & x_2 \\ z_1 & z_2 \end{bmatrix} \\ det\begin{bmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{bmatrix} \end{bmatrix} \quad (*)$$

*NTT: Isto é, a menor dentre todas as distâncias de P até cada ponto R do plano.

é chamado **produto vetorial** de $\vec{v}$ e $\vec{w}$. Ele é mais facilmente memorizado da seguinte maneira: escreva $\vec{v}$ e $\vec{w}$ lado a lado formando uma matriz 3×2:

$$[\vec{v} \quad \vec{w}] = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \\ z_1 & z_2 \end{bmatrix}.$$

Se apagarmos as linhas 1, 2 ou 3 dessa matriz e tomarmos o determinante do que sobra obtemos, respectivamente, as componentes 1, 2 ou 3 de $\vec{v} \times \vec{w}$, exceto pelo sinal menos no termo do meio.[10] Essa é uma boa maneira de lembrar a definição de $\vec{v} \times \vec{w}$.

Você pode verificar diretamente que $\vec{v} \cdot (\vec{v} \times \vec{w}) = 0$ e $\vec{w} \cdot (\vec{v} \times \vec{w}) = 0$, logo $\vec{v} \times \vec{w}$ é de fato ortogonal a ambos $\vec{v}$ e $\vec{w}$. Isso prova a primeira asserção do seguinte Teorema. A demonstração da segunda asserção será adiada para a Seção 3.5.

TEOREMA 2 Sejam $\vec{v}$ e $\vec{w}$ vetores no espaço. Então:

(1) $\vec{v} \times \vec{w}$ é um vetor ortogonal a ambos $\vec{v}$ e $\vec{w}$.
(2) $\vec{v} \times \vec{w} = \vec{0}$ se, e somente se, $\vec{v}$ e $\vec{w}$ são paralelos.

A asserção em (2) do Teorema 2 é um interessante contraponto ao Teorema 3 da Seção 3.2:

$$\vec{v} \cdot \vec{w} = 0 \quad \text{se, e somente se,} \quad \vec{v} \text{ e } \vec{w} \text{ são ortogonais.}$$

Exemplo 13 Se $\vec{v} = \begin{bmatrix} 4 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}$ e $\vec{w} = \begin{bmatrix} 5 \\ 2 \\ -3 \end{bmatrix}$, então $\vec{v} \times \vec{w} = \begin{bmatrix} -1 \\ 22 \\ 13 \end{bmatrix}$, que é ortogonal a ambos $\vec{v}$ e $\vec{w}$, como afirma o Teorema 2.

Os três exemplos a seguir ilustram como o produto vetorial é aplicado ao estudo de retas e planos.

Exemplo 14 Encontre a equação do plano contendo os pontos $A(3,\ 0,\ -1)$, $B(1,\ 1,\ 1)$ e $C(2,\ -3,\ 1)$.

SOLUÇÃO Os vetores $\overrightarrow{AB} = [-2 \quad 1 \quad 2]^T$ e $\overrightarrow{AC} = [-1 \quad -3 \quad 2]^T$ se posicionam no plano (ver Figura 3.46). Logo, se seu produto vetorial for não nulo, será normal ao plano. Calcule:

$$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \begin{bmatrix} 8 \\ 2 \\ 7 \end{bmatrix}.$$

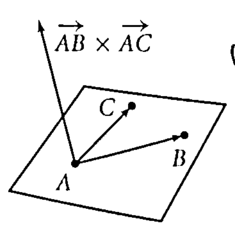


Figura 3.46

Usando $\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}$ como vetor normal, o plano (que queremos determinar) tem equação $8x + 2y + 7z = k$ para algum número k. Como o ponto $A(3,\ 0,\ -1)$ está no plano, obtemos $k = 8 \cdot 3 + 2 \cdot 0 + 7(-1) = 17$. Assim sendo, a equação desejada é $8x + 2y + 7z = 17$.

Exemplo 15 Encontre a equação do plano que passa por $P(1,\ 0,\ -2)$ e contém a reta

$$\begin{cases} x = 2 - t \\ y = -3 \\ z = t \end{cases}.$$

SOLUÇÃO Os pontos $P(1,\ 0,\ -2)$ e $Q(2,\ -3,\ 0)$ estão ambos no plano (Q está sobre a reta). Logo, o vetor $\vec{v} = \overrightarrow{QP} = [-1 \quad 3 \quad -2]^T$ está posicionado sobre o plano (ver Figura 3.47). Como o vetor diretor $\vec{d} = [-1 \quad 0 \quad 1]^T$ da reta também pode ser posicionado sobre o plano, $\vec{v} \times \vec{d}$ é ortogonal ao plano. Temos $\vec{v} \times \vec{d} = \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \\ 3 \end{bmatrix}$. Assim sendo, podemos tomar $\vec{n} = [1 \quad 1 \quad 1]^T$ como vetor normal ao plano (qualquer múltiplo escalar de $\vec{v} \times \vec{d}$ também serve). Logo, a equação do plano é $x + y + z = k$ para algum número k. Como $P(1,\ 0,\ -2)$ está no plano, obtemos $k = 1 + 0 - 2 = -1$. Portanto, a equação pedida é $x + y + z = -1$.

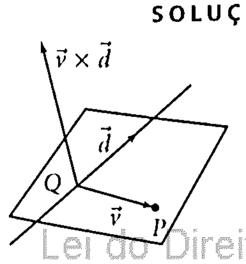


Figura 3.47

[10] A conexão com determinantes que é evidente aqui será explorada em mais detalhes na Seção 3.5.

Como uma verificação, observe que todo ponto R da reta dada tem coordenadas da forma $R(2-t,\ -3,\ t)$ para algum valor de t, logo R pertence ao plano $x+y+z=-1$ porque $(2-t)-3+t=-1$ para todo t. Assim, a *reta inteira* está contida no plano, como solicitado.

Exemplo 16 Encontre a menor distância entre as retas*

$$\begin{cases} x = 3+t \\ y = -1+t \\ z = 2 \end{cases} \quad \text{e} \quad \begin{cases} x = t \\ y = 5-2t. \\ z = 2+t \end{cases}$$

e encontre os pontos A_1 e A_2, um em cada reta, que são os mais próximos um do outro.

SOLUÇÃO A primeira reta contém o ponto $P_1(3,\ -1,\ 2)$ e tem vetor diretor $\vec{d}_1 = [1\ \ 1\ \ 0]^T$. A segunda reta contém $P_2(0,\ 5,\ 2)$ e tem vetor diretor $\vec{d}_2 = [1\ \ -2\ \ 1]^T$. Assim sendo, $\vec{n} = \vec{d}_1 \times \vec{d}_2 = [1\ \ -1\ \ -3]^T$ é um vetor ortogonal a ambas as retas. Devemos encontrar a distância entre os pontos A_1 e A_2 mostrados na Figura 3.48. (Esses pontos pertencem à reta perpendicular comum às duas retas dadas.)

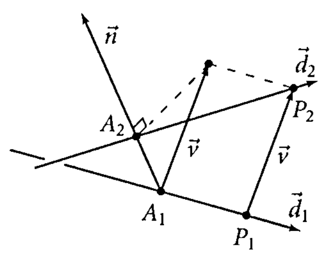


Figura 3.48

O ponto A_1 está no plano que passa por P_1 e tem vetor normal $\vec{n}$, ao passo que A_2 está no plano que contém P_2 e vetor normal $\vec{n}$. Portanto, devemos calcular a distância entre esses planos paralelos. Observe que o vetor $\vec{v} = \overrightarrow{P_1P_2} = [-3\ \ 6\ \ 0]^T$ tem origem em um plano e extremidade no outro. Assim sendo, se posicionarmos $\vec{v}$ de modo que sua origem fique em A_1, como na Figura 3.48, a extremidade de $\vec{v}$ irá permanecer ao outro plano. Logo, a distância pedida é o comprimento de $\|\vec{v}_1\|$ onde $\vec{v}_1$ é a projeção de $\vec{v}$ sobre $\vec{n}$. Temos $\vec{v}_1 = proj_{\vec{n}}(\vec{v}) = \left(\frac{\vec{v}\cdot\vec{n}}{\|\vec{n}\|^2}\right)\vec{n} = -\frac{9}{11}\vec{n}$. Logo, a distância é $\|\vec{v}_1\| = \left|-\frac{9}{11}\right| \|\vec{n}\| = \frac{9}{11}\sqrt{11}$.

Esse cálculo fornece a distância sem que os pontos A_1 e A_2 sejam determinados. Entretanto, esses pontos podem ser encontrados da seguinte maneira. Observe que as coordenadas de A_1 são $A_1 = A_1(3+t,\ -1+t,\ 2)$ para algum t, já que A_1 pertence à primeira reta e, analogamente,

$A_2 = A_2(s,\ 5-2s,\ 2+s)$ para algum s. Daí $\overrightarrow{A_1A_2} = \begin{bmatrix} s-3-t \\ 6-2s-t \\ s \end{bmatrix}$ e os parâmetros s e t são determinados pelo fato que $\overrightarrow{A_1A_2}$ é ortogonal tanto a $\vec{d}_1$ quanto a $\vec{d}_2$. Isso significa que

$$\begin{cases} \vec{d}_1 \cdot (\overrightarrow{A_1A_2}) = 0 \\ \vec{d}_2 \cdot (\overrightarrow{A_1A_2}) = 0 \end{cases} \quad \text{levando às equações} \quad \begin{cases} s+2t = 3 \\ 6s+t = 15 \end{cases}$$

A solução é $s = \frac{27}{11}$ e $t = \frac{3}{11}$, donde $A_1 = A_1\left(\frac{36}{11},\ -\frac{8}{11},\ 2\right)$ e $A_2 = A_2\left(\frac{27}{11},\ \frac{1}{11},\ \frac{49}{11}\right)$. Você pode verificar que $\|\overrightarrow{A_1A_2}\| = \frac{9}{11}\sqrt{11}$ como obtido anteriormente.

Exercícios 3.3

1. Explique a diferença entre um ponto e seu vetor posição; entre as coordenadas de um ponto e as componentes de seu vetor posição.

2. Em cada caso, encontre equações paramétricas para a reta:
   - **a)** Paralela a $[0\ \ -1\ \ 3]^T$ e que passa por $P(4,\ -3,\ 5)$.
   - **b)** Paralela a $[3\ \ -2\ \ 0]^T$ e que passa por $P(-3,\ 0,\ 7)$.
   - **c)** Que passa por $P(5,\ -7,\ 2)$ e $Q(0,\ 0,\ 4)$.
   - **d)** Que passa por $P(9,\ -3,\ 1)$ e $Q(-2,\ 6,\ -4)$.
   - **e)** Que passa por $P(8,\ 4,\ -1)$ e é paralela à reta $[x\ \ y\ \ z]^T = [2\ \ 9\ \ -3]^T + t[5\ \ 1\ \ 6]^T$.
   - **f)** Que passa por $P(1,\ 2,\ 0)$ e é paralela à reta $[x\ \ y\ \ z]^T = [0\ \ 0\ \ 1]^T + t[-7\ \ 3\ \ -5]^T$.
   - **g)** Que passa por $P(6,\ 0,\ -2)$ e é paralela à reta que passa por $Q(1,\ 1,\ 1)$ e $R(2,\ 2,\ 2)$.
   - **h)** Que passa por $P(2,\ -5,\ 7)$ e é paralela à reta que passa por $Q(0,\ 1,\ 2)$ e $R(-5,\ 7,\ 3)$.
   - **i)** Que passa por $P(2,\ -5,\ 7)$ e é perpendicular ao plano $3x-2y+5z=7$.
   - **j)** Que passa por $P(1,\ 2,\ -9)$ e é perpendicular ao plano $4y-3z=2$.

* NTT: O conceito de **distância entre duas retas** não foi definido anteriormente. O texto usa a expressão "menor distância" de modo intuitivo. Em rigor, o adjetivo *menor* é supérfluo, pois a distância entre duas retas é definida como a menor dentre todas as distâncias possíveis entre um ponto de uma das retas e outro da outra. A distância entre planos é definida de modo análogo.

k) Que passa por $P(6,\ 0,\ -3)$ e é perpendicular à reta $[x\ \ y\ \ z]^T = [1\ \ 2\ \ -3]^T + t[1\ \ -2\ \ 0]^T$.

l) Que passa por $P(-7,\ 2,\ 7)$ e é perpendicular à reta $[x\ \ y\ \ z]^T = [0\ \ -1\ \ 2]^T + t[5\ \ 1\ \ 1]^T$.

3. A reta que passa pelos pontos $A(2,\ -1,\ 4)$ e $B(-1,\ 3,\ 5)$ contém o ponto $P(1,\ 2,\ 4)$? E o ponto $Q(-7,\ 11,\ 7)$? Justifique suas respostas.

4. Em cada caso, determine se os pontos dados estão alinhados. Justifique sua resposta.

a) $A(2,\ 1,\ 3), B(-1,\ 2,\ 7), C(5,\ 0,\ 4)$

b) $A(1,\ 2,\ -1), B(0,\ 5,\ 1), C(2,\ -1,\ -3)$.

5. Descreva as equações de todas as retas paralelas ao eixo X.

6. Encontre todos os pontos C sobre a reta que passa por $A(1,\ -1,\ 2)$ e $B(2,\ 0,\ 1)$ tais que $\|\overrightarrow{AC}\| = 2\|\overrightarrow{BC}\|$.

7. Em cada caso, ou encontre o ponto de interseção das duas retas ou mostre por que tal ponto não existe.

a) $x = 2 - t \qquad x = 3 - 2s$
$y = 3 - t \qquad y = s$
$z = 1 \qquad z = 5 - 3s$

b) $x = 1 - 3t \qquad x = 1 + s$
$y = 7 - 2t \qquad y = 2 - s$
$z = 3 + t \qquad z = 1 - s$

c) $[x\ \ y\ \ z]^T = [3\ \ 1\ \ 2]^T + t[-1\ \ 1\ \ -1]^T$
$[x\ \ y\ \ z]^T = [3\ \ 1\ \ 5]^T + t[1\ \ -1\ \ 0]^T$

d) $[x\ \ y\ \ z]^T = [0\ \ 1\ \ 2]^T + t[3\ \ -1\ \ -1]^T$
$[x\ \ y\ \ z]^T = [1\ \ 3\ \ 5]^T + t[-2\ \ 1\ \ 1]^T$

8. Em cada caso, encontre a distância do ponto P à reta dada, e encontre o ponto Q sobre a reta que está mais próximo de P.

a) $P(1,\ 2,\ -3);\ [x\ \ y\ \ z]^T = [1\ \ 2\ \ 0]^T + t[-3\ \ 5\ \ 4]^T$

b) $P(-1,\ 0,\ 1);\ [x\ \ y\ \ z]^T = [3\ \ -1\ \ 4]^T + t[3\ \ -2\ \ 0]^T$

c) $P(-3,\ 0,\ 5);\ [x\ \ y\ \ z]^T = [3\ \ -1\ \ 2]^T + t[2\ \ -1\ \ 2]^T$

d) $P(1,\ 1,\ -1);\ [x\ \ y\ \ z]^T = [4\ \ 2\ \ -3]^T + t[1\ \ -5\ \ 0]^T$

9. O plano $2x - 3y + z = 6$ contém o ponto $P(1,\ -2,\ -2)$? E o ponto $Q(5,\ -6,\ 0)$? Justifique suas respostas.

10. Em cada caso, encontre uma equação para o plano:

a) Que passa por $P(3,\ -7,\ 5)$ e é paralelo ao plano de equação $3x - y + 2z = 5$.

b) Que passa por $P(1,\ -2,\ 4)$ e é paralelo ao plano de equação $x - 2y + 3z = -6$.

c) Que contém $P(2,\ -3,\ 0)$ e é perpendicular à reta $[x\ \ y\ \ z]^T = [2\ \ -5\ \ 3]^T + t[6\ \ -6\ \ 5]^T$.

d) Que contém $P(1,\ -1,\ 4)$ e é perpendicular à reta $[x\ \ y\ \ z]^T = [7\ \ 0\ \ 5]^T + t[2\ \ 1\ \ -7]^T$.

e) Que é eqüidistante dos pontos $A(1, -3, 7)$ e $B(3, -5, 9)$.

f) Que é eqüidistante dos pontos $A(6, 0, 2)$ e $B(1, 1, -3)$.

11. Em cada caso, calcule $\vec{v} \times \vec{w}$.

a) $\vec{v} = [2\ \ 1\ \ -3]^T$ e $\vec{w} = [1\ \ 2\ \ 1]^T$

b) $\vec{v} = [3\ \ -5\ \ 1]^T$ e $\vec{w} = [1\ \ 1\ \ 2]^T$

c) $\vec{v} = [3\ \ 2\ \ -1]^T$ e $\vec{w} = [-6\ \ -4\ \ 2]^T$

d) $\vec{v} = [1\ \ 1\ \ 1]^T$ e $\vec{w} = [4\ \ 2\ \ -3]^T$

12. Em cada caso, encontre equações paramétricas para a reta:

a) Que contém $P(7,\ 1,\ 0)$ e é ortogonal às retas $[x\ \ y\ \ z]^T = [9\ \ -1\ \ 4]^T + t[-2\ \ 1\ \ 3]^T$ e $[x\ \ y\ \ z]^T = [1\ \ 1\ \ 1]^T + t[6\ \ -2\ \ 3]^T$.

b) Que contém $P(2,\ -1,\ 3)$ e é ortogonal às retas $[x\ \ y\ \ z]^T = [4\ \ -1\ \ 2]^T + t[7\ \ 0\ \ 1]^T$ e $[x\ \ y\ \ z]^T = [-2\ \ 0\ \ 1]^T + t[2\ \ 3\ \ 0]^T$.

c) De interseção dos planos $2x - 3y + z = 0$ e $3x - 2y + 5z = 4$.

d) De interseção dos planos $2x - y - 3z = 1$ e $-x - 3y + 5z = 0$.

13. Em cada caso, encontre uma equação para o plano:

a) Que passa por $A(3,\ 1,\ 2), B(5,\ -1,\ 3)$ e $C(-4,\ 2,\ 0)$.

b) Que passa por $A(6,\ -1,\ 1), B(1,\ 0,\ 0)$ e $C(21,\ 3,\ 2)$.

c) Que passa por $A(6,\ 1,\ 0)$ e é perpendicular à reta $[x\ \ y\ \ z]^T = [4\ \ 0\ \ -3]^T + t[1\ \ -1\ \ 4]^T$.

d) Que passa por $A(1,\ -1,\ 3)$ e é perpendicular à reta $[x\ \ y\ \ z]^T = [5\ \ 5\ \ 5]^T + t[8\ \ -2\ \ 0]^T$.

e) Que passa por $P(2,\ 0,\ 3)$ e é paralelo ao plano determinado pelos pontos $A(1,\ 1,\ -5), B(0,\ 1,\ -2)$ e $C(1,\ 0,\ 6)$.

f) Que passa por $P(2,\ -1,\ 5)$ e é paralelo ao plano determinado pelos pontos $A(3,\ -7,\ 1), B(2,\ 0,\ -1)$ e $C(1,\ 3,\ 0)$.

g) Que contém $A(2,\ 1,\ -1)$ e a reta $[x\ \ y\ \ z]^T = [3\ \ -1\ \ 0]^T + t[0\ \ -1\ \ 2]^T$.

h) Que contém $A(0,\ -2,\ 3)$ e a reta $[x\ \ y\ \ z]^T = [1\ \ -5\ \ 2]^T + t[-1\ \ 3\ \ 5]^T$.

i) Que contém as retas $[x\ \ y\ \ z]^T = [2\ \ 1\ \ 0]^T + t[1\ \ 1\ \ -2]^T$ e $[x\ \ y\ \ z]^T = [1\ \ 6\ \ 2]^T + t[2\ \ -1\ \ -4]^T$.

j) Que contém as retas $[x\ \ y\ \ z]^T = [1\ \ 1\ \ -2]^T + t[3\ \ 0\ \ 4]^T$ e $[x\ \ y\ \ z]^T = [7\ \ -1\ \ 7]^T + t[3\ \ -2\ \ 5]^T$.

14. Em cada caso, determine se os pontos dados estão todos sobre o mesmo plano. Justifique sua resposta.

a) $A(1,\ 0,\ 1), B(2,\ 3,\ 0), C(-1,\ 1,\ 2), D(5,\ 1,\ 1)$

b) $A(0,\ 2,\ 1), B(1,\ 4,\ 1), C(2,\ 0,\ -1), D(-1,\ 3,\ 2)$

c) $A(2,\ 1,\ 0), B(3,\ 0,\ 3), C(3,\ 3,\ 3), D(0,\ 1,\ -6)$

d) $A(1,\ -3,\ 2), B(2,\ -4,\ 4), C(3,\ -2,\ 2), D(5,\ 1,\ 1)$

15. Em cada caso, encontre a (menor) distância entre as retas paralelas.

a) $[x\ \ y\ \ z]^T = [2\ \ 1\ \ 0]^T + t[1\ \ 1\ \ -2]^T$ e $[x\ \ y\ \ z]^T = [3\ \ 3\ \ 0]^T + t[1\ \ 1\ \ -2]^T$.

b) $[x\ \ y\ \ z]^T = [1\ \ 1\ \ 1]^T + t[2\ \ 0\ \ -3]^T$ e $[x\ \ y\ \ z]^T = [3\ \ 1\ \ 2]^T + t[2\ \ 0\ \ -3]^T$.

16. Em cada caso, encontre a (menor) distância entre as retas não paralelas.

a) $[x\ \ y\ \ z]^T = [3\ \ 0\ \ -1]^T + t[1\ \ 1\ \ 0]^T$ e $[x\ \ y\ \ z]^T = [2\ \ -3\ \ 5]^T + t[2\ \ 1\ \ -1]^T$.

b) $[x\ \ y\ \ z]^T = [3\ \ 1\ \ -2]^T + t[2\ \ 1\ \ -3]^T$ e $[x\ \ y\ \ z]^T = [2\ \ 3\ \ -1]^T + t[1\ \ 1\ \ 1]^T$.

c) $[x\ \ y\ \ z]^T = [7\ \ 8\ \ 1]^T + t[3\ \ -2\ \ 5]^T$ e $[x\ \ y\ \ z]^T = [6\ \ 1\ \ 5]^T + t[-1\ \ -3\ \ -2]^T$.

d) $[x\ \ y\ \ z]^T = [5\ \ 6\ \ 7]^T + t[-1\ \ -2\ \ -3]^T$ e $[x\ \ y\ \ z]^T = [3\ \ -1\ \ 2]^T + t[0\ \ 0\ \ 1]^T$.

17. Dê uma regra para determinar se o plano de equação $ax + by + cz = k$ passa pela origem.

18. Descreva as equações de todos os planos que são perpendiculares ao eixo Z.

19. Em cada caso, determine se a reta dada está contida no plano dado. Justifique sua resposta.

a) Reta que passa por $P(1,\ 2,\ -3)$ e tem vetor diretor $\vec{d} = [1 \ \ 1 \ \ -1]^T$, plano $2x - y + z = -3$.

b) Reta que passa por $P(-1,\ 3,\ 1)$ e tem vetor diretor $\vec{d} = [0 \ \ 2 \ \ 5]^T$, plano $x - y + z = 1$.

20. Em cada caso, determine se o plano dado contém a reta dada. Justifique sua resposta.

a) Plano $2x - 3y + z = 1$, reta $[x \ \ y \ \ z]^T = [3 \ \ 2 \ \ 1]^T + t[2 \ \ 0 \ \ -4]^T$.

b) Plano $x + 2y - 3z = 5$, reta $[x \ \ y \ \ z]^T = [3 \ \ 7 \ \ 5]^T + t[1 \ \ 1 \ \ 1]^T$.

21. Em cada caso, encontre o ponto de interseção do plano com a reta.

a) $x - 3y + 2z = 7$ e $[x \ \ y \ \ z]^T = [2 \ \ 0 \ \ -1]^T + t[4 \ \ -1 \ \ 2]^T$.

b) $2x + 4y - 3z = 1$ e $[x \ \ y \ \ z]^T = [5 \ \ -3 \ \ 1]^T + t[0 \ \ 2 \ \ -3]^T$.

22. Mostre que todo plano que contém $A(1,\ -3,\ 2)$ e $B(4,\ 5,\ 0)$ deve conter também $C(7,\ 13,\ -2)$.

23. Em cada caso, encontre a (menor) distância do ponto P ao plano, e encontre o ponto Q no plano que está mais próximo de P.

a) $P(1,\ 0,\ -2)$; $3x - y + 4z = 5$

b) $P(3,\ -1,\ 1)$; $3x - y + 4z = 5$

c) $P(5,\ 1,\ -3)$; $2x - 3y + z = 1$

d) $P(-7,\ -10,\ 9)$; $x - 3y + 2z = 6$

24. Em cada caso, encontre a solução do sistema de equações lineares que está mais próxima do ponto dado.

a)
$$\begin{aligned} 2x - 3y + 5z &= 2 \\ x + 2y - z &= 1 \\ 3x - y + z &= 4 \end{aligned} \quad \text{e } P(2, 3, 0).$$

b)
$$\begin{aligned} x - y + 3z &= 1 \\ -x + 3y - z &= 3 \\ y + z &= 2 \end{aligned} \quad \text{e } P(-1, 2, 0).$$

c)
$$\begin{aligned} x - y + 3z &= -1 \\ -x + 3y - z &= 3 \\ x + y + 5z &= 1 \end{aligned} \quad \text{e } P(-4, 0, 1).$$

d)
$$\begin{aligned} x - 3y + 5z &= 1 \\ -x + 3y - 5z &= -1 \end{aligned} \quad \text{e } P(-1, 4, 0).$$

25. Em cada caso, ou mostre que a afirmação é verdadeira ou dê um exemplo mostrando que ela é falsa.

a) Se uma reta é paralela a um plano, ela nunca intercepta o plano.

b) Quaisquer três planos que não incluam um par de planos paralelos se encontram em um único ponto.

c) Se o plano $ax + by + cz = k$ passa pela origem, então $k = 0$.

d) Todo plano tem exatamente uma equação da forma $ax + by + cz = k$.

e) Se duas retas não se interceptam, elas não estão ambas contidas em um mesmo plano.

f) Se uma reta é paralela ao vetor normal de um plano, então ela é paralela ao plano.

g) A reta interseção de dois planos (não paralelos) é ortogonal a ambos os vetores normais dos planos.

h) Uma reta ortogonal ao vetor normal de um plano tem que ser paralela ao plano.

26. Se um plano contém dois pontos distintos A e B, mostre que ele contém a reta que passa por A e B.

27. Seja $\vec{d} = [a \ \ b \ \ c]^T$ um vetor tal que a, b e c são *todos* não nulos. Mostre que as equações paramétricas da reta que passa por um ponto arbitrário $P_0(x_0,\ y_0,\ z_0)$ e tem vetor diretor $\vec{d}$ podem ser escritas na forma $\frac{x - x_0}{a} = \frac{y - y_0}{b} = \frac{z - z_0}{c}$. Essas são as equações da reta na **forma simétrica**.

28. **a)** Mostre que todo plano com vetor normal $\vec{n} \neq \vec{0}$ tem equação normal $\vec{p} \cdot \vec{n} = k$ para algum escalar $\mathbb{R}$, sendo $\vec{p} = [x \ \ y \ \ z]^T$.

b) Se $\vec{a}$ é o vetor posição de um ponto A, mostre que a (menor) distância de A até o plano de equação $\vec{p} \cdot \vec{n} = k$ é $\frac{|k - (\vec{a} \cdot \vec{n})|}{\|\vec{n}\|}$.

29. Considere os planos paralelos $ax + by + cz = k$ e $ax + by + cz = k_1$. Mostre que a distância entre eles é $\frac{|k_1 - k|}{\|\vec{n}\|}$ sendo $\vec{n} = [a \ \ b \ \ c]^T$ o vetor normal comum. [Sugestão: Exemplo: 12.]

3.4 TRANSFORMAÇÕES MATRICIAIS DE $\mathbb{R}^2$

Exceto pelo uso em resolução de sistemas de equações lineares, até aqui as matrizes foram tratadas de forma bastante abstrata, com ênfase em suas propriedades algébricas. Nesta seção, a abordagem vetorial da geometria revela uma forma concreta, geométrica de olhar as matrizes 2×2. Essa descoberta não apenas fornece uma nova interpretação para a álgebra de matrizes como também aplica matrizes para dar novas perspectivas à geometria.

Por toda esta seção denotaremos o conjunto dos números reais por $\mathbb{R}$ e escreveremos $\mathbb{R}^2$ para representar o plano Euclidiano. É conveniente identificar os pontos de $\mathbb{R}^2$, com seu vetor posição. Mais precisamente, não faremos distinção entre um ponto $P(x,\ y)$ e seu vetor posição $\vec{v} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$, e iremos nos referir a ele simplesmente como um "vetor" em $\mathbb{R}^2$.

3.4.1 Transformações

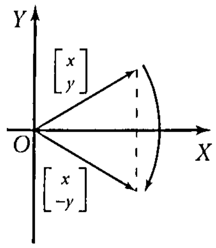


Figura 3.49

Para ilustrar como as matrizes 2×2 surgem como transformações geométricas de $\mathbb{R}^2$, considere a *reflexão* em relação ao eixo X. Essa operação leva o vetor $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ para sua reflexão $\begin{bmatrix} x \\ -y \end{bmatrix}$, e pode ser descrita geometricamente como na Figura 3.49. Observe agora que

$$\begin{bmatrix} x \\ -y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}.$$

Logo, a reflexão $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ em relação ao eixo X pode ser obtida mediante multiplicação pela matriz $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$.

A reflexão em relação ao eixo X é um exemplo de uma **transformação** T em $\mathbb{R}^2$, isto é, uma função[11]

$$T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$$

que leva cada vetor $\vec{v} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ de $\mathbb{R}^2$ em outro vetor de $\mathbb{R}^2$, denotado por $T(\vec{v})$. Assim sendo, para descrever uma transformação T devemos especificar o vetor $T(\vec{v})$, para cada vetor $\vec{v}$ em $\mathbb{R}^2$. A isso chamamos **definir** T, ou especificar a **ação** de T. Em particular, se T for uma reflexão em relação ao eixo X como acima, então T é definida por $T\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ -y \end{bmatrix}$ para todo $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ em $\mathbb{R}^2$.

As matrizes proporcionam uma forma importante de definir transformações em $\mathbb{R}^2$. Se A for uma matriz 2×2 qualquer, a multiplicação por A é uma transformação

$$T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 \quad \text{definida por} \quad T(\vec{v}) = A\vec{v} \text{ para todo } \vec{v} \text{ em } \mathbb{R}^2.$$

Ela é chamada **transformação matricial induzida** por A. Dessa forma, a reflexão em relação ao eixo X é uma transformação matricial induzida por $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$.

Se $A = 0$ for a matriz nula, a transformação matricial correspondente T é dada por $T(\vec{v}) = A\vec{v} = \vec{0}$ para todo $\vec{v}$ em $\mathbb{R}^2$. Essa transformação é chamada **transformação nula** e é denotada por $T = 0$. Um outro exemplo é a **transformação identidade** $1_{\mathbb{R}^2} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ induzida pela matriz identidade. Ela é dada por

$$1_{\mathbb{R}^2}(\vec{v}) = \vec{v} \quad \text{para todo } \vec{v} \text{ em } \mathbb{R}^2.$$

Muitas transformações geométricas são, de fato, transformações matriciais. Eis aqui mais um exemplo.

Exemplo 1 Mostre que a rotação de um ângulo reto no sentido anti-horário em torno da origem é uma transformação matricial de $\mathbb{R}^2$, e encontre a matriz correspondente.

SOLUÇÃO A transformação é mostrada na Figura 3.50. Como os dois triângulos retângulos são congruentes, a rotação leva $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ em $\begin{bmatrix} -y \\ x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$. Logo, a matriz é $A = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$.

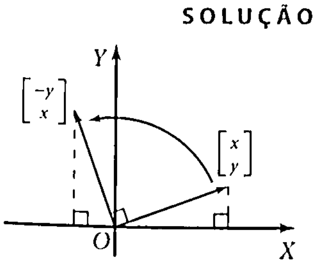


Figura 3.50

Veremos adiante que *qualquer* rotação em torno da origem é uma transformação matricial de $\mathbb{R}^2$.

[11] As funções $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ são básicas na matemática do ensino médio e em cálculo diferencial e integral. Elas são freqüentemente definidas por uma fórmula, por exemplo, $f(x) = x^2 + 1$ para todo x em $\mathbb{R}$, mas outras funções são usadas (por exemplo, $f(x) = \cos x$ ou $f(x) = e^x$). É uma convenção usar o termo "transformação" para funções $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$.

A reta que passa pela origem e tem inclinação m tem equação $y = mx$. Fixado m, definimos duas transformações P_m e Q_m de $\mathbb{R}^2$ da seguinte maneira. Dado um vetor $\vec{v}$ em $\mathbb{R}^2$, denote por

$P_m(\vec{v})$ a **projeção** de $\vec{v}$ sobre a reta $y = mx$

e denote por

$Q_m(\vec{v})$ a **reflexão** de $\vec{v}$ em relação à reta $y = mx$

como mostra a Figura 3.51. Geometricamente, $Q_m(\vec{v})$ é a "imagem espelhada" de $\vec{v}$ em relação à reta $y = mx$ ao passo que, se $\vec{d}$ for um vetor diretor qualquer da reta, então $P_m(\vec{v}) = proj_{\vec{d}}(\vec{v})$ é a projeção usual.

TEOREMA 11 Considere a reta $y = mx$ que passa pela origem e tem inclinação m. Então a projeção P_m e a reflexão Q_m são ambas transformações matriciais de $\mathbb{R}^2$. Mais precisamente,

$$P_m \text{ é induzida pela matriz } \frac{1}{1+m^2}\begin{bmatrix} 1 & m \\ m & m^2 \end{bmatrix} \text{ e}$$

$$Q_m \text{ é induzida pela matriz } \frac{1}{1+m^2}\begin{bmatrix} 1-m^2 & 2m \\ 2m & m^2-1 \end{bmatrix}.$$

DEMONSTRAÇÃO A reta $y = mx$ contém a origem e o ponto $\begin{bmatrix} 1 \\ m \end{bmatrix}$. Assim, $\vec{d} = \begin{bmatrix} 1 \\ m \end{bmatrix}$ é um vetor diretor da reta. Se escrevermos $\vec{v} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$, temos a fórmula

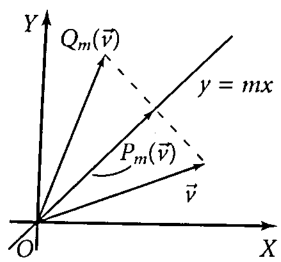


Figura 3.51

$P_m(\vec{v}) = proj_{\vec{d}}(\vec{v}) = \left(\frac{\vec{v}\cdot\vec{d}}{\|\vec{d}\|^2}\right)\vec{d}$. Daí

$$P_m(\vec{v}) = \frac{x+ym}{1+m^2}\begin{bmatrix} 1 \\ m \end{bmatrix} = \frac{1}{1+m^2}\begin{bmatrix} x+my \\ mx+m^2y \end{bmatrix} = \frac{1}{1+m^2}\begin{bmatrix} 1 & m \\ m & m^2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

como queríamos. No caso de Q_m, podemos observar na Figura 3.51 que $Q_m(\vec{v}) = \vec{v} + 2[P_m(\vec{v}) - \vec{v}] = 2P_m(\vec{v}) - \vec{v}$. Então, alguma aritmética matricial nos fornece

$$Q_m(\vec{v}) = \frac{2}{1+m^2}\begin{bmatrix} 1 & m \\ m & m^2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \frac{1}{1+m^2}\begin{bmatrix} 1-m^2 & 2m \\ 2m & m^2-1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}.$$

Portanto, P_m e Q_m são transformações matriciais.

Exemplo 2 Encontre a projeção e a reflexão do vetor $\vec{v} = \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \end{bmatrix}$ sobre a reta que passa pela origem e tem inclinação $\frac{1}{2}$.

SOLUÇÃO Usando as fórmulas deduzidas acima para P_m e Q_m, temos:

$$P_{\frac{1}{2}}\begin{bmatrix} 3 \\ -1 \end{bmatrix} = \frac{1}{1+(\frac{1}{2})^2}\begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & (\frac{1}{2})^2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

e

$$Q_{\frac{1}{2}}\begin{bmatrix} 3 \\ -1 \end{bmatrix} = \frac{1}{1+(\frac{1}{2})^2}\begin{bmatrix} 1-(\frac{1}{2})^2 & 2(\frac{1}{2}) \\ 2(\frac{1}{2}) & (\frac{1}{2})^2-1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}.$$

É importante observar que nem todas as transformações de $\mathbb{R}^2$ são transformações matriciais. Se $\vec{w}$ for um vetor fixado, defina a transformação $T_{\vec{w}} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ por $T_{\vec{w}}(\vec{v}) = \vec{v} + \vec{w}$ para todo $\vec{v}$ em $\mathbb{R}^2$. Então $T_{\vec{w}}$ é chamada **translação** por $\vec{w}$ e não é uma transformação matricial exceto se $\vec{w} = \vec{0}$, como mostra nosso próximo exemplo.

Exemplo 3 Se $\vec{w} \neq \vec{0}$, mostre que a translação por $\vec{w}$ não é uma transformação matricial.

SOLUÇÃO Se $T_{\vec{w}}$ fosse induzida por uma matriz A, então $A\vec{v} = T_{\vec{w}}(\vec{v}) = \vec{v} + \vec{w}$ iria valer para cada $\vec{v}$ em $\mathbb{R}^2$. Em particular, tomando $\vec{v} = \vec{0}$, teríamos $\vec{w} = \vec{0} + \vec{w} = T_{\vec{w}}(\vec{0}) = A\vec{0} = \vec{0}$, ao contrário da hipótese de que $\vec{w} \neq \vec{0}$.

3.4.2 Transformações Lineares

Seja $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ a transformação matricial induzida pela matriz A de tamanho 2×2, isto é, T é dada por $T(\vec{v}) = A\vec{v}$ para todos os vetores $\vec{v}$ em $\mathbb{R}^2$. Então T tem as seguintes propriedades:

T1. $T(\vec{v} + \vec{w}) = T(\vec{v}) + T(\vec{w})$ para todo $\vec{v}$ e $\vec{w}$ em $\mathbb{R}^2$.
T2. $T(a\vec{v}) = aT(\vec{v})$ para todo $\vec{v}$ em $\mathbb{R}^2$ e todo número a.

De fato, T1 é exatamente a propriedade distributiva do produto de matrizes:

$$T(\vec{v} + \vec{w}) = A(\vec{v} + \vec{w}) = A\vec{v} + A\vec{w} = T(\vec{v}) + T(\vec{w}).$$

Analogamente, $T(a\vec{v}) = A(a\vec{v}) = a(A\vec{v}) = aT(\vec{v})$, resultando em T2.

As transformações $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ que gozam das propriedades T1 e T2 são chamadas **transformações lineares**. Assim, a discussão acima mostra que toda transformação matricial é linear. O fato notável é que a recíproca é verdadeira:

- *Toda transformação linear é, na verdade, uma transformação matricial.*

Além disso, existe um método simples de encontrar a matriz correspondente. Para deduzi-lo, considere os **vetores canônicos**

$$\vec{\imath} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \vec{\jmath} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

e chame o par de vetores $\{\vec{\imath}, \vec{\jmath}\}$ de **base canônica** de $\mathbb{R}^2$. A importância dos vetores coordenados $\vec{\imath}$ e $\vec{\jmath}$ (e o motivo para o nome) está no fato que cada vetor de $\mathbb{R}^2$ pode ser expresso em termos deles de modo único:

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ y \end{bmatrix} = x\vec{\imath} + y\vec{\jmath} \quad \text{para todo} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \text{ em } \mathbb{R}^2.$$

Em outras palavras, as coordenadas do vetor aparecem como coeficientes de $\vec{\imath}$ e $\vec{\jmath}$. Usaremos essa observação adiante.

Considere agora uma transformação linear arbitrária $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$. Então $T(\vec{\imath})$ e $T(\vec{\jmath})$ são colunas em $\mathbb{R}^2$. Logo, podem ser escritas da seguinte maneira:

$$T(\vec{\imath}) = \begin{bmatrix} a \\ c \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad T(\vec{\jmath}) = \begin{bmatrix} b \\ d \end{bmatrix}.$$

Como T é linear, podemos aplicar as propriedades T1 e T2 a T e obtemos:

$$\begin{aligned} T\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} &= T(x\vec{\imath} + y\vec{\jmath}) = T(x\vec{\imath}) + T(y\vec{\jmath}) \\ &= xT(\vec{\imath}) + yT(\vec{\jmath}) \\ &= x\begin{bmatrix} a \\ c \end{bmatrix} + y\begin{bmatrix} b \\ d \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} xa + yb \\ xc + yd \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Assim, T é de fato uma transformação matricial, a induzida por $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$.

Além disso, a primeira e a segunda colunas de A são $T(\vec{\imath}) = \begin{bmatrix} a \\ c \end{bmatrix}$ e $T(\vec{\jmath}) = \begin{bmatrix} b \\ d \end{bmatrix}$ respectivamente. Logo, é natural denotar A em termos de suas colunas da seguinte maneira:

$$A = [T(\vec{\imath}) \quad T(\vec{\jmath})].$$

Isso prova o Teorema 2.

TEOREMA 2 Uma transformação $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ é linear se, e somente se, ela é uma transformação matricial. Nesse caso, se $\{\vec{\imath}, \vec{\jmath}\}$ é a base canônica de $\mathbb{R}^2$, então

$$T \text{ é induzida pela matriz } A = [T(\vec{\imath}) \quad T(\vec{\jmath})].$$

Aqui $[T(\vec{\imath}) \quad T(\vec{\jmath})]$ denota a matriz de colunas $T(\vec{\imath})$ e $T(\vec{\jmath})$.

Por causa do Teorema 2, usaremos as expressões "transformação linear" e "transformação matricial" indistintamente.

Exemplo 4 Seja $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ uma transformação linear. Se $T\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}3\\-1\end{bmatrix}$ e $T\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}5\\4\end{bmatrix}$, encontre $T\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}$ para todo $\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}$ em $\mathbb{R}^2$.

SOLUÇÃO 1 Vamos encontrar primeiro a matriz $A = [T(\vec{\imath}) \quad T(\vec{\jmath})]$ de T. Foi-nos dada a primeira coluna $T(\vec{\imath}) = \begin{bmatrix}5\\4\end{bmatrix}$. Por conveniência, escreva $\vec{w} = \begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix}$. Assim, também foi dado que $T(\vec{w}) = \begin{bmatrix}3\\-1\end{bmatrix}$. A aritmética matricial simples nos fornece

$$\vec{\jmath} = \tfrac{1}{2}(\vec{w} - \vec{\imath}).$$

Se aplicarmos T a ambos os lados, a linearidade de T nos dá

$$T(\vec{\jmath}) = \tfrac{1}{2}T(\vec{w} - \vec{\imath}) = \tfrac{1}{2}[T(\vec{w}) - T(\vec{\imath})] = \tfrac{1}{2}\left[\begin{bmatrix}3\\-1\end{bmatrix} - \begin{bmatrix}5\\4\end{bmatrix}\right] = \begin{bmatrix}-1\\-\frac{5}{2}\end{bmatrix}.$$

Portanto, $A = [T(\vec{\imath}) \quad T(\vec{\jmath})] = \begin{bmatrix}5 & -1\\4 & -\frac{5}{2}\end{bmatrix}$ pelo Teorema 2, logo

$$T\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix} = A\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}5 & -1\\4 & -\frac{5}{2}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}5x-y\\4x-\frac{5}{2}y\end{bmatrix}.$$

Isso é o que queríamos.

SOLUÇÃO 2 Afirmamos que $\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix} = s\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix} + t\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}$ para números s e t (que dependem de x e y). De fato, igualando as coordenadas e resolvendo em s e t, obtemos

$$\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix} = \frac{y}{2}\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix} + \frac{2x-y}{2}\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix} \text{ para todo } x \text{ e } y.$$

Como T satisfaz as propriedades T1 e T2, temos

$$T\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix} = \frac{y}{2}T\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix} + \frac{2x-y}{2}T\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix} = \frac{y}{2}\begin{bmatrix}3\\-1\end{bmatrix} + \frac{2x-y}{2}\begin{bmatrix}5\\4\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}5x-y\\4x-\frac{5}{2}y\end{bmatrix}$$

como antes. Logo, $T\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}5 & -1\\4 & -\frac{5}{2}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}$, e obtemos a matriz $A = \begin{bmatrix}5 & -1\\4 & -\frac{5}{2}\end{bmatrix}$ de T.

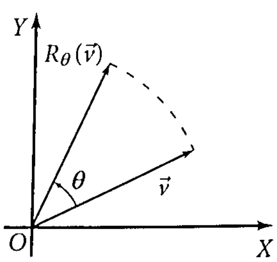


Figura 3.52

As rotações em torno da origem constituem uma outra classe importante de transformações de $\mathbb{R}^2$. Dado um vetor $\vec{v}$ em $\mathbb{R}^2$, denote por

$R_\theta(\vec{v})$ a **rotação** de um ângulo θ **no sentido anti-horário** de um vetor $\vec{v}$.

A ação de R_θ é mostrada na Figura 3.52. É, de alguma forma, surpreendente que R_θ seja de fato uma transformação matricial. Para ver por quê, a idéia é mostrar primeiramente que R_θ é linear e então aplicar o Teorema 2. É claro que isso também irá fornecer a matriz da transformação R_θ. (Na verdade, esta é freqüentemente a maneira mais conveniente de obter a matriz de uma transformação geométrica.)

TEOREMA 3 A rotação $R_\theta : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ é uma transformação linear. Mais especificamente, R_θ é a transformação matricial induzida pela matriz

$$\begin{bmatrix}\cos\theta & -\operatorname{sen}\theta\\ \operatorname{sen}\theta & \cos\theta\end{bmatrix}.$$

DEMONSTRAÇÃO Para ver que R_θ é linear, considere dois vetores $\vec{v}$ e $\vec{w}$ em $\mathbb{R}^2$. Então $\vec{v} + \vec{w}$ é a diagonal do paralelogramo determinado por $\vec{v}$ e $\vec{w}$ (ver Figura 3.53). O efeito de R_θ é a rotação de todo o paralelogramo para obter o paralelogramo determinado por $R_\theta(\vec{v})$ e $R_\theta(\vec{w})$, com diagonal $R_\theta(\vec{v} + \vec{w})$. Mas essa diagonal é $R_\theta(\vec{v}) + R_\theta(\vec{w})$ pela lei do paralelogramo, e segue que

$$R_\theta(\vec{v} + \vec{w}) = R_\theta(\vec{v}) + R_\theta(\vec{w}).$$

Um argumento análogo mostra que $R_\theta(a\vec{v}) = aR_\theta(\vec{v})$ para qualquer escalar a, logo R_θ é uma transformação linear.

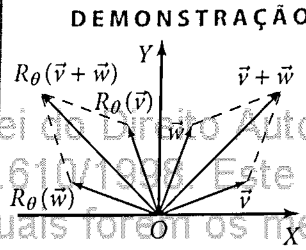


Figura 3.53

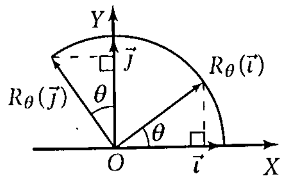


Figura 3.54

Uma vez estabelecida a linearidade de R_θ, podemos usar o Teorema 2. Na verdade, da Figura 3.54 vemos que

$$R_\theta(\vec{\imath}) = \begin{bmatrix} \operatorname{sen}\theta \\ \sin\theta \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad R_\theta(\vec{j}) = \begin{bmatrix} -\operatorname{sen}\theta \\ \cos\theta \end{bmatrix}$$

logo, o Teorema 2 garante que R_θ é induzida pela matriz

$$[R_\theta(\vec{\imath}) \;\; R_\theta(\vec{j})] = \begin{bmatrix} \operatorname{sen}\theta & -\operatorname{sen}\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}.$$

Em particular, usando o Teorema 3 vemos que as rotações de $\frac{\pi}{2}$ e π são dadas por[12]

$$R_{\frac{\pi}{2}}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \operatorname{sen}\frac{\pi}{2} & -\operatorname{sen}\frac{\pi}{2} \\ \sin\frac{\pi}{2} & \cos\frac{\pi}{2} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -y \\ x \end{bmatrix}$$

e

$$R_{\pi}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \operatorname{sen}\pi & -\operatorname{sen}\pi \\ \sin\pi & \cos\pi \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -x \\ -y \end{bmatrix}$$

respectivamente. A primeira expressão confirma novamente o resultado do Exemplo 1, e a segunda mostra que fazer a rotação de um vetor por um ângulo π é o mesmo que determinar o oposto do vetor, um fato que é claro sem o Teorema 3.

3.4.3 Efeito no Quadrado Unitário

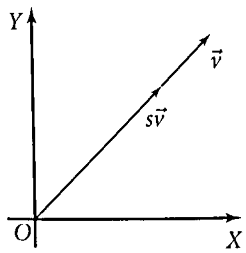


Figura 3.55

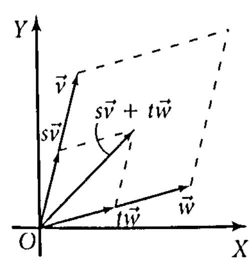


Figura 3.56

Se $\vec{v}$ é um vetor em $\mathbb{R}^2$, então todo vetor $\vec{u}$ entre $\vec{0}$ e $\vec{v}$ é da forma $\vec{u} = s\vec{v}$ para algum escalar s com $0 \le s \le 1$ (ver Figura 3.55). Assim, se $\vec{v}$ e $\vec{w}$ são dois vetores vemos, pela Figura 3.56, que cada vetor no paralelogramo determinado por $\vec{v}$ e $\vec{w}$ é da forma

$$s\vec{v} + t\vec{w} \quad \text{com} \quad 0 \le s \le 1 \quad \text{e} \quad 0 \le t \le 1\,.$$

Essa observação tem conseqüências úteis.

De fato, seja $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ a transformação matricial induzida por A. Se $s\vec{v} + t\vec{w}$ é um vetor qualquer no paralelogramo determinado por $\vec{v}$ e $\vec{w}$, então (como T é linear)

$$T(s\vec{v} + t\vec{w}) = T(s\vec{v}) + T(t\vec{w}) = s\,T(\vec{v}) + t\,T(\vec{w}).$$

Geometricamente isso significa que

$$T(s\vec{v} + t\vec{w}) \text{ é um ponto no paralelogramo determinado por } T(\vec{v}) \text{ e } T(\vec{w}).$$

O paralelogramo determinado por $T(\vec{v})$ e $T(\vec{w})$ é a **imagem** por T do paralelogramo determinado por $\vec{v}$ e $\vec{w}$. A situação é ilustrada na Figura 3.57.

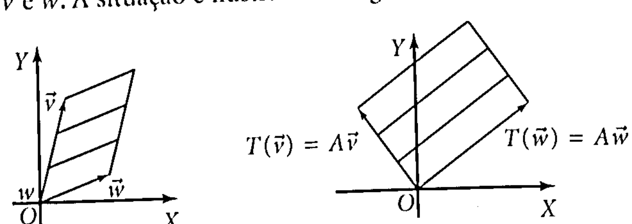


Figura 3.57

O paralelogramo determinado pelos vetores canônicos $\vec{\imath}$ e $\vec{j}$ é na verdade um quadrado, chamado **quadrado unitário**. Sua imagem sob a transformação matricial T é o paralelogramo determinado por $T(\vec{\imath})$ e $T(\vec{j})$. Essa imagem é importante porque (conforme o Teorema 2) T é completamente determinada por $T(\vec{\imath})$ e $T(\vec{j})$. Assim, a imagem do quadrado unitário dá uma interpretação gráfica de como a transformação age. Os dois exemplos a seguir ilustram esse fato.

12 Ângulos e funções trigonométricas são discutidos no Apêndice A.1.

Exemplo 5 Se $a > 0$, a transformação matricial $T\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}ax\\y\end{bmatrix}$ induzida pela matriz $A = \begin{bmatrix}a & 0\\0 & 1\end{bmatrix}$ é uma **expansão em X** se $a > 1$ e uma **compressão em X** se $0 < a < 1$. Neste exemplo, $T(\vec{i}) = A\vec{i} = a\vec{i}$ e $T(\vec{j}) = A\vec{j} = \vec{j}$. Logo, o efeito de T no quadrado unitário é mostrado na Figura 3.58.
Analogamente, se $b > 0$, a matriz $\begin{bmatrix}1 & 0\\0 & b\end{bmatrix}$ determina uma **expansão** ou **compressão em Y.**

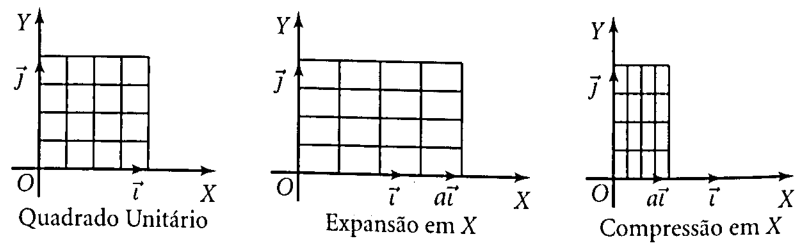


Figura 3.58

Exemplo 6 Se a é um número, a transformação matricial $T\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}x+ay\\y\end{bmatrix}$ induzida pela matriz $A = \begin{bmatrix}1 & a\\0 & 1\end{bmatrix}$ é um **cisalhamento em X** (**positivo**, se $a > 0$ e **negativo** se $a < 0$). Nesse caso, $T(\vec{i}) = A\vec{i} = \vec{i}$ e $T(\vec{j}) = A\vec{j} = \begin{bmatrix}a\\1\end{bmatrix}$. O efeito de T no quadrado unitário é ilustrado na Figura 3.59. De modo análogo, a matriz $\begin{bmatrix}1 & 0\\a & 1\end{bmatrix}$ induz um **cisalhamento em Y**, para qualquer número a.

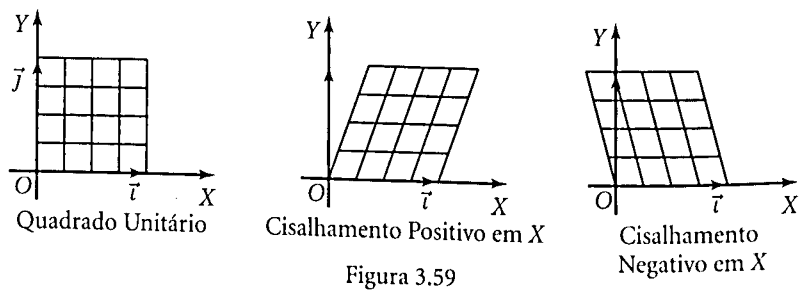


Figura 3.59

O Teorema 2 mostra que uma transformação matricial é completamente determinada por seu efeito no quadrado unitário (equivalentemente, por seu efeito na base canônica). O próximo teorema revela o papel do determinante.

TEOREMA 4 Seja $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ uma transformação matricial induzida pela matriz A de tamanho 2×2. Então a imagem sob T do quadrado unitário tem área igual a $|det(A)|$.

DEMONSTRAÇÃO Escreva $A = \begin{bmatrix}a & b\\c & d\end{bmatrix}$. Por enquanto, identifique o vetor $\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}$ em $\mathbb{R}^2$ com o vetor $\begin{bmatrix}x\\y\\0\end{bmatrix}$ em $\mathbb{R}^3$. Assim, a imagem do quadrado unitário sob a ação de T é o paralelogramo determinado por

$T(\vec{i}) = A\vec{i} = \begin{bmatrix}a\\c\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}a\\c\\0\end{bmatrix}$ e $T(\vec{j}) = A\vec{j} = \begin{bmatrix}b\\d\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}b\\d\\0\end{bmatrix}$. Será demonstrado no Teorema 5 da Seção 3.5 que esse paralelogramo tem área

$$\|A\vec{i}\times A\vec{j}\| = \left\|\begin{bmatrix}0\\0\\ad-bc\end{bmatrix}\right\| = \sqrt{(ad-bc)^2} = |(ad-bc)| = |det(A)|.$$

Isso é o que queríamos.

Exemplo 7 A imagem do quadrado unitário por uma rotação R_θ ou uma reflexão Q_m é novamente um quadrado de lado 1 e, portanto, tem área 1. Dessa forma, o determinante da matriz de cada uma dessas transformações deve ter valor absoluto 1, pelo Teorema 4. De fato, as matrizes são $\begin{bmatrix} \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta \\ \operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$ e $\frac{1}{1+m^2}\begin{bmatrix} 1-m^2 & 2m \\ 2m & m^2-1 \end{bmatrix}$ respectivamente, e então os determinantes são 1 e -1 respectivamente, como pode ser verificado facilmente. (Voltaremos a isso no Teorema 7.)

Por outro lado, a imagem do quadrado unitário pela projeção P_m sobre a reta $y = mx$ é o paralelogramo determinado por $P_m(\vec{\imath})$ e $P_m(\vec{\jmath})$. Mas esses vetores são paralelos (ambos paralelos à reta $y = mx$) e, portanto, o paralelogramo que determinam tem área 0. Assim, a matriz $\frac{1}{1+m^2}\begin{bmatrix} 1 & m \\ m & m^2 \end{bmatrix}$ de P_m deve ter determinante igual a 0, um fato que é facilmente verificado diretamente.

3.4.4 Composição de Transformações Matriciais

O efeito de uma transformação pode, com freqüência, ser conseguido aplicando-se uma seqüência de outras transformações (freqüentemente mais simples), uma depois da outra. O resultado é descrito como a seguir. Se $S : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ e $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ são duas transformações de $\mathbb{R}^2$, sua **composta** $S \circ T$ é a transformação

$$S \circ T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 \quad \text{definida por } [S \circ T](\vec{v}) = S[T(\vec{v})] \quad \text{para todo } \vec{v} \text{ em } \mathbb{R}^2.$$

Assim, o efeito de $S \circ T$ pode ser descrito como "primeiro T, depois S" (observe a ordem!). Isso é ilustrado na Figura 3.60.

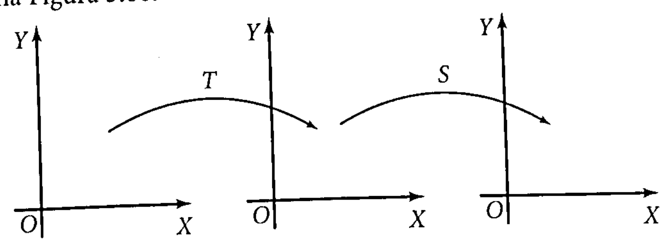


Figura 3.60

A composição está fortemente relacionada ao produto de matrizes.

TEOREMA 5 Sejam $S : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ e $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ transformações matriciais com matrizes A e B, respectivamente. Então

$S \circ T$ é a transformação matricial de matriz AB.

DEMONSTRAÇÃO Dado um vetor qualquer $\vec{v}$ em $\mathbb{R}^2$, temos $S(\vec{v}) = A\vec{v}$ e $T(\vec{v}) = B\vec{v}$. Então,

$$[S \circ T](\vec{v}) = S[T(\vec{v})] = S[B(\vec{v})] = A[B(\vec{v})] = (AB)\vec{v}$$

para todo $\vec{v}$ em $\mathbb{R}^2$. Assim, $S \circ T$ é a transformação matricial induzida pela matriz AB.

Exemplo 8 Mostre que o efeito de primeiro refletir em relação ao eixo X e depois refletir em relação à reta $y = x$ é o mesmo que fazer uma rotação de um ângulo $\frac{\pi}{2}$.

SOLUÇÃO Denote por $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ e $S : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ a reflexão em relação ao eixo X e a reflexão em relação à reta $y = x$, respectivamente. Então o efeito de T é $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} x \\ -y \end{bmatrix}$, ao passo que o efeito de S é $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} y \\ x \end{bmatrix}$. Logo, o efeito combinado é

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \xrightarrow{S} \begin{bmatrix} x \\ -y \end{bmatrix} \xrightarrow{T} \begin{bmatrix} -y \\ x \end{bmatrix},$$

que é a rotação de $\frac{\pi}{2}$, pelo Exemplo 1. Podemos também ver isso usando produto de matrizes. O Teorema 1 mostra que as matrizes de S e T são $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$, respectivamente. Segue, pelo Teorema 5, que a matriz de $S \circ T$ é

$$AB = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix},$$

que é a matriz da rotação de $\frac{\pi}{2}$, novamente pelo Exemplo 1. Como $S \circ T$ é "primeiro T, depois S", esse é o resultado que queríamos.

O Teorema 5 é útil de duas maneiras. Primeiro, ele permite calcular o efeito da composta de duas transformações geométricas usando produto de matrizes. Mas ele também dá uma interpretação geométrica útil do produto de matrizes: o produto AB de matrizes corresponde à transformação resultante da aplicação de primeiro de B e depois de A (novamente, observe a ordem). Assim sendo, o estudo de matrizes pode lançar uma luz ao estudo de transformações geométricas e vice-versa.

Exemplo 9 Considere as rotações R_θ e R_ψ de ângulos θ e ψ. A composição $R_\theta \circ R_\psi$ é a transformação resultante de primeiro girar de ψ e depois girar de θ, e portanto é a rotação de um ângulo de $\theta + \psi$, como ilustrado na Figura 3.61. Assim,

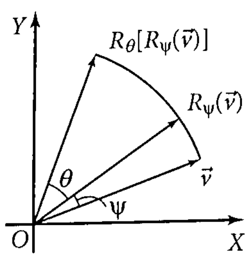


Figura 3.61

$$R_\theta \circ R_\psi = R_{\theta+\psi}$$

Dessa forma, o Teorema 5 mostra que a relação correspondente vale para as matrizes dessas transformações:

$$\begin{bmatrix} \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta \\ \operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \cos\psi & -\operatorname{sen}\psi \\ \operatorname{sen}\psi & \cos\psi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\theta+\psi) & -\operatorname{sen}(\theta+\psi) \\ \operatorname{sen}(\theta+\psi) & \cos(\theta+\psi) \end{bmatrix}.$$

Se efetuarmos o produto das matrizes à esquerda e então compararmos os elementos na primeira coluna, iremos obter

$$\begin{aligned} \cos\theta\cos\psi - \operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}\psi &= \cos(\theta+\psi) \\ \operatorname{sen}\theta\cos\psi - \cos\theta\operatorname{sen}\psi &= \operatorname{sen}(\theta+\psi) \end{aligned}$$

Essas são as duas identidades básicas a partir das quais a maior parte da trigonometria pode ser deduzida.

3.4.5 A Inversa de uma Transformação Matricial

Uma outra aplicação do Teorema 5 fornece uma interpretação geométrica da inversa de uma matriz. A transformação matricial T induzida por uma matriz A é uma transformação linear **inversível** se A for uma matriz inversível e, nesse caso, a transformação matricial induzida pela matriz inversa A^{-1} é a **inversa** da transformação T e é denotada por T^{-1}. Assim sendo, T^{-1} é definida por

$$T^{-1}(\vec{v}) = A^{-1}\vec{v} \quad \text{para todo } \vec{v} \text{ em } \mathbb{R}^2.$$

Além disso, o Teorema 5 mostra que $T \circ T^{-1}$ tem matriz $AA^{-1} = I_2$, e segue que $T[T^{-1}(\vec{v})] = (T \circ T^{-1})(\vec{v}) = I_2\vec{v} = \vec{v}$ para todo $\vec{v}$ em $\mathbb{R}^2$. Analogamente, $T^{-1} \circ T$ tem matriz $A^{-1}A = I_2$ e obtemos

$$T[T^{-1}(\vec{v})] = \vec{v} \quad \text{e} \quad T^{-1}[T(\vec{v})] = \vec{v} \quad \text{para todo } \vec{v} \text{ em } \mathbb{R}^2.$$

Essas são chamadas **identidades fundamentais** que relacionam T e T^{-1}. Elas mostram que T^{-1} "reverte" a ação da transformação T no seguinte sentido: se T leva um vetor $\vec{v}$ em $\vec{w} = T(\vec{v})$, então T^{-1} traz $\vec{w}$ de volta para $\vec{v}$. Analogamente, T reverte a ação de T^{-1}. Assim, a relação básica entre T e T^{-1} é que cada uma reverte a ação da outra.

Lembremos que a transformação matricial induzida pela matriz identidade I é chamada transformação identidade $1_{\mathbb{R}^2} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$. Ela é dada por $1_{\mathbb{R}^2}(\vec{v}) = I\vec{v} = \vec{v}$ para cada $\vec{v}$ em $\mathbb{R}^2$. Usando isso, as identidades fundamentais podem ser reformuladas da seguinte maneira:

$$T \circ T^{-1} = 1_{\mathbb{R}^2} \quad \text{e} \quad T^{-1} \circ T = 1_{\mathbb{R}^2}$$

Isso leva a uma caracterização útil de quando uma transformação linear é inversível.

TEOREMA 6 Seja $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ a transformação linear induzida por uma matriz A de tamanho 2×2. As seguintes condições são equivalentes:

(1) T é inversível (isto é, A é inversível).

(2) Existe uma transformação linear $S : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ tal que $T \circ S = 1_{\mathbb{R}^2}$ e $S \circ T = 1_{\mathbb{R}^2}$.

Nesse caso, a matriz de S é A^{-1}. Logo, $S = T^{-1}$ é a inversa de T.

DEMONSTRAÇÃO Se (1) vale, então (2) é verdade com $S = T^{-1}$. Reciprocamente, suponha que (2) seja verdadeira. Seja S induzida pela matriz B. Pelo Teorema 5, as equações $T \circ S = 1_{\mathbb{R}^2}$ e $S \circ T = 1_{\mathbb{R}^2}$ se traduzem para $AB = I$ e $BA = I$. Então A é inversível e $A^{-1} = B$. Isso prova (2) e a última afirmação.

Essa visão geométrica da inversa de uma transformação linear fornece uma maneira de encontrar a inversa de uma matriz. Mais precisamente, se A for uma matriz inversível:

(1) Seja T a transformação linear induzida por A.

(2) Obtenha a transformação linear T^{-1} que "reverte" a ação de T.

(3) Então A^{-1} é a matriz de T^{-1}.

Aqui está um exemplo.

Exemplo 10 Se θ for um ângulo qualquer, encontre inversa da matriz

$$A = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta \\ \operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$$

examinando a transformação matricial correspondente.

SOLUÇÃO Pelo Teorema 3, A é a matriz da rotação R_θ de ângulo θ. Assim, A^{-1} será a matriz da transformação inversa $[R_\theta]^{-1}$. Mas $[R_\theta]^{-1}$ deve ser a rotação $R_{-\theta}$ de ângulo $-\theta$, porque $R_{-\theta}$ "reverte" a ação de R_θ. Logo, A^{-1} é a matriz de $R_{-\theta}$, e (novamente pelo Teorema 3, trocando θ por $-\theta$)

$$AA^{-1} = I = A^{-1}A = \begin{bmatrix} \cos(-\theta) & -\operatorname{sen}(-\theta) \\ \operatorname{sen}(-\theta) & \cos(-\theta) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & \operatorname{sen}\theta \\ -\operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{bmatrix}.$$

É claro que isso pode ser verificado diretamente conferindo se $AA^{-1} = I = A^{-1}A$

3.4.6 Isometrias[13]

Uma transformação linear $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ é uma **isometria** se ela preservar a distância entre dois vetores quaisquer, isto é, se a distância entre $T(\vec{v})$ e $T(\vec{w})$ for igual à distância entre $\vec{v}$ e $\vec{w}$, para todos os vetores $\vec{v}$ e $\vec{w}$. Como a distância entre vetores $\vec{v}$ e $\vec{w}$ é $\|\vec{v} - \vec{w}\|$, isso significa que

$$\|T(\vec{v}) - T(\vec{w})\| = \|\vec{v} - \vec{w}\| \text{ para todo } \vec{v} \text{ e } \vec{w}.$$

Se T é induzida pela matriz A, essa condição se torna

$$\|A\vec{v} - A\vec{w}\| = \|\vec{v} - \vec{w}\| \text{ para todo } \vec{v} \text{ e } \vec{w}. \qquad (*)$$

Geometricamente, é claro que toda rotação em torno da origem é uma isometria, assim como toda reflexão em relação a uma reta que passa pela origem. O fato surpreendente é que essas são as únicas possibilidades (de isometrias no plano).

[13] Embora esta seção seja mencionada mais adiante, ela pode ser omitida sem perda de continuidade.

Para ver por que, seja $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ uma isometria e seja $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ a matriz de T. Se fizermos $\vec{w} = \vec{0}$ na equação (*), o resultado será $\|A\vec{v}\| = \|\vec{v}\|$ para todo $\vec{v}$. Escolhendo $\vec{v} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$, $\vec{v} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ e $\vec{v} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$, obteremos as equações

$$a^2 + c^2 = 1, \quad b^2 + d^2 = 1 \quad \text{e} \quad ab + cd = 0$$

respectivamente. Essas equações mostram que $A^T A = I$, como você pode verificar. Disso resulta que

$$1 = det(I) = det(A^T A) = det(A^T)\, det(A) = (detA)^2.$$

Segue que $detA = 1$ ou $detA = -1$. Vamos examinar cada caso separadamente.

Caso 1. $detA = 1$. Então $1 = ad - bc$ e, multiplicando por c, dá

$$c = acd - bc^2 = a(-ab) - bc^2 = -b(a^2 + c^2) = -b.$$

Da mesma forma, a multiplicação de $1 = ad - bc$ por d leva a $d = a$. Assim, A é da forma

$$A = \begin{bmatrix} a & -c \\ c & a \end{bmatrix} \quad \text{sendo } a^2 + c^2 = 1.$$

A condição $a^2 + c^2 = 1$ significa que o ponto $P(a,\ c)$ está sobre a circunferência unitária de centro na origem. Dessa forma, $a = \cos\theta$ e $c = \operatorname{sen}\theta$ em que θ é o ângulo determinado por $P(a,\ c)$. Logo, temos

$$A = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta \\ \operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \quad \text{para algum ângulo } \theta.$$

Dessa forma, T é a rotação R_θ de ângulo θ pelo Teorema 3.

Caso 2. $detA = -1$. Agora temos $1 = bc - ad$ e um argumento análogo ao Caso 1 mostra que $A = \begin{bmatrix} a & c \\ c & -a \end{bmatrix}$ com $a^2 + c^2 = 1$. Novamente, $a = \cos\theta$ e $c = \operatorname{sen}\theta$ com $0 \le \theta < 2\pi$. Logo,

$$A = \begin{bmatrix} \cos\theta & \operatorname{sen}\theta \\ \operatorname{sen}\theta & -\cos\theta \end{bmatrix} \quad \text{para algum ângulo } \theta.$$

Se $\theta = \pi$, então $A = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ e, portanto, T é a reflexão em relação ao eixo Y. Se $\theta \neq \pi$, então $\cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \neq 0$ porque $\frac{\theta}{2} \neq \frac{\pi}{2}$ e $0 \le \frac{\theta}{2} < \pi$. Assim sendo, $\operatorname{tg}\left(\frac{\theta}{2}\right) = \frac{\operatorname{sen}\left(\frac{\theta}{2}\right)}{\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)}$ está definida e afirmamos que T é a reflexão em relação à reta que passa pela origem e tem inclinação $m = \operatorname{tg}\left(\frac{\theta}{2}\right)$. De fato, o Teorema 1 (e alguma trigonometria básica) mostra que essa reflexão tem matriz

$$\frac{1}{1+m^2}\begin{bmatrix} 1-m^2 & 2m \\ 2m & m^2-1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & \operatorname{sen}\theta \\ \operatorname{sen}\theta & -\cos\theta \end{bmatrix} = A.$$

Vale a pena observar que, nesse caso, $y = mx$ é a reta que passa pela origem e que faz ângulo $\frac{\theta}{2}$ com a parte positiva do eixo X.

Esta discussão está resumida como parte do teorema seguinte.

TEOREMA 7 Toda isometria $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ é ou uma rotação ou uma reflexão. Além disso, se T for induzida pela matriz A, então ou $detA = 1$ ou $detA = -1$, e

T é uma rotação se, e somente se, $detA = 1$,

T é uma reflexão se, e somente se, $detA = -1$.

DEMONSTRAÇÃO Tudo o que falta demonstrar é que $detA = 1$ se T for uma rotação e $detA = -1$ se T for uma reflexão. Mas essas afirmações são conseqüências do Teorema 3 e do Teorema 1, respectivamente.

3.4.7 Computação Gráfica[14]

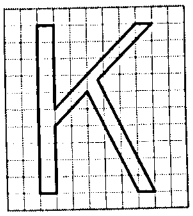


Figura 3.62

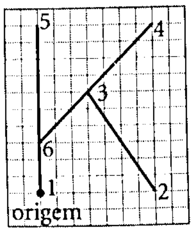


Figura 3.63

A computação gráfica lida com imagens apresentadas em uma tela de computador e, portanto, surge em uma variedade de aplicações, indo de processadores de palavras a animações estilo *Guerra nas Estrelas*, *videogames*, imagens de modelamento em arame (*wire frame*) de um avião. Essas imagens consistem de um número de pontos na tela, junto com instruções de como preencher as áreas limitadas por linhas retas e curvas. Freqüentemente, curvas são aproximadas por um conjunto de pequenos segmentos de retas, de modo que a curva é especificada por uma série de pontos na tela. As transformações matriciais são importantes aqui porque as imagens de segmentos de reta por matrizes são novamente[15] segmentos de reta. Observe que uma imagem colorida requer que três imagens sejam enviadas, uma formada por pontos vermelhos, uma por pontos verdes e a terceira por pontos azuis. Cada uma dessas imagens corresponde a um conjunto de pontos de fósforo da tela, que se iluminam com intensidades variadas.

Considere a exibição da letra K. Na realidade, ela é retratada na tela como na Figura 3.62, com a especificação das coordenadas dos 12 cantos e preenchimento do interior. Para simplificar, iremos desconsiderar a espessura da letra e assim necessitar apenas de 6 coordenadas, como na Figura 3.63. Essa letra simplificada pode ser armazenada na forma de uma matriz de dados

$$\begin{array}{cc} \textit{Vértice} & \begin{matrix} \ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \end{matrix} \\ K_d = & \begin{bmatrix} 0 & 7 & 3 & 7 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & 10 & 10 & 3 \end{bmatrix} \end{array}$$

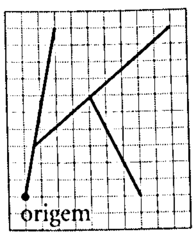


Figura 3.64

em que as colunas são as coordenadas dos vértices, na ordem (e a letra tem 10 unidades de altura e 7 de largura). Podemos inclinar a letra para a direita multiplicando por uma matriz A de cisalhamento em X, $A = \begin{bmatrix} 1 & 0{,}2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$. O resultado será a letra com matriz de dados

$$AK_d = \begin{bmatrix} 1 & 0{,}2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 7 & 3 & 7 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & 10 & 10 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 7 & 4{,}2 & 9 & 2 & 0{,}6 \\ 0 & 0 & 6 & 10 & 10 & 3 \end{bmatrix}$$

que é mostrada na Figura 3.64. Se quisermos fazer a letra mais estreita, podemos agora aplicar uma matriz B de compressão em X, $B = \begin{bmatrix} 0{,}8 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ obtendo

$$BAK_d = \begin{bmatrix} 0{,}8 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0{,}2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 7 & 3 & 7 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & 10 & 10 & 3 \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} 0 & 5{,}6 & 3{,}36 & 7{,}2 & 1{,}6 & 0{,}48 \\ 0 & 0 & 6 & 10 & 10 & 3 \end{bmatrix}$$

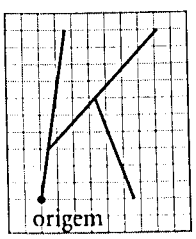


Figura 3.65

que está desenhada na Figura 3.65.

Também podemos girar a letra em torno da origem de um ângulo de $\frac{\pi}{6}$ (ou 30°) multiplicando pela matriz $R_{\frac{\pi}{6}} = \begin{bmatrix} \cos(\frac{\pi}{6}) & -\operatorname{sen}(\frac{\pi}{6}) \\ \operatorname{sen}(\frac{\pi}{6}) & \cos(\frac{\pi}{6}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0{,}866 & -0{,}5 \\ 0{,}5 & 0{,}866 \end{bmatrix}$.

O resultado é

$$R_{\frac{\pi}{6}}K_d = \begin{bmatrix} 0{,}866 & -0{,}5 \\ 0{,}5 & 0{,}866 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 7 & 3 & 7 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & 10 & 10 & 3 \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} 0 & 6{,}062 & -0{,}402 & 1{,}062 & -5{,}0 & -1{,}5 \\ 0 & 3{,}5 & 6{,}696 & 12{,}16 & 8{,}66 & 2{,}598 \end{bmatrix}$$

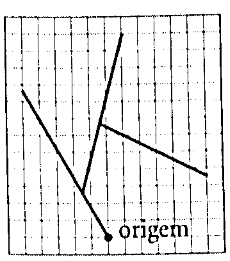


Figura 3.66

e está traçado na Figura 3.66.

[14] Esta seção não será referência de nenhuma outra parte do livro.

[15] Se um vetor $\vec{v}$ está sobre a reta que contém $\vec{v}_0$ e tem vetor diretor $\vec{d}$, então $\vec{v} = \vec{v}_0 + t\vec{d}$ para algum número t. Logo a imagem $A\vec{v} = A\vec{v}_0 + t\,A\vec{d}$ pela matriz A está sobre a reta que contém $A\vec{v}_0$, e tem vetor diretor $A\vec{d}$. (Observe que se $A\vec{d} = \vec{0}$, a imagem é o único ponto $A\vec{v}_0$.)

Isso coloca um problema: Como girar em torno de um ponto que não seja a origem? Acontece que poderemos fazer isso quando tivermos resolvido um outro problema mais básico. É clara a importância de se poder fazer a translação de uma imagem na tela por um vetor fixado $\vec{w}$, isto é, aplicar a transformação $T_{\vec{w}} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ dada por $T_{\vec{w}}(\vec{v}) = \vec{v} + \vec{w}$ para todo $\vec{v}$ em $\mathbb{R}^2$. O problema é que essas translações não são transformações matriciais (ver Exemplo 3). Contudo, há uma maneira inteligente de contornar isso.

A idéia é representar um ponto $\vec{v} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ como uma coluna 3×1 $\begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix}$, cujas coordenadas são chamadas **coordenadas homogêneas** de $\vec{v}$. Então a translação por $\vec{w} = \begin{bmatrix} p \\ q \end{bmatrix}$ pode ser obtida pela multiplicação por uma matriz 3×3:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & p \\ 0 & 1 & q \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x+p \\ y+q \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} T_{\vec{w}}(\vec{v}) \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Assim sendo, usando as coordenadas homogêneas, podemos implementar a translação $T_{\vec{w}}$ nas duas coordenadas no topo. Por sua vez, a transformação matricial induzida por $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ também pode ser dada por uma matriz 3×3:

$$\begin{bmatrix} a & b & 0 \\ c & d & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ax+by \\ cx+dy \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A\vec{v} \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Portanto, tudo pode ser obtido ao custo de usarmos matrizes 3×3 e coordenadas homogêneas.

Exemplo 11 Gire a letra K da Figura 3.63 de $\frac{\pi}{6}$ em torno do ponto $\begin{bmatrix} 4 \\ 5 \end{bmatrix}$.

SOLUÇÃO Usando coordenadas homogêneas para os vértices da letra obtemos uma matriz de dados com três linhas:

$$K_d = \begin{bmatrix} 0 & 7 & 3 & 7 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & 10 & 10 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Se escrevermos $\vec{w} = \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \end{bmatrix}$, a idéia é primeiramente fazer a translação da letra de $-\vec{w}$ de modo que o ponto $\vec{w}$ se mova para a origem, depois girar a letra obtida e então fazer a translação de $\vec{w}$, de volta para sua posição original. A aritmética matricial é como segue:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0{,}866 & -0{,}5 & 0 \\ 0{,}5 & 0{,}866 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 & -4 \\ 0 & 1 & -5 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 7 & 3 & 7 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & 10 & 10 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 3{,}036 & 9{,}098 & 2{,}634 & 4{,}098 & -1{,}964 & 1{,}536 \\ -1{,}33 & 2{,}17 & 5{,}366 & 10{,}83 & 7{,}33 & 1{,}268 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

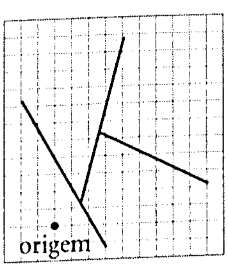


Figura 3.67

O resultado está traçado na Figura 3.67.

Essa discussão apenas toca na superfície da computação gráfica e se você estiver interessado deve procurar livros especializados no assunto. A confecção de gráficos realistas requer uma quantidade enorme de cálculos matriciais. Na verdade, algoritmos para efetuar produto de matrizes são agora embutidos nos circuitos de *microchips* e podem efetuar mais de 100 milhões de produtos de matrizes por segundo. Isso é particularmente importante no campo de gráficos em três dimensões em que as coordenadas homogêneas têm quatro componentes e são necessárias matrizes 4×4.

Exercícios 3.4

1. Em cada caso, mostre que $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ é uma transformação matricial e encontre a matriz de T:

a) $T\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2x+y \\ 3x-2y \end{bmatrix}$ **b)** $T\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3x-y \\ 2y+x \end{bmatrix}$

c) $T\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 5y+6x \end{bmatrix}$ **d)** $T\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y-x \\ x+y \end{bmatrix}$

2. Em cada caso, suponha que $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ é uma transformação linear, use essa informação para determinar $T\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ para todo $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ em $\mathbb{R}^2$, e encontre a matriz de T.

a) $T\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \end{bmatrix}$ e $T\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ -2 \end{bmatrix}$

b) $T\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \end{bmatrix}$ e $T\begin{bmatrix} 3 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$

c) $T\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix}$ e $T\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$

d) $T\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ e $T\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \end{bmatrix}$

3. Dê a matriz de cada uma das seguintes transformações e esboce a imagem do quadrado unitário.

a) Reflexão em relação à reta $y = -x$.
b) Reflexão em relação à reta $y = 2x$.
c) Rotação de $\frac{\pi}{4}$.
d) Rotação de $-\frac{\pi}{2}$.
e) Projeção sobre o eixo Y.
f) Projeção sobre a reta $y = -x$.

4. Em cada caso, mostre que T não é uma transformação matricial.

a) $T\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} xy \\ 0 \end{bmatrix}$ **b)** $T\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ y^2 \end{bmatrix}$

5. Em cada caso, mostre que $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ é uma transformação matricial e encontre a matriz de T.

a) $T(\vec{v}) = a\vec{v}$ para todo $\vec{v}$ em $\mathbb{R}^2$. (Aqui, a é um número fixado.)

b) $T\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = x\vec{u} + y\vec{w}$ para todo $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ em $\mathbb{R}^2$. (Aqui, $\vec{u} = \begin{bmatrix} p \\ q \end{bmatrix}$ e $\vec{w} = \begin{bmatrix} r \\ s \end{bmatrix}$ estão fixados em $\mathbb{R}^2$.)

6. Em cada caso, encontre a matriz de T, $T\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ e $T\begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix}$ e esboce a imagem do quadrado unitário.

a) T é a reflexão em relação à reta $y = -2x$.
b) T é a reflexão em relação à reta $y = 3x$.
c) T é a rotação de $\frac{\pi}{3}$.
d) T é a rotação de $-\frac{\pi}{4}$.
e) T é a projeção sobre a reta $y = 3x$.
f) T é a projeção sobre a reta $x + 2y = 0$.

7. Em cada caso, mostre que T é uma projeção sobre uma reta, ou uma reflexão em relação a uma reta, ou uma rotação de um ângulo, e encontre a reta ou ângulo.

a) $T\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \frac{1}{5}\begin{bmatrix} x+2y \\ 2x+4y \end{bmatrix}$ **b)** $T\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} x-y \\ y-x \end{bmatrix}$

c) $T\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} -x-y \\ x-y \end{bmatrix}$ **d)** $T\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \frac{1}{5}\begin{bmatrix} -3x+4y \\ 4x+3y \end{bmatrix}$

e) $T\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -y \\ -x \end{bmatrix}$ **f)** $T\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} x-\sqrt{3}y \\ \sqrt{3}x+y \end{bmatrix}$

8. Sejam R e S transformações matriciais induzidas pelas matrizes A e B respectivamente. Em cada caso, mostre que T é uma transformação matricial e encontre sua matriz em termos de A e B.

a) $T(\vec{v}) = R(\vec{v}) + S(\vec{v})$ para todo $\vec{v}$ em $\mathbb{R}^2$.

b) $T(\vec{v}) = kR(\vec{v})$ para todo em $\mathbb{R}^2$. (Aqui k é um número fixado.)

9. Dado $a > 0$, seja $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ a transformação que leva cada ponto que está a uma distância r da origem radialmente até o ponto que está a uma distância ar da origem. [T é chamada uma **dilatação** se $a > 1$; e uma **contração** se $0 \le a \le 1$.]

a) Mostre que T é uma transformação matricial, encontre sua matriz e esboce a imagem do quadrado unitário.

b) Mostre que vale $T \circ S = S \circ T$ para toda transformação matricial $S : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$.

c) Se $R : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ é uma transformação matricial tal que $R \circ S = S \circ R$ para toda transformação matricial $S : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, mostre que R é uma dilatação ou contração. [Sugestão: Ver Exercício 29 da Seção 1.4.]

10. Seja L a reta que passa pela origem e tem vetor diretor $\vec{d} \neq \vec{0}$ e denote por P_L a projeção sobre L. Considere a fórmula $P_L(\vec{v}) = \frac{\vec{v} \cdot \vec{d}}{\|\vec{d}\|^2}\vec{d}$ para todo $\vec{v}$ em $\mathbb{R}^2$.

a) Use a fórmula para mostrar que $P_L(\vec{v})$ é a mesma, independentemente do vetor diretor (não nulo) $\vec{d}$ usado para determinar L.

b) Use a fórmula para demonstrar diretamente que P_L é linear.

11. Mostre que valem os seguintes fatos para toda transformação matricial $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$.

a) $T(\vec{0}) = \vec{0}$. **b)** $T(-\vec{v}) = -T(\vec{v})$ para todo $\vec{v}$ em $\mathbb{R}^2$.

c) $T(a\vec{v} + b\vec{w}) = aT(\vec{v}) + bT(\vec{w})$ para todo $\vec{v}$ e $\vec{w}$ em $\mathbb{R}^2$.

12. Denote por L a reta que passa pela origem e tem vetor diretor (não nulo) $\vec{d} = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$.

a) Mostre que a matriz da projeção sobre L é $\frac{1}{a^2+b^2}\begin{bmatrix} a^2 & ab \\ ab & b^2 \end{bmatrix}$.

b) Mostre que a matriz da reflexão em relação a L é $\frac{1}{a^2+b^2}\begin{bmatrix} a^2-b^2 & 2ab \\ 2ab & b^2-a^2 \end{bmatrix}$.

13. Seja T a transformação matricial induzida por uma matriz inversível A de tamanho 2×2. Em cada caso, interprete T^{-1} geometricamente e então (como no Exemplo 10) encontre A^{-1}.

a) $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ **b)** $A = \begin{bmatrix} 1 & 5 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

c) $A = \frac{1}{5}\begin{bmatrix} -3 & 4 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}$ **d)** $A = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$

e) $A = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$ **f)** $A = \frac{1}{1+m^2}\begin{bmatrix} 1-m^2 & 2m \\ 2m & m^2-1 \end{bmatrix}$

14. Em cada caso, encontre uma rotação ou reflexão que seja igual à transformação dada.
a) Reflexão em torno do eixo Y seguida por uma rotação de $\frac{\pi}{2}$.
b) Rotação de π seguida de reflexão em relação ao eixo X.
c) Rotação de $\frac{\pi}{2}$ seguida de reflexão em relação à reta $y = x$.
d) Reflexão em relação ao eixo X seguida de rotação de $\frac{\pi}{2}$.
e) Reflexão em relação à reta $y = x$ seguida de reflexão em relação ao eixo X.

15. Expresse a reflexão R em relação à reta $y = -x$ como a composta de uma rotação T seguida de uma reflexão S em relação à reta $y = x$. [Sugestão: Se $R = S \circ T$, então $T = S^{-1} \circ R$.]

16. Determine o efeito das seguintes transformações:
a) Rotação de $\frac{\pi}{2}$, seguida de uma projeção sobre o eixo Y, seguida de uma reflexão em relação à reta $y = x$.
b) Reflexão em relação à reta $y = x$ seguida de reflexão em relação à reta $y = -x$.
c) Projeção sobre o eixo X seguida de uma reflexão em relação à reta $y = x$.
d) Expansão pelo fator 2 em Y seguida pela rotação de $\frac{\pi}{2}$.

17. Dada qualquer reta $y = mx$ que passa pela origem, mostre que $P_m \circ Q_m = P_m = Q_m \circ P_m$ de duas maneiras:
a) geometricamente;
b) usando o Teorema 1.

18. Dadas duas retas perpendiculares $y = mx$ e $y = m_1x$ passando pela origem, mostre que $P_m \circ P_{m_1} = 0$ de duas maneiras:
a) geometricamente;
b) usando o Teorema 1.

19. Se T é uma projeção qualquer, mostre que $T \circ T = T$ de duas maneiras:
a) geometricamente;
b) usando o Teorema 1.

20. Se T é uma reflexão, mostre que $T^{-1} = T$ de duas maneiras:
a) geometricamente;
b) usando o Teorema 1.

21. **a)** Mostre que a composta de duas isometrias é uma isometria.
b) Mostre que a composta de duas reflexões é uma rotação.

22. Mostre que toda reflexão é uma reflexão em relação ao eixo X seguida de uma rotação. [Sugestão: Faça a composta com a reflexão em relação ao eixo X, e use os Exercícios 20 e 21.]

23. Denote por $área(\vec{v}, \vec{w})$ a área do paralelogramo determinado pelos vetores $\vec{v}$ e $\vec{w}$.
a) Mostre que $área(A\vec{v}, A\vec{w}) = |\det(A)|\,|\det[\vec{v}, \vec{w}]|$ onde $[\vec{v}, \vec{w}]$ denota a matriz de colunas $\vec{v}$ e $\vec{w}$. [Sugestão: Escreva $\vec{v} = [p \;\; q]^T$ e $\vec{w} = [r \;\; s]^T$ e olhe-os como $\vec{v} = [p \;\; q \;\; 0]^T$ e $\vec{w} = [r \;\; s \;\; 0]^T$ em $\mathbb{R}^3$. Continue como na demonstração do Teorema 4.]
b) Use o resultado em **a)** para deduzir o Teorema 4.

24. Uma matriz A de tamanho 2×2 é **ortogonal** se A for inversível e se $A^{-1} = A^T$.
a) Mostre que a matriz de qualquer isometria é ortogonal. [Sugestão: Teorema 7.]
b) Se A é ortogonal, mostre que a transformação matricial correspondente é uma isometria.

25. Em cada caso, encontre a matriz 3×3 da transformação dada:
a) Reflexão em relação a $y = -x$ seguida da translação de $\begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix}$.
b) Rotação de $\frac{\pi}{2}$ seguida da translação de $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$.
c) Translação de $\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$ seguida da projeção sobre $y = 2x$.
d) Translação de $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$ seguida da rotação de $\frac{\pi}{3}$.

26. Em cada caso, encontre a matriz 3×3 da transformação:
a) Reflexão em relação à reta $y = mx + b$.
b) Projeção sobre a reta $y = mx + b$.

3.5 O PRODUTO VETORIAL[16]

Nesta seção, deduziremos algumas propriedades do produto vetorial que não foram dadas na Seção 3.3.

3.5.1 O Produto Vetorial

Sejam $\vec{v} = \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{bmatrix}$ e $\vec{w} = \begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{bmatrix}$ vetores. Na Seção 3.3, introduzimos o **produto vetorial** $\vec{v} \times \vec{w}$ definido por

$$\vec{v} \times \vec{w} = \begin{bmatrix} y_1z_2 - y_2z_1 \\ -(x_1z_2 - x_2z_1) \\ x_1y_2 - x_2y_1 \end{bmatrix}. \qquad (*)$$

Observe que $\vec{v} \times \vec{w}$ é um *vetor* (em oposição ao produto *escalar* $\vec{v} \cdot \vec{w}$). A motivação para a introdução de $\vec{v} \times \vec{w}$ é que ele é ortogonal a $\vec{v}$ e $\vec{w}$. Esse fato é verificado a seguir (Teorema 2) usando uma descrição de $\vec{v} \times \vec{w}$ que emprega determinantes.

16 Esta seção pode ser omitida, uma vez que será pouco usada na seqüência.

A descrição do produto vetorial por meio de determinantes utiliza os **vetores canônicos**

$$\vec{\imath} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \; \vec{\jmath} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \text{ e } \vec{k} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

São vetores de comprimento 1[17] que apontam na direção dos semi-eixos positivos X, Y e Z, respectivamente, e seu nome origina-se do fato de que qualquer vetor $\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$ pode ser escrito na forma

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = x\vec{\imath} + y\vec{\jmath} + z\vec{k}.$$

Isso nos permite dar uma descrição útil do produto vetorial usando determinantes. Ela vem da observação de que as componentes de $\vec{v} \times \vec{w}$ em (*) podem ser escritas como determinantes 2×2: $det\begin{bmatrix} y_1 & y_2 \\ z_1 & z_2 \end{bmatrix}$, $-det\begin{bmatrix} x_1 & x_2 \\ z_1 & z_2 \end{bmatrix}$ e $det\begin{bmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{bmatrix}$. Isso leva a escrever o produto vetorial da forma a seguir.

Descrição do Produto Vetorial por meio de Determinante.

Se $\vec{v} = \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{bmatrix}$ e $\vec{w} = \begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{bmatrix}$ são vetores, seu produto vetorial é dado por

$$\vec{v} \times \vec{w} = det\begin{bmatrix} \vec{\imath} & x_1 & x_2 \\ \vec{\jmath} & y_1 & y_2 \\ \vec{k} & z_1 & z_2 \end{bmatrix} = det\begin{bmatrix} y_1 & y_2 \\ z_1 & z_2 \end{bmatrix}\vec{\imath} - det\begin{bmatrix} x_1 & x_2 \\ z_1 & z_2 \end{bmatrix}\vec{\jmath} + det\begin{bmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{bmatrix}\vec{k}.$$

Aqui o determinante é expandido por cofatores ao longo da primeira coluna, logo as componentes de $\vec{v} \times \vec{w}$ são os coeficientes de $\vec{\imath}$, $\vec{\jmath}$ e $\vec{k}$, respectivamente.

Exemplo 1 Se $\vec{v} = \begin{bmatrix} 4 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}$ e $\vec{w} = \begin{bmatrix} 5 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix}$, então $\vec{v} \times \vec{w} = det\begin{bmatrix} \vec{\imath} & 4 & 5 \\ \vec{\jmath} & -2 & 0 \\ \vec{k} & 1 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -6 \\ -7 \\ 10 \end{bmatrix}$.

Observe que no Exemplo 1, $\vec{v} \times \vec{w}$ é ortogonal tanto a $\vec{v}$ quanto a $\vec{w}$ porque, como pode ser facilmente verificado, $\vec{v} \cdot (\vec{v} \times \vec{w}) = 0$ e $\vec{w} \cdot (\vec{v} \times \vec{w}) = 0$. Isso acontece em todos os casos, como verificaremos. Há uma maneira fácil de calcular o número $\vec{u} \cdot (\vec{v} \times \vec{w})$ para *qualquer* vetor $\vec{u}$: ele é o determinante da matriz $[\vec{u} \;\; \vec{v} \;\; \vec{w}]$ que tem $\vec{u}$, $\vec{v}$ e $\vec{w}$ como suas colunas.

TEOREMA 11 Se $\vec{u}$, $\vec{v}$ e $\vec{w}$ são vetores, então $\vec{u} \cdot (\vec{v} \times \vec{w}) = det[\vec{u} \;\; \vec{v} \;\; \vec{w}]$.

DEMONSTRAÇÃO Escreva $\vec{u} = \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{bmatrix}$, $\vec{v} = \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{bmatrix}$ e $\vec{w} = \begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{bmatrix}$ na forma de matriz.

Então $\vec{v} \times \vec{w} = \left[det\begin{bmatrix} y_1 & y_2 \\ z_1 & z_2 \end{bmatrix} \;\; -det\begin{bmatrix} x_1 & x_2 \\ z_1 & z_2 \end{bmatrix} \;\; det\begin{bmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{bmatrix} \right]^T$, de modo que

$$\vec{u} \cdot (\vec{v} \times \vec{w}) = x_0\, det\begin{bmatrix} y_1 & y_2 \\ z_1 & z_2 \end{bmatrix} - y_0\, det\begin{bmatrix} x_1 & x_2 \\ z_1 & z_2 \end{bmatrix} + z_0\, det\begin{bmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{bmatrix} = det\begin{bmatrix} x_0 & x_1 & x_2 \\ y_0 & y_1 & y_2 \\ z_0 & z_1 & z_2 \end{bmatrix}$$

sendo este último determinante expandido ao longo da primeira coluna.

O número $\vec{u} \cdot (\vec{v} \times \vec{w})$ é chamado **produto misto** dos vetores $\vec{u}$, $\vec{v}$ e $\vec{w}$, e tem um significado geométrico ao qual iremos retornar mais adiante. Por enquanto, vamos usá-lo para confirmar que o produto vetorial resolve o problema de encontrar um vetor ortogonal a dois vetores dados.

[17] Vetores de comprimento 1 são chamados **vetores unitários**. Eles reaparecerão no Capítulo 4.

TEOREMA 2 Para quaisquer vetores não nulos $\vec{v}$ e $\vec{w}$, o produto vetorial $\vec{v} \times \vec{w}$ é ortogonal a ambos os vetores $\vec{v}$ e $\vec{w}$.

DEMONSTRAÇÃO Usando o Teorema 1 com $\vec{u} = \vec{v}$, obtemos $\vec{v} \cdot (\vec{v} \times \vec{w}) = det[\vec{v} \;\; \vec{v} \;\; \vec{w}] = 0$ porque a matriz $[\vec{v} \;\; \vec{v} \;\; \vec{w}]$ tem duas colunas idênticas.[18] Assim sendo, $\vec{v}$ e $\vec{v} \times \vec{w}$ são ortogonais. Analogamente, $\vec{w} \cdot (\vec{v} \times \vec{w}) = 0$ e, portanto, $\vec{w}$ e $\vec{v} \times \vec{w}$ também são vetores ortogonais.

Vimos na Seção 3.3 que o Teorema 2 tem muitas aplicações ao estudo de planos e retas. Nesta seção determinaremos outros aspectos importantes do produto vetorial, incluindo algumas aplicações para encontrar áreas e volumes.

3.5.2 Propriedades do Produto Vetorial

Começamos com um teorema que coleciona várias propriedades algébricas do produto vetorial.

TEOREMA 3 Sejam $\vec{u}$, $\vec{v}$ e $\vec{w}$ vetores. Então:

(1) $\vec{v} \times \vec{w}$ é um vetor.
(2) $\vec{v} \times \vec{0} = \vec{0} = \vec{0} \times \vec{v}$.
(3) $\vec{v} \times \vec{v} = \vec{0}$.
(4) $\vec{w} \times \vec{v} = -(\vec{v} \times \vec{w})$.
(5) $(a\vec{v}) \times \vec{w} = a(\vec{v} \times \vec{w}) = \vec{v} \times (a\vec{w})$ para qualquer escalar a.
(6) $\vec{v} \times (\vec{u} + \vec{w}) = (\vec{v} \times \vec{u}) + (\vec{v} \times \vec{w})$.
(7) $(\vec{u} + \vec{w}) \times \vec{v} = (\vec{u} \times \vec{v}) + (\vec{w} \times \vec{v})$.

DEMONSTRAÇÃO Já havíamos notado (1). Agora lembre que se $\vec{v} = [x_1 \;\; y_1 \;\; z_1]^T$ e $\vec{w} = [x_2 \;\; y_2 \;\; z_2]^T$, então

$$\vec{v} \times \vec{w} = det\begin{bmatrix} \vec{\imath} & x_1 & x_2 \\ \vec{\jmath} & y_1 & y_2 \\ \vec{k} & z_1 & z_2 \end{bmatrix}.$$

Assim sendo, seguem (2) e (3) porque um determinante é zero quando uma de suas colunas é zero ou quando duas colunas são iguais; (4) segue porque um determinante muda de sinal se duas colunas são trocadas entre si; (5) segue porque multiplicando-se uma coluna de um determinante por um escalar a o valor do determinante fica multiplicado por a. Finalmente, (6) e (7) seguem da definição de produto vetorial e as verificações são deixadas como Exercício 11.

Não demos ainda uma descrição intrínseca do produto vetorial que não dependa da escolha de um sistema de coordenadas. O teorema a seguir leva a uma tal descrição e fornece uma conexão fundamental entre os produtos escalar e vetorial.

TEOREMA 4 **A identidade de Lagrange.**[19] Se $\vec{v}$ e $\vec{w}$ são vetores quaisquer, então

$$\|\vec{v} \times \vec{w}\|^2 = \|\vec{v}\|^2\|\vec{w}\|^2 - (\vec{v} \cdot \vec{w})^2.$$

DEMONSTRAÇÃO Escreva $\vec{v} = [x_1 \;\; y_1 \;\; z_1]^T$ e $\vec{w} = [x_2 \;\; y_2 \;\; z_2]^T$. Então a identidade se torna

$$\begin{aligned}&(y_1z_2 - y_2z_1)^2 + (x_1z_2 - x_2z_1)^2 + (x_1y_2 - x_2y_1)^2 \\ &= (x_1^2 + y_1^2 + z_1^2)(x_2^2 + y_2^2 + z_2^2) - (x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2)^2\end{aligned}$$

Deixamos a verificação rotineira como um exercício.

[18] Como observado anteriormente, o fato que $\vec{v} \cdot (\vec{v} \times \vec{w}) = 0$ pode ser verificado diretamente sem qualquer referência a determinantes.

[19] Joseph Louis Lagrange (1736–1813), um grande matemático, contribuiu em muitas áreas da matemática mas é especialmente lembrado por seu trabalho em mecânica.

Se $\vec{v}$ e $\vec{w}$ são vetores não nulos, a identidade de Lagrange pode ser usada para dar uma descrição intrínseca do comprimento do vetor $\vec{v} \times \vec{w}$. Recorde (Teorema 2 da Seção 3.2) que $\vec{v} \cdot \vec{w} = \|\vec{v}\|\|\vec{w}\| \cos\theta$ sendo θ o ângulo entre $\vec{v}$ e $\vec{w}$. Se essa expressão for substituída no lado direito da identidade de Lagrange, o resultado será

$$\begin{aligned}\|\vec{v} \times \vec{w}\|^2 &= \|\vec{v}\|^2\|\vec{w}\|^2 - (\|\vec{v}\|\|\vec{w}\| \cos\theta)^2 \\ &= \|\vec{v}\|^2\|\vec{w}\|^2 \left(1 - \cos^2\theta\right) \\ &= (\|\vec{v}\|\|\vec{w}\| \operatorname{sen}\theta)^2\end{aligned}$$

onde usamos o fato que $\operatorname{sen}^2\theta = 1 - \cos^2\theta$. Como $\operatorname{sen}^2\theta$ é positivo para $0 \le \theta \le \pi$, a extração da raiz quadrada dos dois lados dá

$$\|\vec{v} \times \vec{w}\| = \|\vec{v}\|\|\vec{w}\| \operatorname{sen}\theta$$

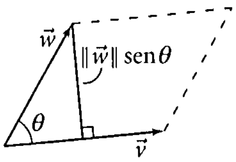


Figura 3.68

Essa é uma fórmula importante (intrínseca) da magnitude de $\vec{v} \times \vec{w}$. Além disso, tem uma boa interpretação geométrica em termos do paralelogramo determinado por $\vec{v}$ e $\vec{w}$ (ver Figura 3.68). De fato, a base do paralelogramo tem comprimento $\|\vec{v}\|$ e a altura é $\|\vec{w}\| \operatorname{sen}\theta$. Assim sendo, a área do paralelogramo é $\|\vec{w}\| (\|\vec{v}\| \operatorname{sen}\theta) = \|\vec{v} \times \vec{w}\|$, e provamos a parte (1) do

TEOREMA 5 Se θ é o ângulo entre os vetores não nulos $\vec{v}$ e $\vec{w}$, então:

(1) $\|\vec{v} \times \vec{w}\| = \|\vec{v}\| \|\vec{w}\| \operatorname{sen}\theta$ é a área do paralelogramo determinado por $\vec{v}$ e $\vec{w}$.

(2) $\vec{v}$ e $\vec{w}$ são paralelos se, e somente se, $\vec{v} \times \vec{w} = \vec{0}$.

DEMONSTRAÇÃO A parte (1) foi provada acima. Temos $\vec{v} \times \vec{w} = \vec{0}$ se, e somente se, $\|\vec{v} \times \vec{w}\| = 0$. Por (1), isso vale se, e somente se, o paralelogramo determinado por $\vec{v}$ e $\vec{w}$ tem área nula. Mas isso acontece se, e somente se, $\vec{v}$ e $\vec{w}$ têm a mesma direção ou direções opostas, isto é, se, e somente se, $\vec{v}$ e $\vec{w}$ são vetores paralelos.

Observe a analogia entre a parte (2) do Teorema 5 e o fato que vetores $\vec{v}$ e $\vec{w}$ são ortogonais se, e somente se, $\vec{v} \cdot \vec{w} = 0$ (Teorema 3 da Seção 3.2).

Exemplo 2 Determine a área do triângulo de vértices $P(1, -1, 1)$, $Q(2, 0, 3)$ e $R(1, 1, -3)$.

SOLUÇÃO Temos $\overrightarrow{PQ} = [1 \ \ 1 \ \ 2]^T$ e $\overrightarrow{PR} = [0 \ \ 2 \ \ -4]^T$, de modo que $\overrightarrow{PQ} \times \overrightarrow{PR} = [-8 \ \ 4 \ \ 2]^T = 2[-4 \ \ 2 \ \ 1]^T$. A área A do triângulo PQR é metade da área do paralelogramo determinado por $\overrightarrow{PQ}$ e $\overrightarrow{PR}$ (ver Figura 3.69). Logo, o Teorema 5 fornece

$$A = \tfrac{1}{2}\left\|\overrightarrow{PQ} \times \overrightarrow{PR}\right\| = \tfrac{1}{2}\left[2\sqrt{16 + 4 + 1}\right] = \sqrt{21}.$$

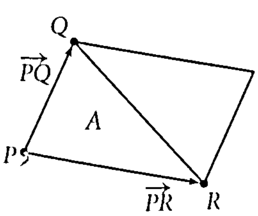


Figura 3.69

Se três vetores $\vec{u}$, $\vec{v}$ e $\vec{w}$ são dados, eles determinam um sólido geométrico chamado **paralelepípedo** (ver Figura 3.70), cujas seis faces são paralelogramos. É freqüente o interesse em encontrar o volume de tal sólido. A base do paralelepípedo é o paralelogramo determinado por $\vec{v}$ e $\vec{w}$ e pelo Teorema 5, a base tem área $A = \|\vec{v} \times \vec{w}\|$. Observando a Figura 3.70, vemos que o volume do paralelepípedo é hA sendo h o comprimento da projeção de $\vec{u}$ sobre $\vec{v} \times \vec{w}$. Assim sendo, o Teorema 4 da Seção 3.2 fornece

$$h = \left|\frac{\vec{u} \cdot (\vec{v} \times \vec{w})}{\|\vec{v} \times \vec{w}\|^2}\right| \|\vec{v} \times \vec{w}\| = \frac{|\vec{u} \cdot (\vec{v} \times \vec{w})|}{\|\vec{v} \times \vec{w}\|} = \frac{|\vec{u} \cdot (\vec{v} \times \vec{w})|}{A}$$

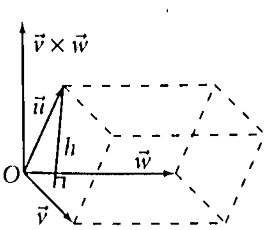


Figura 3.70

Portanto, o volume é $hA = |\vec{u} \cdot (\vec{v} \times \vec{w})|$. Isso, junto com o Teorema 1, prova uma fórmula importante.

TEOREMA 6 O volume do paralelepípedo determinado pelos vetores $\vec{u}$, $\vec{v}$ e $\vec{w}$ é

$$|\vec{u} \cdot (\vec{v} \times \vec{w})| = |det[\vec{u} \quad \vec{v} \quad \vec{w}]|$$

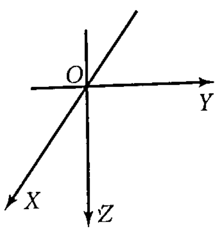
onde $[\vec{u} \quad \vec{v} \quad \vec{w}]$ é a matriz que tem $\vec{u}$, $\vec{v}$ e $\vec{w}$ como suas colunas.

3.5.3 O Significado Geométrico do Produto Vetorial

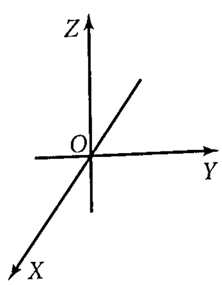
Como no caso do produto escalar, nossa definição de $\vec{v} \times \vec{w}$ é dada em termos das componentes de $\vec{v}$ e $\vec{w}$ e, portanto, parecem depender da escolha do sistema de coordenadas. Na verdade, não é assim. Para começar, o Teorema 5 dá uma descrição intrínseca da magnitude de $\vec{v} \times \vec{w}$:

$$\|\vec{v} \times \vec{w}\| \text{ é a área do paralelogramo determinado por } \vec{v} \text{ e } \vec{w}.$$

Observe que isso vale mesmo se $\vec{v}$ ou $\vec{w}$ forem nulos.



Sistema com Orientação Negativa



Sistema com Orientação Positiva

Figura 3.71

Para dar uma descrição da *direção* de $\vec{v} \times \vec{w}$ que não dependa das coordenadas, precisamos primeiramente esclarecer como os eixos coordenados são escolhidos no espaço. O procedimento é o seguinte: primeiro uma origem e, depois, duas retas perpendiculares e passando pela origem (o eixo X e o eixo Y) são escolhidas. Em seguida, um sentido positivo é escolhido arbitrariamente sobre cada um desses eixos. Então o eixo Z é escolhido como a (única) reta que passa pela origem e é perpendicular a cada um dos eixos X e Y. Tudo o que resta é selecionar um lado positivo para o eixo Z. Há duas possibilidades (mostradas na Figura 3.71) e é uma convenção dizer que um sistema de coordenadas tem **orientação positiva** se a orientação de seus eixos satisfaz a **regra da mão direita**. Isso significa que a parte positiva do eixo Z é escolhida de modo que, se o eixo Z pudesse ser agarrado com a mão direita, com o polegar apontando para o sentido positivo, os outros dedos iriam se curvar indo do semi-eixo dos X positivos para o semi-eixo dos Y positivos (por um ângulo reto).

Com a convenção sobre a orientação positiva estabelecida, a direção de $\vec{v} \times \vec{w}$ pode ser dada pela seguinte regra:

Regra da Mão Direita. Sejam $\vec{v}$ e $\vec{w}$ vetores não nulos e não paralelos (de modo que $\vec{v} \times \vec{w} \neq \vec{0}$), e seja θ o ângulo entre $\vec{v}$ e $\vec{w}$. Se o vetor $\vec{v} \times \vec{w}$ for agarrado com a mão direita e os dedos se curvarem indo de $\vec{v}$ para $\vec{w}$ através do ângulo θ, o polegar apontará na direção de $\vec{v} \times \vec{w}$.

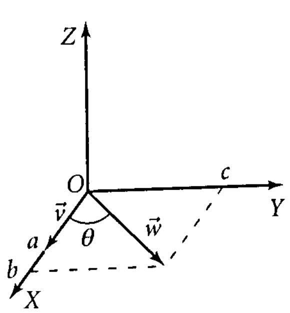


Figura 3.72

Para indicar por que isso acontece, escolha eixos coordenados de modo que os pontos iniciais de $\vec{v}$ e $\vec{w}$ estejam na origem, $\vec{v}$ aponta para a parte positiva do eixo X e $\vec{w}$ está no plano XY, na região que contém o eixo X e a parte positiva do eixo Y (ver Figura 3.72). Nesse sistema de coordenadas, temos $\vec{v} = [a \quad 0 \quad 0]^T$ e $\vec{w} = [b \quad c \quad 0]^T$ onde $a > 0$ e $c > 0$. Assim sendo,

$$\vec{v} \times \vec{w} = det\begin{bmatrix} \vec{i} & a & b \\ \vec{j} & 0 & c \\ \vec{k} & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ ac \end{bmatrix}$$

e, portanto, $\vec{v} \times \vec{w}$ aponta para a parte positiva do eixo Z já que $ac > 0$. Essa é a direção dada pela regra da mão direita.

Exercícios 3.5

1. Em cada caso, encontre a área do triângulo de vértices A, B e C.

a) $A(1, -1, 2)$, $B(3, 3, 2)$, $C(5, 0, -4)$

b) $A(1, 1, 1)$, $B(2, 3, -5)$, $C(0, 2, 2)$

2. Se $\vec{\imath}$, $\vec{\jmath}$ e $\vec{k}$ são os vetores canônicos, mostre que $\vec{\imath} \times \vec{\jmath} = \vec{k}$, $\vec{\jmath} \times \vec{k} = \vec{\imath}$ e $\vec{k} \times \vec{\imath} = \vec{\jmath}$.

3. Em cada caso, encontre o volume do paralelepípedo determinado por $\vec{u}$, $\vec{v}$ e $\vec{w}$.

a) $\vec{u} = [1 \ \ 1 \ \ 2]^T$, $\vec{v} = [2 \ \ 0 \ \ 1]^T$, $\vec{w} = [-1 \ \ 1 \ \ 2]^T$.

b) $\vec{u} = [3 \ \ 0 \ \ 1]^T$, $\vec{v} = [-3 \ \ 1 \ \ 2]^T$, $\vec{w} = [1 \ \ 1 \ \ 1]^T$.

4. Em cada caso, ou mostre que a afirmação é verdadeira, ou dê um exemplo mostrando que ela é falsa.

a) Se $\vec{v} \times \vec{w} = \vec{0}$, então ou $\vec{v} = \vec{0}$ ou $\vec{w} = \vec{0}$.

b) Se $\vec{v} \times \vec{w} = \vec{w} \times \vec{v}$ com $\vec{v} \neq \vec{0}$ e $\vec{w} \neq \vec{0}$, então $\vec{v}$ e $\vec{w}$ são paralelos.

c) $\vec{u} \cdot (\vec{v} \times \vec{w}) = -\vec{v} \cdot (\vec{u} \times \vec{w})$

d) $\vec{u} \cdot (\vec{v} \times \vec{w}) = \vec{w} \cdot (\vec{u} \times \vec{v})$

5. Simplifique $(a\vec{v} + b\vec{w}) \times (c\vec{v} + d\vec{w})$.

6. Se $\vec{u} + \vec{v} + \vec{w} = \vec{0}$, mostre que $\vec{u} \times \vec{v} = \vec{v} \times \vec{w} = \vec{w} \times \vec{u}$.

7. Mostre que o volume do paralelepípedo determinado por $\vec{v}$, $\vec{w}$ e $\vec{v} \times \vec{w}$ é $\|\vec{v} \times \vec{w}\|^2$.

8. Mostre que três pontos A, B e C estão sobre a mesma reta se, e somente se, $\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \vec{0}$.

9. Mostre que quatro pontos A, B, C e D estão no mesmo plano se, e somente se, $\overrightarrow{AB} \cdot (\overrightarrow{AC} \times \overrightarrow{AD}) = 0$.

10. Se $\vec{u}$, $\vec{v}$, e $\vec{w}$ são vetores, mostre que

$$|\vec{u} \cdot (\vec{v} \times \vec{w})| = |\vec{v} \cdot (\vec{w} \times \vec{u})| = |\vec{w} \cdot (\vec{u} \times \vec{v})|.$$

11. Use a definição do produto vetorial para:

a) provar a parte (6) do Teorema 3.

b) provar a parte (7) do Teorema 3.

12. Mostre que a menor distância de um ponto P à reta que passa por P_0 e tem vetor diretor $\vec{d}$ é $\dfrac{\|\overrightarrow{P_0P} \times \vec{d}\|}{\|\vec{d}\|}$.